中学数学丛书

中学数学中的整数问题

天津市数学会编

天津科学技术出版社

中学数学丛书

中学数学中的整数问题

王 连 笑

天津市数学会编

天津科学技术出版社

中学数学丛书
中学数学中的整数问题
王 连 笑
*
天津科学技术出版社出版
天津市赤峰道124号
天津新华印刷一厂印刷
天津市新华书店发行
*
开本 787×1092毫米 1/32 印张 6.25 字数 130,000
一九八三年四月第一版
一九八三年四月第一次印刷
印数：1—72.000
书号：13212·53 定价：0.54元

编 者 的 话

“中学数学丛书”是献给中学生和自学青年的礼物，希望它们成为中学数学爱好者的良师益友。

编写本丛书的目的在于帮助读者学好数学基础知识、提高运算能力、思维能力和空间想象能力以及扩大数学知识领域。在编写过程中，力求把中学不同年级、不同阶段学过的代数、几何、三角、解析几何等方面的知识纵横联系，融会贯通，并对中学数学中某些问题或者某种数学解题方法进行专题介绍，从而使读者在阅读这些小册子之后，能够比较系统、深入地掌握一些规律，学会一些方法，提高数学水平。

我们希望数学工作者、大中学数学教师和广大读者对这套丛书提出宝贵意见。

天津市数学会

一九八二年十月

目　录

一、整数……………………………………………（1）
二、整除……………………………………………（3）
三、带余除法………………………………………（13）
四、质数……………………………………………（21）
五、质因数分解定理………………………………（34）
六、公约数和公倍数………………………………（40）
七、互质数…………………………………………（54）
八、整值多项式……………………………………（65）
九、奇数和偶数……………………………………（79）
十、完全平方数……………………………………（90）
十一、数的整除性特征……………………………（105）
十二、一些不定方程的解…………………………（117）
十三、数谜…………………………………………（129）
十四、整数 n 次幂的个位数……………………（140）
十五、函数〔x〕…………………………………（145）
〔附〕　练习题提示或答案………………………（158）

一、整　　数

人们一个一个地数东西所产生的数：

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$$

就叫做自然数，也叫做正整数。自然数是人类认识的最早的数。

关于自然数，已经知道了哪些规律呢？

1. 1是最小的自然数，即1是自然数集合里的最小自然数；

2. 只要说出一个自然数a（例如1981），就能知道紧接着它的自然数a'（例如1982），因此自然数集合有无穷多个元素；

3. 两个自然数的和仍然是自然数，两个自然数的积也是自然数，即在自然数集合里能够进行加法运算和乘法运算；

4. 两个自然数的差（如果考虑它们的顺序）不一定是自然数，两个自然数的商也不一定是自然数。

到了中学阶段，学习了负数，懂得了负整数，即

$$-1,\ -2,\ -3,\ \cdots,\ -n,\ \cdots$$

这样，全体正整数、全体负整数和零就构成了整数集合。

关于整数集合有哪些规律呢？

1. 整数集合里没有最小数；

2. 整数集合有无穷多个元素；

3.两个整数的和、差、积仍然是整数，即在整数集合里能够进行加法运算、减法运算和乘法运算；

4.两个整数的商不一定是整数，即两个整数相除时（除数不等于零）有时是整数，有时不是整数，因此，在整数集合里不能进行除法运算.

这就是说，两个整数相除的情况比它们之间加法、减法和乘法的运算要复杂一些，正因为比较复杂一些，所以要研究的问题也就更多一些。因此，许多与整数有关的数学问题都是与整数的除法有关的。我们所研究的整数问题也是围绕着整数的整除性这样一个中心展开的.

由于我们主要研究整数问题，所以本书中的字母如果没有特别声明，就表示十进制的整数，并且对每个整数的各位数码如3248中的 3， 2， 4， 8 叫做这个整数的各位数字，因而一个整数的各位数字是小于10的非负整数.

二、整　除

任意两个整数做除法运算（除数不等于零），它们的商有时是整数，有时不是整数，例如

$$24 \div 6 = 4,\ 23 \div 6 = \frac{23}{6}.$$

我们首先要研究两个整数相除时得到的商是整数的情形．

定义　如果对于某个整数 a 和一个不等于零的整数 b，可以找到一个整数 q，使得等式

$$a = bq$$

成立，那么 a 叫做 b 的倍数，b 叫做 a 的约数（也叫因数）．若 $b \neq \pm 1$，则 b 叫做 a 的真约数．

a 是 b 的倍数也称做 a 能被 b 整除，或者 b 能整除 a，记作

$$b \mid a.$$

应该注意，在这个定义中，只规定了 a 是整数，b 是非零整数，q 是整数，因此，a 和 q 可以是正整数，也可以是零或负整数，而 b 可以是正整数，也可以是负整数．例如

$$1981 = 7 \times 283,\quad -493 = 17 \times (-29).$$

1981是 7 的倍数，也是283的倍数，或者说 7 和283是1981的约数，也可记作$7 \mid 1981$，$283 \mid 1981$；

-493是17的倍数，也是-29的倍数，或者说17和-29

是-493的约数，也可记作$17|(-493)$，$-29|(-493)$。

关于约数和倍数有如下几个简单的定理：

定理1　0是任何整数的倍数；± 1是任何整数的约数；一个整数既是它本身的约数，也是它本身的倍数。

证明　由$0=a\times 0$，$a=1\cdot a$，$a=(-1)\cdot(-a)$及约数和倍数的定义，即可得到定理1．

从定理1我们可以知道，一个非零整数至少有三个倍数，一个是0，一个是它本身，一个是它的相反数；任意不等于1的整数a至少有四个约数，即± 1和$\pm a$，而1只有± 1两个约数．

定理2　若b是a（$a\neq 0$）的约数，那么b的绝对值不会超过a的绝对值，即

$$1\leqslant |b|\leqslant |a|.$$

证明　若b是a的约数，则必有一整数q，使得

$$a=bq.$$

对这个等式两边取绝对值就有

$$|a|=|b|\cdot|q|.$$

显然$|q|\geqslant 1$，于是

$$|a|=|b|\cdot|q|\geqslant |b|.$$

从定理2可以知道，一个非零整数的约数只能有有限个，例如24的约数只有± 1，± 2，± 3，± 4，± 6，± 8，± 12，± 24共16个约数，而一个整数的倍数却有无限多个，如24的倍数就有0，± 24，$\pm 2\times 24$，$\pm 3\times 24$，$\pm 4\times 24$，……。

由于一个命题成立，它的逆否命题也必然成立，因此定理2的逆否命题也成立，即有下面的定理：

若 b 是 a 的约数，且$|b|>|a|$，则必有 $a=0$。

从定理 2 还可得到这样的结论：

若 b 是 a 的约数，a 是 b 的约数，则必有$|a|=|b|$。

定理 3　若 c 是 b 的约数，b 是 a 的约数，则 c 也是 a 的约数.即

若$c|b$，$b|a$，则有$c|a$。

证明　由$c|b$，$b|a$可得

$$b=cq_1,$$

$$a=bq_2,$$

于是有

$$a=q_2b=cq_1q_2.$$

所以$c|a$。

定理 4　若 b 是 a 的约数，且 $c\neq 0$，则bc是ac的约数.即

若$b|a$，则有$bc|ac$（$c\neq 0$）。

证明　由$b|a$可得

$$a=bq,$$

由 $c\neq 0$ 可得

$$ac=bcq,$$

于是$bc|ac$。

定理 5　若 c 是 a 的约数，c 也是 b 的约数，则 c 是 $ma+nb$的约数.即

若$c|a$，$c|b$，则有$c|ma+nb$。

证明　由$c|a$，$c|b$，则

$$a=cq_1,\quad b=cq_2.$$

则

$$ma+nb=c(mq_1+nq_2).$$

于是

$$c|ma+nb.$$

但是，我们要注意，这个定理的逆命题并不成立，如两个数的和是 c 的倍数，这两个数并不一定是 c 的倍数．如 $17+5=22$ 是11的倍数，但17和5都不是11的倍数．

定理 6　若 $a+b=c+d$，且 a，b，c 是 e 的倍数，则 d 也是 e 的倍数．即

若 $a+b=c+d$，且 $e|a$，$e|b$，$e|c$，则有 $e|d$．

证明　由 $e|a$，$e|b$，$e|c$ 可得

$$a=eq_1,$$

$$b=eq_2,$$

$$c=eq_3.$$

可得

$$d=a+b-c=e(q_1+q_2-q_3)$$

于是 $e|d$．

一般地，若 $a_1+a_2+\cdots+a_m=b_1+b_2+\cdots+b_n$ 成立，且其中有 $m+n-1$ 个数是 e 的倍数，那么剩下的一个数也是 e 的倍数．

下面举几个例题．

【例 1】求证：若 $ab+cd$ 能被 $a-c$ 整除，则 $ad+bc$ 也能被 $a-c$ 整除．

证明　$\because$

$$\begin{aligned}&(ab+cd)-(ad+bc)\\=&ab-bc+cd-ad\\=&b(a-c)-d(a-c).\end{aligned}$$

在上面等式中，$ab+cd$，$b(a-c)$，$d(a-c)$ 都能被 $a-c$ 整除，由定理 6 可知 $ad+bc$ 也能被 $a-c$ 整除．

【例 2】如果对所有整数 m 和 n，都能找到整数 x 和 y，使得

$$ax+by=m,\quad cx+dy=n,$$

那么，一定有$ad-bc=\pm 1$.

证明　因为等式

$$ax+by=m,\ cx+dy=n$$

对所有整数m、n都成立，于是，我们可以取特殊值例如$m=1$，$n=0$来研究使x，y必须为整数的条件. 为此，我们解关于x，y的二元一次方程组

$$\begin{cases} ax+by=1, \\ cx+dy=0, \end{cases}$$

解得

$$x_1=\frac{d}{ad-bc},$$

$$y_1=\frac{-c}{ad-bc}.$$

再设$m=0$，$n=1$，解方程组

$$\begin{cases} ax+by=0, \\ cx+dy=1, \end{cases}$$

解得

$$x_2=\frac{-b}{ad-bc},$$

$$y_2=\frac{a}{ad-bc}.$$

我们考查等式

$$x_1y_2-x_2y_1=\frac{ad-bc}{(ad-bc)^2}.$$

若$ad-bc\neq 0$，则有

$$x_1y_2-x_2y_1=\frac{1}{ad-bc}.$$

然而，为保证x_1、y_1、x_2、y_2是整数，必须使$ad-bc$是1的约数. 由定理1可知

$$ad-bc=\pm 1。$$

若$ad-bc=0$，

由
$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$$
以及方程组
$$\begin{cases} ax+by=m \\ cx+dy=n \end{cases}$$
有解，必须满足
$$\frac{a}{c}=\frac{b}{d}=\frac{m}{n},$$
然而这与m，n是任意整数相矛盾，所以不可能有$ad-bc=0$。

于是只有$ad-bc=\pm 1$．

【例 3】试求大于 1 的三个整数，使其中任意两个的积与 1 的和能被另一个整除．

解 设所求的三个整数为x、y、z

显然$x\neq y\neq z$，不妨设$1<x<y<z$．

依题意，有自然数m,n,p,使得
$$xy+1=mz, \tag{1}$$
$$yz+1=nx, \tag{2}$$
$$zx+1=py. \tag{3}$$
（1）×（3）得
$$\begin{aligned} mpyz&=(xy+1)\cdot(zx+1) \\ &=(x^2yz+xy+xz+1), \end{aligned}$$
即
$$(mp-x^2)yz=xy+xz+1. \tag{4}$$
$$\because \quad 1<x<y<z,$$

$$\therefore \quad xy<yz,$$

$$xy+1\leqslant yz,$$

$$xz<yz.$$

则 $$xy+xz+1<2yz.$$

由(4)式可得 $$(mp-x^2)yz<2yz.$$

于是 $$mp-x^2<2.$$

又由(4)式及x、y、z皆为正数，可知

$$mp-x^2>0,$$

则有 $$0<mp-x^2<2.$$

而 $mp-x^2$ 是整数，

于是 $$mp-x^2=1,$$

则(4)式可化简为

$$yz=xy+xz+1. \tag{5}$$

将(5)式代入(2)式得

$$xy+xz+1+1=nx,$$

即 $$xy+xz+2=nx,$$

于是由定理6，x是2的约数，又因为$x>1$，

则 $$x=2.$$

将$x=2$代入(1)得

$$2y+1=mz.$$

由$z>y$，则

$$z\geqslant y+1,$$

于是 $$2z\geqslant 2y+2>2y+1.$$

即 $$2z>mz.$$

因为m是自然数，

所以 $$m=1,$$

即 $$z=2y+1. \tag{6}$$

将$x=2$及(6)代入(5)得

$$y(2y+1)=2y+2(2y+1)+1,$$

$$2y^2+y=2y+4y+3,$$

$$2y^2-5y-3=0,$$

$$(2y+1)(y-3)=0.$$

又 $$\because \quad y>1,$$

$$\therefore \quad 2y+1\neq 0.$$

于是 $$y=3.$$

将$y=3$代入(6)可得

$$z=2\times 3+1=7.$$

于是所求三数为2、3、7.

【例4】已知12,14,37,65是方程

$$xy-xz+yt=2\times 7\times 13$$

的解，试确定每个数各是方程中的哪个未知数.

对于这个题目，如果我们采取使x，y，z，t分别等于12，14，37，65一一进行试验的方法，那就要进行24次运算，才能知道x，y，z，t的数值（学过排列组合的同学能够知道，x，y，z，t的全排列是$p_4^4=24$，因此要进行24次试验），然而，利用整除的性质，我们可以分析出这个方程的解.

解 由于2，7，13只有1和本身做为正约数，所以方程左边的分解式是唯一的，我们考查

$$y(x+t)-xz=2\times 7\times 13,$$

显然$y\neq 14$.若$y=14$，则由定理6可知x或z应有约数7，但是12，37，65中都没有约数7.

同时 $y \neq 65$。若 $y = 65$，则 x，z 应有约数13；但是，12，14，37中没有约数13。

同理，由等式

$$x(y-z)+yt=2\times7\times13$$

可知 $x\neq14$，$x\neq65$。

这样，x、y只能分别等于12和37，于是

$$xy=12\times37=444.$$

原方程可化为

$$444-xz+yt=2\times7\times13=182,$$

$$xz-yt=262.$$

由于 x，y 中有一个为偶数，则由262是偶数可知，xz 及 yt 都是偶数，于是由 x、y 分别为12和37及 z、t 分别为14和65以及 xz、yt 都是偶数可知，x,z,y,t 应该分别为

$$12\times65 \quad 和 \quad 14\times37.$$

又由于 $12\times65>14\times37$ 以及 $xz-yt=262>0$

可知 $xz>yt$，

于是 $xz=12\times65$，

$yt=14\times37$。

所以 $x=12$，$y=37$，$z=65$，$t=14$。

练　习　一

1. a取哪些整数时，方程

$$(a-1)x^2-(a^2-3)x+a^2+a=0$$

的根都是整数。

2. 已知整系数多项式

$$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,$$

且存在四个不同的整数a，b，c，d，使得.

$$f(a)=f(b)=f(c)=f(d)=5.$$

求证：不存在整数k，使得

$$f(k)=8.$$

3.已知a，b，c，d为互不相等的整数，且方程

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)-9=0$$

有整数根，

求证：$a+b+c+d$一定是4的倍数.

4.现有零件若干盒，每盒有零件100个，一个小组在制造某种机器时，需要这种零件，第一天，第二天均不需要，第三天需要3个，第四天需要4个，…，第n天需要n个，若知此小组工作了40天以上，并且恰好用了m盒零件，且$5\leqslant m<10$，问此小组一共工作了多少天？用了多少盒此种零件？