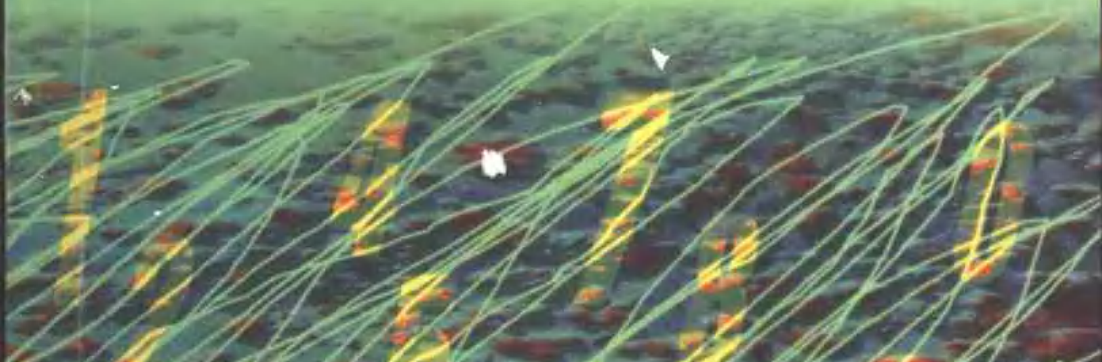
退化、时滞微分系统

TUIHUA. SHIZHI WEIFEN XITONG

蒋 威 著



安徽大学出版社

退化、时滞微分系统

蒋 威 著

安徽大学出版社

此书得到安徽大学211工
程学术专著出版基金资助

退化、时滞微分系统
蒋威 著

安徽大学出版社出版发行
(合肥市肥西路3号 邮码 230039)
肥西县印刷有限责任公司印刷 新华书店经销

开本 850×1168 1/32 印张 7.5 字数 185千字
1998年10月第1版 1998年10月第1次印刷
印数 1000册

特约编辑 张康培 责任编辑 李梅 封面设计 孟献辉

ISBN 7-81052-187-X/O·11 定价 12.80元
如有印装质量问题，请与出版社联系调换

序

1974 年，H.H.Rosenbrock 在讨论复杂的电网问题时，建立了退化微分系统．这是本方向已知的最早的研究工作．

由于诸如控制系统、管理系统、生态系统、电力系统、工业工程系统等实际系统中大量涌现退化的情形，使这一分支引起国内外学者的广泛关注，并且出现了系统研究的专著．如 1982 年 S.L.Campbell 的 " Singular Systems of Differential Equations " 和 1988 年 U.E.Boyarinchev 的 " Solution of Ordinary Differential Equation of Degenerate System " 等等．但是迄今为止，研究工作主要限于常微系统的情形，或者说没有顾及广泛存在的至关重要的时滞的影响．而本书作者近年来对这一课题的研究工作则充分考虑了时滞的普遍存在．内容涉及：借助广义逆阵完整地建立了线性系统的基本理论，进而讨论了解的稳定性、周期解的存在性、系统的可控性和最优控制及其应用等等问题，得到较为系统的结果．本书是这些工作的总结，是上述两专著的自然发展．

限于篇幅，对微分方程与控制理论的一般概念和理论，本书都假定读者已经具备，书中只引用有限的、必需的广义逆阵知识．因而，可供系统论、控制论、现代管理、工业工程和其它相关领域的科学研究人员、工程技术人员和研究生使用．有兴趣的读者一定可以从中看到大量有待解决与推广的研究问题．

相信本书的出版，一定能引起广泛的兴趣，使更多的同行加入到这一研究领域．

郑祖庥

一九九八年二月

目 录

引　言

§0.1　背景与意义

大约在两个世纪以前，人们就发现了第一个泛函方程. 从此，人们对泛函方程逐渐有所认识. 特别是近 20 年来，随着对诸如管理系统、生态系统、电力系统、工业工程系统等实际系统的建模、设计、分析和应用的深入发展，人们越来越重视时滞现象，并进行了系统的研究，取得了实质的、全面的进展.

同时人们也发现，系统的退化现象也是实际系统的普遍现象. 从 60 年代开始到现在，关于时滞微分系统的研究已有长足发展. 而关于退化微分系统则是从 70 年代以来才有所研究. 所得结果越来越精确地描述了现实世界中的动力系统.

首先提出研究退化动态系统问题的是 H.H.Rosenbrock，他在讨论复杂的电网系统中，建立了退化的微分系统，并对此作了比较系统的研究. 接着， D.G.Luenberger 发现动态投入产出系统是典型的退化系统. 近 10 年来关于退化系统的研究，也有很大的进展. S.L Campbell 的专著 Singular Systems of Differential Equations，和 Boyarinchev.U.E. 的 Solution of Ordinary Differential Equation of Degenerate System，非常系统地总结了退化微分系统方面的许多

论文的主要成果，已经成为退化微分系统的经典论著. 我国学者戴立意的专著 Singular Control Systems, 也比较全面地集中了广义控制系统的诸多论文的精华.

可以说，关于时滞系统和退化系统的研究，近年来已有非常大的发展. 但是这两方面的研究尚有许多问题需要进一步讨论.

我们注意到，在许多实际系统中，要对其准确地描述，从而对其更精确地设计、分析和应用，就必需同时考虑时滞的影响和退化现象.

例 1.1 某企业有两种产品，在时刻 t 库存量分别为 $x_1(t)$, $x_2(t)$. 设 $x(t)=(x_1(t),x_2(t))^T$, 这里 " T " 表示转置; 并设 $u(t)=(u_1(t),u_2(t))^T$ 为这两种产品的生产率， $s(t)=(s_1(t),s_2(t))^T$ 为两种产品的销售率. 则有

$$\dot{x}(t)=-s(t)+u(t) \tag{1.1}$$

一般说来，销售率 $s(t)$ 与产品在 t 时刻及 $t-1$ 时刻的库存量 $x(t),x(t-1)$ 有关，而且与 t 时刻库存率 $\dot{x}(t)$ 有关，设 $s(t)=E_1\dot{x}(t)-Ax(t)-Bx(t-1)$, 代入 (1.1) 得

$$(I_2+E_1)\dot{x}(t)=Ax(t)+Bx(t-1)+u(t) \tag{1.2}$$

其中 $I_2\in R^{2\times 2}$ 为二阶的单位矩阵.

如果 $|I_2+E_1|=0$, 则该系统即为退化时滞系统.

由此可见，既含有时滞又具有退化性的系统的确是普遍存在的. 很有必要对其进行深入讨论. 但是对这类系统的研究，由于其难度较大，到目前为止尚不多见. 其基本理论、稳定性、控制理论和应用，需要一系列的系统的研究. 这也将成为具有十分重要的理论价值和实用价值的研究领域.

§0.2　本书所做的工作

本书就是基于上节所述的思想，对时滞微分系统和退化时滞微分系统的基本理论、稳定性、能控性和最优控制等理论问题及其应用作深入研究，并给出一些重要结论．全书共分六章．

第一章给出本书所必需的预备知识，讨论奇异矩阵束，正则矩阵和广义逆阵的基本知识．

第二章首先对时滞系统进行分类，给出广义时滞微分系统、退化滞后微分系统、退化中立型微分系统等等概念．随后给出退化时滞微分系统的形式及其等价形式，讨论其可解性，得到了其可解的判别条件．最后，我们就退化滞后微分控制系统的输出反馈正常化问题，给出充分必要条件．

第三章讨论了退化滞后线性微分系统的解的指数估计和退化线性系统解的表示问题．第一节就退化滞后微分系统，给出了其解的指数估计式．在第二节中，对退化滞后线性微分系统进行讨论，得到解的表示．然后，就退化中立型微分系统进行分解，用迭加原理得到其常数变易公式和通解．最后，还就退化时滞差分系统进行讨论，给出其通解．

第四章主要给出关于退化时滞微分系统的稳定性和周期解问题的结果．第一节介绍时滞微分系统稳定性的V－泛函方法．第二节、第三节分别给出二维和三维退化时滞微分系统的全时滞稳定的代数判据．第四节就退化时滞微分系统的周期解的存在问题进行讨论，特别是讨论了二维退化滞后微分系统的周期解存在问题，给出相应结果．

第五章研究了时滞系统的能控性问题. 共分五节讨论. 其中, 第一节讨论退化时滞控制系统的能控性, 得到一些充要条件. 第二节讨论滞后控制系统的能控性与终点时刻间的相关性, 给出一系列能控性的新概念和有效判据. 第三节讨论线性滞后系统的输出能控性, 给出完全输出能控性、输出能控集等概念, 得到其完全输出能控的充要条件. 第四节讨论中立型线性控制系统的能控性问题, 得到一些能控的充要条件. 第五节讨论非线性中立型控制系统函数能控性, 用全新的概念和方法, 得到一些重要结果.

第六章有四节, 分别讨论了时滞系统的一般化最优控制、状态右端受限的滞后控制系统的最优控制、中立型线性控制系统的最优控制和时滞现金管理系统的最优控制, 并得到一些结果. 这些理论和应用均创造性地拓广了最优控制理论和应用.

在本书的写作过程中, 得到了王志成教授和郑祖庥教授的无微不至的关怀和悉心指导. 他们严谨的治学态度, 渊博的学术知识和无私的奉献精神给我留下了深刻的印象, 他们高瞻远瞩, 见解精辟, 正是在他们的指导和帮助下, 本书才得以顺利完成.

真诚地感谢湖南大学应用数学系的钱祥征教授、庾建设教授和黄立宏教授, 他们一直关心着本书的进展, 并在个方面给予了很大的帮助.

特别感谢张康培教授, 他在本书的写作过程中, 给予了很多的指导和帮助.

此书的大部分内容曾在王志成教授指导下的应用数学讨论班和郑祖庥教授指导下的泛函微分方程讨论班中讨论过, 受益匪浅. 在此对讨论班的各位师长, 各位同仁和各位师兄弟的有益讨论和帮助表示由衷的感谢.

也感谢湖南大学应用数学系的领导和各位老师所给予的亲切关怀和帮助.

我还要感谢安徽大学各级领导和同事对我的支持和关心.

最后，我还要对我的家人多年来给予我的真诚的支持和无私的奉献，表示深深的谢意.

此外，由于书稿仓促付印，不妥之处在所难免，敬祈读者批评指正.

第一章 预备知识

本章我们给出本书所必需的预备知识, 在第一节中我们讨论奇异矩阵束的概念, 第二节我们来讨论正则矩阵, 第三节给出广义逆阵的基本知识.

§1.1 异矩阵束

本节我们给出异矩阵束的基本概念和相应的基本知识.

定义 1.1 对于阶数同为 $m \times n$ 的两个矩阵 A,B 和纯数变量 λ, 称 $A + \lambda B$ 为矩阵束.

一般地, 我们将所有的矩阵束分成正则矩阵束和异矩阵束两类.

定义 1.2 如果 A,B 同为 n 阶方阵, 且行列式 $|A + \lambda B|$ 不衡等于零, 则称矩阵束 $A + \lambda B$ 为正则矩阵束. 称矩阵对 (A, B) 为正则的矩阵对.

定义 1.3 对于阶数同为 $m \times n$ 的两个矩阵 A, B, 如果 $m \neq n$, 或者 $m = n$ 且行列式 $|A + \lambda B|$ 衡等于零, 则称矩阵束 $A + \lambda B$ 为异矩阵束.

定义 1.4　对于阶数同为 $m\times n$ 的两个矩阵束 $A+\lambda B$ 和 $A_1+\lambda B_1$. 如果存在两个阶数分别为 m 和 n 的非奇异矩阵 P 和 Q, 使得

$$P(A+\lambda B)Q = A_1+\lambda B_1.$$

则称矩阵束 $A+\lambda B$ 与矩阵束 $A_1+\lambda B_1$ 为严格相抵的.

对于阶数为 $m\times n$ 的异矩阵束 $A+\lambda B$, 设其秩为 r, 则或者 $r<n$, 或者 $r<m$. 不妨设 $r<n$. 则 $A+\lambda B$ 的列是线性相关的, 则方程

$$(A+\lambda B)x = 0 \tag{1.1}$$

有非零解 x.

由于 (1.1) 的系数是 λ 的一次式, 其基本的线性无关解 x 常可这样选取, 使得它的元素都是 λ 的多项式. 我们只考虑这样一些解 $x(\lambda)$, 它是 λ 的多项式, 且在这些解中, 取最小次数 i 的解

$$\begin{gathered} x(\lambda) \quad = x_0-\lambda x_1+\lambda^2 x_2-\cdots+(-1)\lambda^i x_i \\ (x_i\neq 0) \end{gathered} \tag{1.2}$$

将其代入 (1.1), 并比较 λ 的系数得

$$\begin{cases} Ax_0 = 0, \\ Bx_0 - Ax_1 = 0, \\ Bx_1 - Ax_2 = 0, \\ \quad \cdots\cdots \\ Bx_{i-1} - Ax_i = 0, \\ Bx_i = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

则 (1.3) 关于 $x_0, -x_1, +x_2, \cdots, (-1)^i x_i$ 的系数矩阵

$$M_i = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B & A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B & A & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B & A \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B \end{pmatrix} \in R^{(i+2)m\times(i+1)n}$$

的秩 $r_i < (i+1)n$.

由于 i 是最小的，故矩阵

$$M_0 = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \quad M_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ B & A \\ 0 & B \end{pmatrix}, \cdots,$$

$$M_{i-1} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ B & A & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & B & A & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B & A \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & B \end{pmatrix} \in R^{(i+1)m\times in}$$

的秩 $r_0 = n, r_1 = 2n, \cdots, r_{i-1} = in$.

这样， i 是在式 $r_k \leq (k+1)n$ 中使 $<$ 成立的最小的指标.

定理 1.1 如果 (1.1) 有最小次数 i 的解，且有 $i > 0$, 则矩阵束 $A + \lambda B$ 与矩阵束

$$\begin{pmatrix} L_i & 0 \\ 0 & \hat{A} + \lambda\hat{B} \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

严格相抵. 其中

$$L_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \end{pmatrix}_{i\times(i+1)},$$

而 $\hat{A}+\lambda\hat{B}$ 是这样的矩阵束, 类似 (1.1) 的方程对于它没有次数小于 i 的解.

该定理的证明可分三步进行:

第一步证明矩阵束 $\hat{A}+\lambda\hat{B}$ 与

$$\begin{pmatrix} L_i & 0 \\ D+\lambda F & \hat{A}+\lambda\hat{B} \end{pmatrix}$$

严格相抵, 其中 $D, F, \hat{A}, \hat{B}$ 为适当阶的矩阵.

第二步证明方程

$$(\hat{A}+\lambda\hat{B})\hat{x}=0$$

不能有次数 $<i$ 的解 $\hat{x}(\lambda)$.

第三步证明上面的矩阵可以化为 (1.4).

详细证明请参见 [5], 由于篇幅所限，这里从略.

下面我们讨论异矩阵束的标准式.

定理 1.2　对于阶数为 $m\times n$ 的异矩阵束 $A+\lambda B$, 若在其行之间和其列之间, 都没有常系数的线性相关性, 则矩阵束 $A+\lambda B$ 与

矩阵束

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1}(\lambda) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & L_{\varepsilon_p}(\lambda) & & & & \\ & & & L'_{\eta_1}(\lambda) & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & L'_{\eta_q}(\lambda) & \\ & & & & & & A_0+\lambda B_0 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

严格相抵. 其中

$$L_i = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \end{pmatrix}_{i\times(i+1)},$$

而矩阵束 $A_0+\lambda B_0$ 是正则的.

证明: 如果异矩阵束 $A+\lambda B$ 的列线性相关, 且方程 $(A+\lambda B)x=0$ 有次数小于 ε_1 的非零解, 由假定知 $\varepsilon_1>0$, 再由定理 1.1 可得, 该矩阵束与矩阵束

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & A_1+\lambda B_1 \end{pmatrix}$$

严格相抵. 其中方程 $(A_1+\lambda B_1)x^{(1)}=0$ 没有次数小于 ε_1 的解 $x^{(1)}$.

如果方程 $(A_1+\lambda B_1)x^{(1)}=0$ 有次数小于 ε_2 的非零解 (必有 $\varepsilon_1\le\varepsilon_2$), 由定理 1.1 可得, 异矩阵束 $A+\lambda B$ 与矩阵束

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1} & 0 & 0 \\ 0 & L_{\varepsilon_2} & 0 \\ 0 & 0 & A_2+\lambda B_2 \end{pmatrix}$$

严格相抵. 其中方程 $(A_2+\lambda B_2)x^{(2)}=0$ 没有次数小于 ε_2 的解 $x^{(2)}$.

如此继续下去, 我们可将异矩阵束 $A+\lambda B$ 化为

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1}(\lambda) & & & & \\ & L_{\varepsilon_2}(\lambda) & & & \\ & & \cdots & & \\ & & & L_{\varepsilon_p}(\lambda) & \\ & & & & A_p+\lambda B_p \end{pmatrix} \tag{1.6}$$

其中 $0<\varepsilon_1\le\varepsilon_2\le\cdots\le\varepsilon_p$, 且方程 $(A_p+\lambda B_p)x^{(1)}=0$ 有次非零解.

如果异矩阵束 $A+\lambda B$ 的行线性相关, 则矩阵束 $A_p+\lambda B_p$ 的转置矩阵束 $A_p'+\lambda B_p'$ 的列线性相关, 由上可将其化为 (1.6) 的形式. 即存在 $0<\eta_1\le\eta_2\le\cdots\le\eta_q$ 使 $A+\lambda B$ 化为

$$\begin{pmatrix} L_{\varepsilon_1}(\lambda) & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & L_{\varepsilon_p}(\lambda) & & & & \\ & & & L'_{\eta_1}(\lambda) & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & L'_{\eta_q}(\lambda) & \\ & & & & & & A_0+\lambda B_0 \end{pmatrix}$$