高中数学复习资料

吉林省教育学院编

吉林人民出版社

高中数学复习资料

吉林省教育学院编

*

吉林人民出版社出版

吉林省新华书店发行

长春新华印刷厂印刷

*

787×1092毫米32开本　16½印张

1979年2月第1版　1979年2月第1次印刷

书号：k7091·1038　定价：0.95元

说　　明

为适应加速实现四个现代化，早出人才，多出人才的需要，提高我省中学数学教学质量，我们编写了这本《中学数学复习资料》，供我省应届高中毕业生和社会知识青年系统复习之用，也可供教师在教学中参考。在使用中应按照1979年高考复习大纲的规定内容和要求进行必要的增删和补正。

使用本资料时，应把复习重点放在牢固地掌握基础知识，灵活运用基础知识，提高分析问题和解决问题能力方面。

本资料共分代数、三角、平面几何、立体几何、解析几何五个部分。全书除例题、练习题外，共选编了600余题，为便于自学，对较难的题给出了答案或提示。

参加本资料编写的有孙玉秀（长春市教育学院）、李天宝（长春市二道河子区教师进修学校）、方昌武（长春市宽城区教师进修学校）、魏树铭（长春市二中）、于茂之（吉林市教育学院）、贾万里（吉林市一中）、田异（吉林市三十中）、杨树标（四平地区教育学院）、邓鹤年(四平师范学院）、王承忠（四平师范）、呼贵荣（四平一中）姜维铮（四平四中)、吉林省教育学院的玄世纯、孙涤寰、李浩明、郭鹏飞、张宝昌、于永象同志。

此外还有一些同志对本资料的编写工作给予支持，在此一并深致谢意。

由于时间仓促，水平有限，本资料一定存在许多缺点错误，请读者批评指正。

吉林省教育学院

一九七八年十月

目　　录

代　　数

数的概念

1.1 数的系统

- 复数 $a+bi$
  - 实数 $(b=0)$
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数（自然数）
        - 零
        - 负整数
      - 分数
        - 正分数
        - 负分数
    - 无理数（无限不循环小数）
  - 虚数 $(b\neq 0)$

1.2 实数

1. 几个基本概念

（1） 偶数与奇数　凡能被 2 整除的正整数叫偶数；不能被 2 整除的正整数叫奇数．偶数常用 $2n$ 表示， 奇数常用 $2n+1$ 表示(其中 n 为正整数）．

注意：零是偶数；$-2, -4, -6\cdots$是负偶数；　$-1, -3, -5, \cdots$是负奇数．

（2） 约数与倍数　若a、b、r 都是正整数， 并且 $a=br$

时，则 b 叫做 a 的约数， a 叫做 b 的倍数. 约数有时也叫做因数。

（3） 质数与合数 仅有两个(1和它本身)约数(因数)的数叫质数（素数)；有两个以上的约数的数叫合数. 1既不是质数又不是合数。

（4） 公约数 若正整数 b 能同时整除正整数 a_1、a_2、a_3、…、$a_n(n\geqslant 2)$时，称 b 是 a_1、a_2、a_3、…、a_n 的公约数。公约数中最大的叫最大公约数.

（5） 公倍数 若正整数 a 能同时被正整数 b_1、b_2、b_3、…、$b_n(n\geqslant 2)$ 整除时， a 叫做 b_1、b_2、b_3、…、b_n 的公倍数. 公倍数中最小的叫最小公倍数。

（6） 相反数 在数轴上分别在原点两旁，离开原点的距离相等的两个点所表示的实数，叫做互为相反数. 零的相反数还是零。

（7） 倒数 1除以某数所得的商叫做某数的倒数. 零没有倒数。

（8） 绝对值 正数和零的绝对值是它的本身；负数的绝对值是它的相反数.

设 a 为实数，则其绝对值为

$$|a| = \begin{cases} a & (a>0), \\ 0 & (a=0), \\ -a & (a<0), \end{cases}$$

2. 几个运算性质

（1） 在自然数集合中，可施行加、乘两种运算；在整数集合中，可施行加、减、乘三种运算；在有理数集合中，可施行加、减、乘、除（除数不为零）四种运算；在实数集合内，除了可施行加、减、乘、除、(除数不为零）运算外，

还可施行正数的开方运算。

（2） 实数集合满足下面运算定律：

加法交换律：$a+b=b+a$；

加法结合律：$a+(b+c)=(a+b)+c$；

乘法交换律：$a\cdot b=b\cdot a$；

乘法结合律：$a(bc)=(ab)c$；

乘法对加法分配律：$(a+b)m=am+bm$。

（3） 实数的运算顺序

实数有六种运算：加、减、乘、除、乘方和开方。加、减为一级运算；乘、除为二级运算；乘方、开方为三级运算。在某一运算过程中，若有六种运算时先进行三级运算，最后进行一级运算。对于同一级的运算，要从左向右进行。一个式子中，若有三种括号时，应当按着（ ）、〔 〕、{ }的次序依次进行。

练 习

1．零是自然数么？是整数么？是偶数么？是有理数么？是实数么？是复数么？

2．能被2、4、3、5等数所整除的正整数，各有什么特征？

3．3个数是两两互质的，它们的最小公倍数是什么数？3个数中的一个数，能被其余的两个正整数整除时，它们的最小公倍数是什么数？

4．无限小数都是无理数么？下列数中，哪些是无理数？

$\sqrt{81}$，$\dfrac{1-\sqrt{2}}{3}$，3.1415926，lg5，1.414…，π。

5．x为何值时，$\dfrac{|x|}{x}$是1，是−1，是无意义？

6，下列各式，当a是什么数时成立？为什么？

$|a| = a$；$|a| = -a$；$|a| = |-a|$；$a = -a$；

$|a^3| = a^3$；$|a^4| = -a^4$。

1.3 实数问题举例

例1 计算$(-3)^2-(-1\frac{1}{2})^3\times\frac{2}{9}\div 6\div|-\frac{2}{3}|$。

解 原式$= 9-(-\frac{3}{2})^3\times\frac{2}{9}\div 6\div\frac{2}{3}$

$$= 9-(\frac{-27}{88})\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}$$

$$= 9+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}$$

$$= 9\frac{3}{16}.$$

例2 证明当n为整数时，n^3+3n^2+2n所表示的数，必能被3整除。

证明 ∵ $n^3+3n^2+2n = n(n^2+3n+2)$

$$= n(n+1)(n+2)$$

∵ n是整数，n、$n+1$、$n+2$是三个连续整数，所以它们的连乘积$n(n+1)(n+2)$必能被3整除。（任意三个连续整数中，必有一数是3的倍数）．

例3 证明形如a^4+4的数必是一个合数。（$a\neq\pm 1$的整数）．

证明 $a^4+4 = a^4+4a^2+4-4a^2$

$$= (a^2+2)^2-(2a)^2$$

$$= (a^2+2+2a)(a^2+2-2a).$$

∵ $a\neq\pm 1$ ∴ a^2+2+2a和a^2+2-2a都是不

等于1的整数。即 a^4+4 能化成两个不等于1的整数的积，

∴ a^4+4 是一个合数。

例4 求证：若一个正整数的各位数字之和能被3数除时，则此数必能被3整数。

证明 设这正数是一个四位数，它可写成

$1000a+100b+10c+d$ a、b、c 表示0，1，2，…9的数字，（但 $a\neq o$）。

$=999a+99b+9c+(a+b+c+d)$

$999a+99b+9c$ 能被3整除，若 $(a+b+c+d)$ 也能被3整除时，则此四位数就一定能被3整除。

对于任一正整数都可以用类似方法证明之。

例5 证明 $\sqrt{2}$ 是无理数。

证明 假设 $\sqrt{2}$ 不是无理数，而是有理数时，可用 $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$（m、n 互质，即 $\frac{m}{n}$ 是既约分数）表示。

∴ $2=\frac{m^2}{n^2}$， 即 $m^2=2n^2$。

∴ m^2 是偶数，则 m 也一定是偶数。

令 $m=2k$（k 是正整数），将它代入上式

$(2k)^2=2n^2$ 中，

整理得 $n^2=2k^2$。

∴ n 也是偶数。

∴ m、n 都是偶数，有公约数2。这与 m、n 互质相矛盾。

∴ $\sqrt{2}$ 是有理数不合理，$\sqrt{2}$ 必是无理数。

例6 已知 $5|x-y|+(2y+1)^2=0$，求实数 x、y 的值。

解 $\because |x-y|\geqslant 0$，$(2y+1)^2\geqslant 0$.

当两个非负数之和为零时，此二数必同时为零。

$$\therefore \begin{cases} x-y=0 \\ 2y+1=0 \end{cases}$$

解之，得 $x=-\frac{1}{2}$，$y=-\frac{1}{2}$.

例7 当$a<-5$时，化简$|6-a|-|2a+1|+\sqrt{a^2+10a+25}$。

解 $\because$ $a<-5$， $\therefore$ $6-a>0$， $2a+1<0$， $a+5<0$.

$$\begin{aligned}\therefore \text{原式} &=(6-a)-[-(2a+1)]+\sqrt{(a+5)^2} \\ &=6-a+2a+1-(a+5) \\ &=6-a+2a+1-a-5=2.\end{aligned}$$

1.4 复数

1 几个基本概念

（1） 复数的定义 a、b为实数时。$a+bi$形的数叫做复数. a叫做复数的实部，bi叫做复数的虚部，b叫做虚部的系数.$i=\sqrt{-1}$，是虚数单位.

当$b=0$时，$a+bi$是实数；当$b\neq 0$时，$a+bi$是虚数；当$a=0$，$b\neq 0$时，$a+bi$是纯虚数。

（2） 复数相等的定义 在$a+bi$、$c+di$中，当且仅当实数$a=c$，$b=d$时，规定复数$a+bi$与$c+di$是相等的，即$a+bi=c+di$。

（3） 共轭复数的定义 $a+bi$和$a-bi$是共轭复数，即两个复数的实部相等，虚部的系数是相反的数时，两个复

数叫共轭复数。

（4） 复数绝对值的定义 a、b 是实数时，规定 $r=\sqrt{a^2+b^2}$ 叫做复数 $a+bi$ 的绝对值。

复数绝对值也叫复数的模数。复数绝对值用下面符号表示之：

$$|a+bi|=r.$$

2. 几个基本性质

（1） 无顺序性 任意两个复数之间，没有大小的规定，因而不能比较大小。但是对于任意两个实数，则可以比较它们的大小。

（2） 复数能和复数平面上的点建立一一对应关系，而不能和数轴上的点建立一一对应关系。

但是实数却能和数轴上的点建立一一对应关系。

（3） 在复数集合中，永远可施行加、减、乘、除、乘方和开方六种运算（除法时，除数不能为零）。

（4） 在复数集合中，加法和乘法的交换律、结合律，以及乘法对加法的分配律，都成立。

（5） 虚数单位 i 的性质

$$i^{4n}=1,\quad i^{4n+1}=i,\quad i^{4n+2}=-1,\quad i^{4n+3}=-i.$$

其中，n 为整数。

3. 复数的四则运算

（1） 复数的加、减、乘、除运算

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i,$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i,$$

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i\quad(c\neq o,d\neq o).$$

（2） 复数三角式

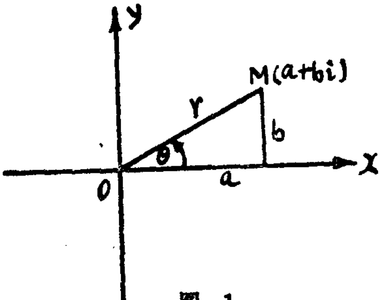

图 1

x 轴的正方向 ox 和向量OM 所夹的角 θ，叫做复数 $a+bi$ 的幅角。适合于$o\leqslant\theta<2\pi$的幅角 θ，叫做幅角的主值。

复数 $a+bi$ 的幅角可由下式确定：

$$\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{r}\\ \sin\theta=\dfrac{b}{r}\end{cases}\quad 其中\quad r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

θ 角的主值所在的象限，就是点 M 所在的象限。

复数的三角式为

$$a+bi=r(\cos\theta+i\sin\theta).$$

（3） 复数三角式的运算

复数三角式的乘、除、乘方、开方运算：

$$r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$$
$$=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)];$$

$$\frac{r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)];\ (r_2\neq0)$$

$[r(\cos\theta+i\sin\theta)]^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$；（棣美弗定理）

$$\sqrt[n]{r(\cos\theta+i\sin\theta)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}\right.$$

$$+ i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\Big)$$

$[k=0,1,2,\cdots,(n-1)]$ n为正整数。

例8　化$\sqrt{2}-\sqrt{2}i$为三角式。

解　$r=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{2})^2}=2$.

$\because\quad \operatorname{tg}\theta=\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=-1$，$\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

$\therefore$　θ 在第Ⅳ象限，

$\therefore$　$\theta=315°$.

$\therefore$　$\sqrt{2}-\sqrt{2}i=2(\cos315°+i\sin315°)$。

例9　计算　$8\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\div2\left(\cos\frac{\pi}{12}\right.$

$\left.+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

解　原式$=\frac{8}{2}\left[\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{12}\right)\right]$

$=4\left(\cos\frac{3}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi\right)$

$=4\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$=-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$。

例10　计算　$(\sqrt{3}+i)^{14}$

解　将$\sqrt{3}+i$化为三角角式、

$r=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$，

$\sin\theta=\frac{1}{2}$．$\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$．$\therefore$　θ主值是$\frac{\pi}{6}$。

$\therefore$　$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$$\therefore\quad (\sqrt{3}+i)^{14}=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^{14}$$

$$=2^{14}\left(\cos\frac{7}{3}\pi+i\sin\frac{7}{3}\pi\right)$$

$$=16384\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

例11　$\sqrt[3]{1-i}$

解　$\because\quad 1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$

$$\therefore\quad \sqrt[3]{1-i}=\sqrt[3]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi\right)}$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7}{4}\pi+2k\pi}{3}\right.$$

$$\left.+i\sin\frac{\frac{7}{4}\pi+2k\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt[6]{2}\left[\cos\left(\frac{7}{12}\pi+\frac{2}{3}k\pi\right)\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\frac{7}{12}\pi+\frac{2}{3}k\pi\right)\right]$$

$(k=0,1,2)$

$\therefore\quad \sqrt[3]{1-i}$有三个值：$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7}{12}\pi+i\sin\frac{7}{12}\pi\right)$；

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi\right);$$

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+i\sin\frac{23}{12}\pi\right).$$

例12　解方程 $x^6-243=0$

解 $\because\ x^5=243$

$\therefore\ x^5=243(\cos 0+i\sin 0)$

$$x=\sqrt[5]{243}\left(\cos\frac{0+2k\pi}{5}+i\sin\frac{0+2k\pi}{5}\right)$$

$$=3\left(\cos\frac{2\pi}{5}\cdot k+i\sin\frac{2}{5}\pi\cdot k\right)\cdot$$

$(k=0,1,2,3,4)$.

$x_1=3(\cos 0+i\sin 0)=3$;

$$x_2=3\left(\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi\right);$$

$$x_3=3\left(\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi\right);$$

$$x_4=3\left(\cos\frac{6}{5}\pi+i\sin\frac{6}{5}\pi\right);$$

$$x_5=3\left(\cos\frac{8}{5}\pi+i\sin\frac{8}{5}\pi\right).$$

例13 已知 $x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$, 求证: $x^m+\frac{1}{x^m}=2\cos m\theta$.

证明 $\because\ x+\frac{1}{x}=2\cos\theta$,

$\therefore\ x^2-2x\cos\theta+1=0$

$\therefore\ x=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-1}=\cos\theta\pm i\sin\theta$

$\therefore\ \frac{1}{x}=\cos\theta\mp i\sin\theta$

$$\therefore\ x^m+\frac{1}{x^m}=(\cos\theta\pm i\sin\theta)^m+(\cos\theta\mp i\sin\theta)^m$$

$$=(\cos m\theta\pm i\sin m\theta)$$

$$+(\cos m\theta \mp i\sin m\theta)$$
$$=2\cos m\theta.$$

练　　习

1．如何理解复数集合中，不能建立大小关系？

2．下列各式错误何在？

（1）$\because \quad \dfrac{1}{-1}=\dfrac{-1}{1} \quad \therefore \sqrt{\dfrac{1}{-1}}=\dfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{1}}$，

即$\dfrac{1}{\sqrt{-1}}=\dfrac{\sqrt{-1}}{1}$　即$\dfrac{1}{i}=\dfrac{i}{1}$　$\therefore \quad i^2=1$.

（2）$6=\sqrt{36}=\sqrt{(-4)(-9)}=\sqrt{-4}\sqrt{-9}$

$=2i\cdot 3i=6i^2=-6$.

3．设复数$\alpha=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

（1）分别说出α的相反复数及其共轭复数；

（2）试用几何表示法表示出α及其相反复数、共轭复数的位置；

（3）分别求出α及其相反复数、共轭复数的模数和幅角。

4．在实数集合内$x-1=0$与$x^3-1=0$同解否？在复数集合呢？为什么？

5．在有理集合内，实数集合内，复数集合内将x^4+x^2-6进行因式分解。

6．化简$\dfrac{(1+i)^5}{1-i}+\dfrac{(1-i)^5}{1+i}$.