

地质趋势面分析

张启锐 编著

609

R
2

科学出版社

地质趋势面分析

张启锐 编著

科学出版社

1990

内 容 简 介

趋势面分析是一种常用的数学地质方法，适于对平面和空间中分布的各种观测资料进行统计分析。本书系统地汇集了自50年代以来国内外有关学者对趋势面分析法各个侧面的研究成果。书中介绍了它的基本数学模型、各种实用模型以及分析中通常要遇到的各种问题的处理办法。内容丰富，简单适用。为了读者使用方便，书后还附有两个基本的计算程序。

本书可供地质学、地理学等专业的科研、生产人员及高等院校师生参考。

地 质 趋 势 面 分 析

张启锐 编著

责任编辑 李祺方 彭 斌

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100707

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

1990年10月第 一 版 开本：787×1092 1/16

1990年10月第一次印刷 印张：12 1/2

印数：001—850 字数：288 000

ISBN 7-03-001901-6/P·367

定价：11.70元

序 言

在各种数学地质方法中，趋势面分析可以说是应用得最早、最广泛、成效突出的一种。自70年代后半期以来，关于趋势面分析的文章与60年代相比少了许多，但无论是在国内还是在海外，它仍然在实际工作中受到地质工作者的欢迎而被广泛地使用着。如在我国1986年的《第三届全国数学地质学术会议论文集》中，文章题目中出现趋势面分析一词的就有13篇，文章内容涉及趋势面分析的就更多了。遗憾的是国内外至今还没有一本系统介绍趋势面分析的书，这对趋势面分析法在理论上和应用上的发展和提高都是很不利的。

趋势面分析法的数学原理尽管比较简单，但结合各式各样的问题，却产生了多种多样的改进。特别是人们自50年代以来，探讨趋势面分析法的性质，不断开发其功能，从不同角度做了大量工作，为人们深入了解其特性，完善其功能，提供了宝贵的经验。这方面代表性的工作有Miesch和Connor (1967, 1968), Hall (1973), Doveton和Parsley (1970), Norcliffe (1939), Wrigley (1977), Lee (1981), Unwin和Wrigley (1987), Balch和Thompson (1989), 张菊明和张启锐 (1988) 等。但这些很有意义的研究成果，没有能全面系统地归纳整理成书，仍分散在各种正式的或非正式的刊物中，不便于参考引用。这就促使笔者下决心编写一本关于趋势面分析的专著，希望能使广大读者全面系统地了解趋势面分析。为了能使读者看到趋势面分析的全貌，笔者尽可能忠实地把各种看法和成果原原本本地予以介绍。希望本书能为地质人员提供有益的参考，减少不必要的重复研究，启发思路，有利于开拓新的方向。

全书共分七章，分别简述如下：

第一章扼要地回顾了不同发展阶段的一些特点，讨论了趋势面分析与回归分析的关系，介绍了关于趋势面分析法的几种主要评价意见。

第二章介绍各种基本模型的原理、性质和基本应用，其中包括规则网点的和不规则点的多项式趋势面分析和三角多项式（调和）趋势面分析法，趋势分量概念，以及内插和外推性质。其中趋势分量是经常引起人们关注的有趣内容。

第三章的内容在一般的数学地质书中很少介绍。但笔者认为这些内容是对第二章基本模型的重要改进、补充与发展，与基本模型有着同样重要的意义，其中优化多项式趋势面模型就是个很吸引人的课题。此外，从应用角度提出的断层趋势面模型，典型趋势面与最优预报面成图法，概率面成图法等都是有特色的改进模型。

第四章包含了两个主要部分，第一部分是有关趋势面次数的选择，凡是做趋势面分析都不可避免地要遇到这个问题。这方面的方法很多，本章介绍了主要的几个。第二部分内容是趋势面的真实性及其判定方法。这部分内容国内文献较少见，也较少为人们所注意。在随机成分比例较大的数据（如化探数据，地层分析数据等）的趋势面分析中，就需要注意这个问题。因为对这些数据拟合趋势面后，所得的拟合百分数一般都很低（如<60%到不足10%），那么这些趋势面是否显著，或是否有地质意义，就要加以探明。

本章介绍了一些可供参考的判定方法。

第五章是讨论分析过程中经常要碰到的几个问题，并逐个地加以讨论，如边缘效应、数据点的分布、点力分析、方程的病态、曲面对比、定和数据以及计算中提高精度和速度的方法等。这些问题的正确处理，对保证分析质量，提高效率都是有益的。

第六章是关于趋势面分析的几个特殊应用，包括三维趋势面分析，有向数据的趋势面分析以及用趋势面求体积等。其中三维趋势面分析并不是新的技术，它的主要困难在于三维数据的获得和趋势面分析结果的显示。本章介绍了一些处理办法。此外，通过古流向资料求古地形趋势，通过趋势面分析法计算体积，也是日常地质工作中常见的问题。

第七章的广义趋势面分析，介绍了一些与趋势面分析有相似功能的其它方法。其中滑动平均、加权滑动平均、克里格法、空间滤波等，都是人们早已熟悉的。此外也有一些较新的方法，如滑动中值法。

本书较注重其实用性。书中除了较详细地介绍了一些数学原理之外，还用较大篇幅讨论了在各种条件下的一些具体做法，力求使读者看了之后能较方便地运用于自己的工作之中。读者若对趋势面分析法还不熟悉，可以先从书中的一些实例入手，了解其基本性质和特点，然后结合自己所研究的课题有选择地阅读。对此法已有所了解的读者更无必要逐章逐节地阅读，而可以结合自己的心得体会，参考有关章节。

由于笔者水平所限，缺点和错误在所难免，欢迎读者提出批评与修改意见。

本书的编写与出版得到了中国科学院地质研究所领导易善锋、黄家宽二位同志以及谢鸣谦同志的大力支持；孙惠文同志仔细地审阅了本书的全部手稿，笔者谨向他们致以衷心的感谢，此外还要感谢王津津同志清绘了全部图件。

最后应指出，本书引用的资料中，有些计量单位是英制的，为了保持原数据面貌，本书未作改动。这些计量单位与国际制单位的换算关系如：1英尺 = 0.3048米；1英里 = 1.6093千米。

张启锐

中国科学院地质研究所
北京，100029，634信箱
1989年5月4日

目 录

序言	(iii)
第一章 趋势面分析概论	(1)
1.1 引言	(1)
1.2 趋势面分析的三个发展阶段	(1)
1.3 趋势面分析与回归分析	(3)
1.4 广义趋势面分析法	(3)
1.5 狭义趋势面分析法的一般评价	(4)
第二章 趋势面分析的基本模型	(6)
2.1 基本模型概述	(6)
2.2 拟合剩余的性质	(8)
2.3 规则点的正交多项式趋势面分析	(9)
2.4 不规则点的(非正交)多项式趋势面分析	(14)
2.5 规则点的正交三角多项式趋势面分析	(17)
2.6 不规则点的三角多项式趋势面分析	(21)
2.7 趋势面的内插与外推	(25)
2.8 趋势分量的分解	(28)
第三章 趋势面分析的其他模型	(33)
3.1 引言	(33)
3.2 不规则点的正交化多项式趋势面分析	(33)
3.3 优化多项式趋势面模型与逐步回归分析	(38)
3.4 不连续面的趋势面分析——断层趋势面模型	(41)
3.5 综合变量的趋势面分析	(49)
3.6 三分量趋势面分析	(50)
3.7 典型趋势面分析与最优预报面成图法	(54)
3.8 概率面成图法——定性变量的趋势面分析	(62)
第四章 趋势面真实性的判定与多项式次数的选择	(66)
4.1 引言	(66)
4.2 直接判定法	(66)
4.3 Z^2 表和拟合度	(67)
4.4 剩余均方	(74)
4.5 方差分析与置信水平	(75)
4.6 置信区间	(77)
4.7 样本穿插二分判定法	(79)
4.8 剩余的自相关性检验	(80)
4.9 赤池信息量检验	(83)
第五章 趋势面分析中的几个重要问题	(85)
5.1 引言	(85)

5.2	分析目的与样本的代表性	(85)
5.3	变量变换	(86)
5.4	边缘效应	(88)
5.5	数据点的空间分布	(89)
5.6	控制点的分布效应分析——点力分析	(97)
5.7	曲面的对比	(101)
5.8	定和数据的趋势面分析	(103)
5.9	一种产生正态残余的趋势面分析法	(105)
5.10	病态问题.....	(107)
5.11	两个计算上的问题.....	(111)
第六章	趋势面分析的几个特殊应用	(116)
6.1	引言	(116)
6.2	三维趋势面分析	(116)
6.3	三维立体等值图绘制原理	(118)
6.4	三维趋势面分析实例	(122)
6.5	方向性数据的趋势面分析	(132)
6.6	用趋势面求体积	(135)
第七章	广义的趋势面分析	(139)
7.1	引言	(139)
7.2	简单滑动平均	(139)
7.3	滑动中值	(141)
7.4	普通的加权滑动平均	(141)
7.5	克里格法——理论加权滑动平均	(142)
7.6	一种加权滑动平均	(148)
7.7	改进的简单滑动平均	(149)
7.8	空间滤波	(150)
参考文献	(156)
附录	趋势面分析程序	(161)

第一章 趋势面分析概论

1.1 引言

地质工作离不开各种类型的地质图件。它既是大量观测和分析工作的一个总结，又是进一步工作的基础资料。

经验丰富的地质学家，可以从图中“读”出许多地质现象和规律，而新手从中将得不到多少信息。在众多的图件中，有一类是以等值线表示的。对这一类图件，即使是比较有经验的学者，有时也会一筹莫展。因为在这些图中，有用信息和无用信息，往往交织在一起，难以看出其规律。

在使用计算机之前，有人采用较简单的作图办法，把有用信息和干扰信息分离开。在情况比较简单时，这些办法有可能获得较好的效果，但当情况较复杂时，其效果就不能令人满意。当使用计算机之后，这些在平面或空间中分布的数据的分析，比较地完善起来了。我们说比较地完善，是因为当前对这些在平面或空间中分布的数据的分析，主要地还局限于分析能绘成等值线图的单个变量在空间中的分布规律。可喜的是，最近出现了一种能同时处理多个变量在空间中分布的分析方法（Lee, 1981）。它的出现将会给数学地质工作带来一个新的应用前景。

本书将较系统地讨论单个变量空间分布的分析方法，即趋势面分析法。由于单个变量的空间变化，是地质科研和生产中较普遍的课题，使得趋势面分析法从它第一次出现（Miller, 1956）开始，只经过短短的十来年，就在世界范围内得到了广泛的应用。

趋势面分析法的出现，极大地推动了数学和计算机在地质工作中的应用。后来虽然有多种多样的数学方法进入地质领域，但趋势面分析在地质工作中，至今仍然是使用得比较经常，成效比较突出的一个方法（Waters, 1981）。由于它的基本原理比较简单，计算也方便，在地质学以外的一些学科，如地理学中也有应用。

至于多变量空间分布的分析方法，由于刚提出不久。它的内容还不太丰富，故本书仅于第三章，用一节篇幅予以介绍。

1.2 趋势面分析的三个阶段

趋势面分析的一些思想和一些简单的处理办法，在地质和地球物理工作中早就出现了。有关的一些术语，如区域构造和局部构造、背景值与异常值、区域分量和局部分量、区域梯度与局部异常、大范围的起伏和小规模的变化等，都从不同的领域，提出了趋势面分析的一些问题，不同的学科也有各自的解决办法。在构造地质学中，据 Merriam和Lippert（1966）报道，自从1907年开始，在地质文献中，就不断地有人提出一些根据经验，选定具有适当倾向和倾角的平面作为构造基准面，然后从原始构造面上扣

除基准面，从而达到突出局部构造的目的。在地球物理工作中，区域梯度和局部异常分离办法，也早已出现。但首先提出趋势面(trend-surface)一词的是研究沉积学的Miller(1956)，随后Grant(1957)结合地球物理工作，系统地提出了趋势面分析的数学原理和使用办法。三年后，Krumbein(1959)在Grant提出的适合于规则网点的正交多项式趋势模型基础上，进一步提出了适合于处理不规则分布点的一般多项式趋势分析法。直到现在，我们所采用的趋势面分析法基本上还是Grant和Krumbein所提出的内容。

当这些办法系统地提出之后，Whitten(1959)立即用它来分析花岗岩体的成分变化规律。他的一个意外收获，是从一部分花岗岩体的分析结果中，发现相应的趋势剩余图形有层状分布的痕迹，从而揭示了这部分岩体是由沉积地层变质而来的。1963年，Merriam和Harbaugh首先在石油构造地质工作中采用了趋势面分析法。他们发现，构造面的趋势剩余是揭示含油构造的一个很好的手段。从那以后，趋势面分析就成为地质工作者和地球物理工作者的一个重要分析手段。1965年Chorley和Haggett把这一分析方法应用于地理工作，也收到了很好的效果。

可以说，从1956到1965年这十年是趋势面分析法蓬勃发展，迅速推广的时期。这是发展的第一阶段。Miller和Kahn(1962)对这一阶段的情况做了初步的综合，1965年Krumbein和Graybill进一步做了系统的归纳。

经过第一发展阶之段后，趋势面分析法的性质与优缺点逐步明确，于是进入了趋势面分析法的深化阶段。这一阶段的时间并不长，只有五六年(从1966到1970或1971)。这期间学术交流很活跃，举办了一系列的国际性学术讨论会。其中较重要的是1967年在美国堪萨斯大学举办的趋势面分析讨论会。会上的内容由Merriam和Cocke汇编成册，广为发行。1966年在南非举行的一个关于矿床评价工作中数理统计和计算机应用会议上，传统的趋势面分析法受到了挑战。会上两种意见展开了热烈的争论。以Whitten(1966)为代表的一方极力维护传统趋势分析法的合理性和广泛适用性，而以Krigge(1966)为代表的另一方则针锋相对，指出传统趋势法的不足及其应用的局限性，极力主张二维加权滑动平均趋势面法(即Matheron的克里格法)的普遍适用性。正如Davis(1973)指出的：两种观点都把各自的方法说成是普遍适用的，而忽略了各自的局限性。其实这一分歧主要还是由于操英语的学者和操法语的学者之间相互了解不够造成的。但这一争论促使人们较客观地看待趋势面分析法。

在第二阶段里，由于有十几年的经验和各种意见的争论，促使趋势面分析法从理论到应用，都比前一阶段有较大的提高和充实。

1972年至今，是第三阶段。这期间有关的应用成果和理论探讨在文献中比较少见，但这并不意味着这个方法已经过时了，恰恰相反，它说明人们对这个方法的认识已经比较透彻了。目前在许多地质和地理工作中，趋势面分析法仍然是人们乐于使用的一种简便的数学分析工具。这些年来，尽管出现了具有各种性能的不同分析法，但仍然不能取代它。直到最近，在一些统计的和地学的文献中仍不断地有这方面的探讨(如Unwin and Wrigley, 1987; 张菊明, 张启锐, 1988)。但在地球物理工作中，由于趋势面分析的基本思想已由更合适的一些方法所代替，故从60年代后半期开始，趋势面分析法逐渐失去了它的应用价值(Grant, 1972)。

第三阶段的另一个特点，可以说是法国学派的区域化变量理论的兴盛。自1966年南非会议上的争论之后，法国学派逐渐为英语国家所重视。到70年代，至少在矿业工作中，克里格法占据了统治地位。在地球物理、构造地质、以及等值线自动绘图等领域，也都出现了克里格法的应用，以至于Whitten本人也于1977年发表了赞扬克里格法的文章。

1.3 趋势面分析与回归分析

前面已指出，趋势面分析的基本功能，是把空间中分布的一个具体的或抽象的曲面，分解成两部分：一部分主要由变化比较缓慢、影响遍及整个研究区的区域分量组成，称为趋势分量；一部分是变化比较快，其影响在区内并非处处可见的分量，称为局部分量。这一分析法，事前并不要求对各分量所占的比例以及各自的函数形式有任何知识。地质工作中，一般也不大可能对所研究的地质现象中，各分量的函数形式以及所占比例有任何了解。当然，事前若能对有关现象的函数形式有所了解，它将给分析工作带来许多的方便。趋势面分析对因变量无特别的要求，自变量一般地总是由地理坐标（在特别的情况下，也可以用经度和纬度）组成。在三维趋势面分析中，只增加了高程或深度坐标值。

趋势面分析实际是回归分析的一种特殊应用，或者说是回归分析的一个变种。两者在数学原理、计算步骤的各个方面都几乎是完全相同的，但是两者在应用上还是有较大的区别。回归分析的目的是研究变量之间的关系，并在此基础上进行预报或建立回归模型；而趋势面分析是要分离区域和局部两个分量。人们会问，既然两种分析方法的目的并不相同，为什么在数学原理和计算上又如此相同呢？确实，这是趋势面分析法在理论上很大的一个弱点。只是在实际应用中，由于多项式函数对曲面拟合能力比较强，又由于地质上对拟合及分离的精度要求并不高，才使得趋势面分析法得到广泛的应用。

我们从统计学中知道，回归分析有好几个重要的假设前提统计条件，只有当这些条件都基本上得到满足之后，分析的结果在数学上才是精确可靠的，否则就可能产生虚假的结果。对于这些前提假设，趋势面分析可以严格地加以考虑，这时趋势面分析实际就成为回归分析。分析的目的，是探讨因变量和地理位置的关系。当趋势面分析不考虑，或部分地考虑这些前提假设时，我们的分析目的就有别于回归分析了。

趋势面分析和回归分析的上述共同性，使得研究程度比较高且内容十分丰富的回归分析的许多理论和先进技术可以方便地移用于趋势面分析，以提高分析的效果。

1.4 广义趋势面分析法

我们一般所说的趋势面分析，基本上仅限于Grant和Krumbein提出的多项式趋势面分析法。为叙述方便，暂且称之为狭义的趋势面分析。由于趋势面分析的根本目的是要将一观测面所包含的信息分解为趋势和剩余两个分量，而具有类似的或相同功能的方法还有许多，如滑动平均，滑动中值，克里格法，谱分析，自协方差分析及空间滤波等。为了把这些方法区别于多项式趋势面法，暂且统称之为广义的趋势面分析法。

广义趋势面分析中的各种方法本来的功能并不是要分离趋势和剩余。不同的方法有各自特殊的性能。如滑动平均法主要是用以消除随机干扰；克里格法是要在观测数据的基础上，对所分析的变量进行插值，并给出相应的估计误差；空间滤波则是根据情况，由分析者指定，分离出一定波长范围内的曲面组分。这些方法，或者要清除资料面中的一些组分，或者只提取资料面中的某些组分。这些功能和趋势面分析的要求是重叠的或者是相容的。因此在一定的条件下，也可以起到趋势面分析的作用。由于这些方法并非专用于分离趋势和剩余，故若作为趋势面分析工具使用时，有的效果较好，如空间滤波；而多数的效果不如多项式趋势面法，但为了系统起见，本书专辟一章，将主要的一些非多项式趋势面分析法扼要地作些介绍，以便读者参考。

1.5 狭义趋势面分析法的一般评价

狭义趋势面分析法起源于美国，在讲英语的广大地区应用十分普遍，在苏联也应用得很经常。但在法语国家，它却遭到冷遇。在一些法文数学地质书中(Laffitte, 1972; Guillaume, 1977)，或被一带而过，或则以极小的篇幅简单地提一下。我国在60年代初已开始采用，到70年代就迅速推广(徐道一和孙惠文, 1966; 徐道一, 1973; 张启锐, 1977)，至今仍然是地质工作者经常使用的一个工具。

经过了20多年的研究和使用的，对狭义趋势面分析的性质应当说是比较清楚了，原来的一些分歧意见也逐渐地得到了统一。以下是关于趋势面分析法的一般评价。

总的来说，趋势面分析法仅仅是一个帮助人们分析空间分布资料的一个数学工具，而且还不是一个完善的工具。它的数学原理和计算，相对来说是比较简单的。但是，如同其他的简单工具那样，正由于它简单，便于使用，而为人们所欢迎。

对趋势面分析法，虽然人们都把它归入统计学的范畴，但它在许多方面又不能严格地满足统计上的条件。如果我们仅仅把它看做是一种简单的曲面拟合也无不可。但由于它在原理上和计算上和回归分析相同，就把它归入统计学，并且还将回归分析的一些技术移用于趋势面分析。

趋势面分析和人们所关心的地质学的定量化之间，似乎关系并不密切。定量化是要使地质特征的变化可以通过一些参数或者定理得到描述，其中的参数要有明确的物理意义。人们对趋势面分析的结果，感兴趣的是趋势图和剩余图，以便从中“读”出有意义的地质现象；而对趋势面方程及其系数，极少有人去探求其特定的含义。这一方面是地质工作中人们习惯于对图件进行定性的分析，另一方面也由于分析中所采用的函数是事前就定下来的。它和所分析的资料，不一定有内在的联系。更甚者，不同的函数，可以产生几乎相同效果的拟合，也在一定程度上使得有关的参数的物理意义难以明确。

统计上的各种方法可大致地分为两类：一类是用来建立假设的方法，如因子分析、聚类分析；另一类则相反，是用来对已有假设进行检验的。狭义的趋势面分析基本上属于第二类。如假设某地数据的趋势是个平面，就用一次多项式面去拟合。但实际应用中，我们是将它作为建立假设的方法来使用的。其结果就要求我们进行试错计算，即先试试，错了再修改。所需试验次数比较多，而且所得结果往往是一种近似。故趋势面分析一般没有精确的或唯一的结果。

从实用角度看，这个方法一般地尚能满足地质工作的要求。事前它所要求的条件极少。这是问题的一个方面；另一方面，正由于它所要求的条件很少，它所能提供的信息自然就不可能很多。这两个方面的特点，正好对应于一般地质工作的特点。一般地质工作中所能提供的条件是很少的，它所要求的精度也并不很高。这也许是趋势面分析法为地质人员所欢迎的主要原因。

第二章 趋势面分析的基本模型

2.1 基本模型概述

从本章开始，我们将系统地讨论狭义的趋势面分析法（以下凡不特别说明，趋势面分析一词均指狭义的）。

从理论上说，原始观测面一般地可以分解为三个部分：1) 区域趋势，2) 局部异常，3) 随机干扰（即随机噪声）。

所谓区域趋势是指遍及全区的，规模较大的地质作用的反映（不过我们要注意，当数据包含有系统的测量误差时，这部分误差也将成为趋势的一个组成部分。若系统误差的数量级接近于实际趋势值的大小，那么分析结果就可能要受到严重的歪曲）。局部异常是由规模比研究区小的地质作用所产生的，但其规模又至少需大于两观测点之间的距离。局部异常的规模和观测点间距离的这种关系，一般地在观测点为规则的网格分布时才是明确的。若观测点分布不规则，上述关系就不能精确地估计了。随机干扰，一般认为是由抽样误差和观测误差组成，不包括系统误差。随机干扰的影响范围很小，它仅限于单个观测点的控制区内，或者说其规模小于相邻两观测点之间的距离。

根据上述理论模型，有

$$\text{观测面} = \text{区域趋势} + \text{局部异常} + \text{随机干扰} \quad (2.1.1)$$

每一具体的观测值，都可以认为是包含了上述三种成分的信息。我们的目的，是如何把这三种成分一一分离开来。

统计学的理论告诉我们，随机成分的分离是有条件的，它要求有重复抽样的观测数据。这在地质工作中往往是难以做到的，甚至是根本办不到的。因此在实际工作中，我们往往并不要求分离三种成分，而只要求分离其中的两种成分，从而(2.1.1)中的理论模型在实际应用时就成为

$$\text{观测面} = \text{区域趋势} + \text{局部异常} \quad (2.1.2)$$

或

$$\text{观测面} = \text{区域趋势} + \text{随机干扰} \quad (2.1.3)$$

在(2.1.2)中，局部异常分量必然包含随机干扰分量，只不过异常分量是处于主导地位，而随机分量的所占比重很小，以至于可以忽略不计。同理，在(2.1.3)模型中，随机干扰仍可能包含有局部异常分量，只是它相对于随机分量来说规模要小。对于(2.1.3)模型，由于随机分量有可能包含有局部异常分量，因此它有时仍可以有一定的地质意义。在具体工作中，随机分量里是否包含有局部异常分量，其识别办法和(2.1.2)的做法一致，即分别将分离开的分量作图，然后作地质解释。一般只作等值线图，有时也可以做倾向剖面投影图。所谓倾向剖面投影图，是指沿着趋势面的倾向方向任意作一剖面，然后将研究区内的观测点都投影到这一剖面上。若随机分量中包含有少量的局部

分量，它就有可能被显示出来。Mandelbaum (1963) 关于这个方法，给出了一个简单的例子，说明如下：

图2.1是一个地层的断面投影图。断面与观测面的走向垂直。其中曲线AC是对30个层面海拔观测值（其平面分布这里未给出）拟合的二次曲面与剖面的交线，将30个点投影到剖面上。在横坐标 x_0 点线的左边，趋势剩余的方差较小；而在点线右边，方差较大。即使已知右边是遭受侵蚀的地区，左边不是，所拟合剩余的分布，无论是左边还是右边都是随机的。但由于两边的方差大小不同，它就反映了一定的实在的意义。对于图2.1，由于在侵蚀区还残留有部分的原始层面，借助于这部分层面的观测，就有可能恢复侵蚀前的原始层面海拔。图中虚点线以上的点，就可以认为是残留的原始层面的记录。将这些点和 x_0 左边的点一起拟合得到的平面AB就可以代表原始层面。

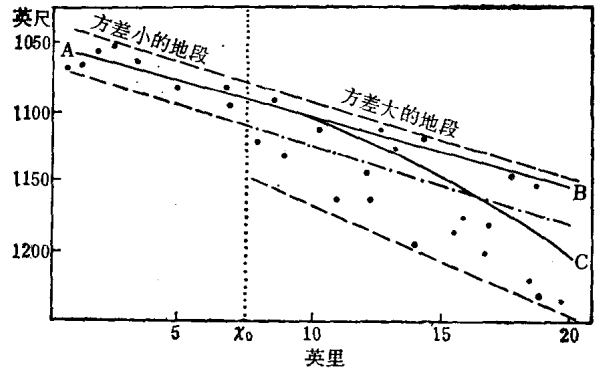


图2.1 沿倾向的剖面投影图

区内观测点都水平地投影到剖面上。AB线代表了遭到侵蚀前的平均平面；AC为对全部点拟合的二次面与剖面的交线（据Mandelbaum, 1963改制）

除了以上的 (2.1.1) , (2.1.2) 和 (2.1.3) 三个模型之外，在个别情况下，还可以有只包含单一分量的模型。这种情况虽然比较少见，但仍要有所了解。如

$$\text{观测面} = \text{区域趋势} \quad (2.1.4)$$

这种情况表明观测值为趋势模型完全拟合。又如

$$\text{观测面} = \text{随机干扰} \quad (2.1.5)$$

这种情况往往为分析人员所忽视，而仍盲目地把它当作是 (2.1.2) 或 (2.1.3) 处理。

以上各种模型应该说都只是概念模型，它们在数学上都可用相同的形式表述，即

$$y_i = \beta_{00} + \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^q \beta_{jk} u_i^j v_i^k + e_i \quad (2.1.6)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

其中 y_i = 第*i*点处的观测值；

u_i = 第*i*点处东西向的坐标值；

v_i = 第*i*点处南北向的坐标值；

e_i = 第*i*点处的拟合剩余值；

p = u 坐标值的最高幂次；

q = v 坐标值的最高幂次；

β_{00} = 多项式函数中的常数项；

β_{jk} = u 为*j*次幂， v 为*k*次幂的多项式项的系数；

n = 观测点数。

若记

$$y_i = \beta_{00} + \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s \beta_{jk} u_j^i v_k^i \quad (2.1.7)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

为拟合值，则 (2.1.6) 可改写成

$$y_i = \hat{y}_i + e_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.1.8)$$

这时，可以根据情况将 (2.1.8) 式和 (2.1.2) 或 (2.1.3) 对应起来。如果经分析表明 e 就是局部分量，那么 (2.1.8) 式就与 (2.1.2) 模型对应。若 e 为随机干扰，则对应于 (2.1.3) 模型。若 y 的模型是随机的（这将在后面第四章的 4.3 节作详细讨论）那么，(2.1.8) 就相当于 (2.1.5) 模型。

一般的趋势面分析都采用如 (2.1.6) 那样的多项式趋势面模型。不同次数的多项式函数所描绘的曲面有不同的复杂程度，一次多项式面最简单，是个平面，它可以是水平的，但极少见，一般是以某倾角倾向于某一方向。二次多项式面为简单曲面，可以是椭圆面、双曲面，或是抛物面，总之是只有一个极值点的曲面。三次多项式面则较复杂，可以出现四个极值点，多为马鞍形。四次以上，形态更复杂。一般趋势面分析多只用到三次，四次以上的较少见。各次多项式面的曲面特征概括于表 2.1。其中的拐点，是指剖面线由凸起转向下凹的部位。

表 2.1 各次多项式面的主要形态特征

次 数	项 数	曲面极值点数	剖面上拐点数
1	3	0	0
2	6	1	0
3	10	4	1
4	15	9	2
5	21	16	3
6	28	25	4

2.2 拟合剩余的性质

由上节讨论可知，各种理论模型的区别，主要是取决于 (2.1.6) 或 (2.1.8) 式中的拟合剩余 e 的性质。

如果 (2.1.6) 式是一个严格的线性回归模型，那么关于随机项 e 的性质就有一系列的前提假设条件，它们分别是：

(1) e_i 与自变量无关，或者说， e_i 不依赖于各自变量（包括它们的各种组合变换）即 $\text{Cov}(e, x) = 0$ ，其中 x 为自变量，相当于 (2.1.6) 中的 $u_j^i v_k^i$ 。

(2) e_i 的方差应是处处相等的。也就是说在不同的观测点上， e_i 的统计分布性质相同。即： $\text{Var}(e_i) = \sigma^2$ ，其中 $i = 1, 2, \dots, n$ ； σ^2 为常数。

(3) 任何两点上的 e_i 和 $e_{i'}$ 是相互无关的。这就是所谓误差的独立性假设。即 $\text{Cov}(e_i, e_{i'}) = 0$ 。

(4) e 的均值为 0。

此外，为了能有效地进行各种统计检验，还要求：

(5) e_i 的统计分布是正态的。

对线性回归模型的上述5条关于拟合剩余的前提假设中，我们比较关心的是第(3)，(5)条。

在趋势面分析中，如果我们照搬回归分析的上述假设，我们就可能一无所获，而使局部异常的识别或分离无法实现。为了便于讨论，我们先对第(3)条中的要求作进一步的说明。任两点上的剩余 e_i 和 e'_i 是相互无关的，若这一点得不到满足，那么 e_i 和 e'_i 之间就是相关的。对于剩余图来说，就意味着相邻点的剩余值趋于相似，或有相同的正负号。显然，当 e 相当于局部分量时，它必然具有相关性，而和3°的要求不一致，因为前面关于局部异常的定义中已指出，它是由两个以上的剩余值勾划出来的。当相邻几个剩余值为正，就构成一个正剩余区，若剩余值为负，则为负剩余区。若要满足独立性的要求，这些剩余区的出现是不允许的。

由上述讨论，可见趋势面模型和线性回归模型在性质上的区别。后者是比较严密的一种统计分析方法，而前者远不如后者严格。它所要求的条件要少得多。

此外，在模型检验时，有人主张沿用传统的统计检验办法来判断趋势模型的显著性。由于这些检验办法一般都要求拟合剩余具有上述5条统计性质，其中包括了正态性，而正态性又是比较易于检验的一种性质，故经常有人讨论它。但实际上趋势分析本身并不要求以这些性质为前提。

2.3 规则点的正交多项式趋势面分析

最原始的趋势面分析是对规则网点值采用正交多项式来进行拟合。正交多项式在电子计算机普及之前应用广泛，因为借助正交多项式表（可参阅有关的数学手册），所有的计算都不超出简单的算术运算，而且计算量可以大大地节省。

这里所说的规则点，是指观测点呈方形或长方形的网格分布。若横坐标为 u ，则 u_i 和 u_{i-1} 两点之间的间隔 Δu_i ，对于 i 从1到 m (m 为点网横向上的点数，或观测点的列数) 都是相同的；同理，纵向上 $v_j - v_{j-1} = \Delta v_j$ ，对于 j 从1到 n (n 为点网纵向上的点数，或观测点的行数) 也是个常数。其中 Δu 可以不等于 Δv ，但多数情况下 $\Delta u = \Delta v$ 。

一般正交多项式的趋势面模型可表为：

$$y_{i,j} = \beta_{00} + \beta_{10}\phi_1(u_i) + \beta_{01}\phi_1(v_j) + \beta_{20}\phi_2(u_i) + \beta_{11}\phi_1(u_i)\phi_1(v_j) + \dots + \beta_{pq}\phi_p(u_i)\phi_q(v_j) + e_{i,j} \quad (2.3.1)$$

其中 $y_{i,j}$ 为 (i, j) 点上的观测值； β 为正交多项式项的系数； $\phi_r(u)$ 为 u 方向上的 r 次正交多项式； $\phi_s(v)$ 为 v 方向上的 s 次正交多项式； p 为 u 方向上的最高次数； q 为 v 方向上的最高次数。 $\beta_{r,s}$ 的估计值 $\hat{\beta}_{r,s}$ 可由下式算得：

$$\hat{\beta}_{r,s} = \frac{g_{r,s}}{\sum_{i=0}^{m-1} \phi_r(u_i)^2 \sum_{j=0}^{n-1} \phi_s(v_j)^2} \quad (2.3.2)$$

其中

$$g_{r,s} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} y_{i,j} \phi_r(u_i) \phi_s(v_j) \quad (2.3.3)$$

此外，与系数 $\hat{\beta}_{r,s}$ 有关的项所说明的总平方和 $Z^2_{r,s}$ 可方便地由下式求得：

$$Z^2_{r,s} = \frac{g^2_{r,s}}{\sum_{i=0}^{m-1} \phi_r(u_i)^2 \sum_{j=0}^{n-1} \phi_s(v_j)^2} = g_{r,s} \hat{\beta}_{r,s} \quad (2.3.4)$$

$\hat{\beta}_{r,s}$ 和 $Z^2_{r,s}$ 的计算是比较方便的，因为在正交多项式表上均列出了相应的 $\sum_{i=0}^{m-1} \phi_r(u_i)^2$ 和 $\sum_{j=0}^{n-1} \phi_s(v_j)^2$ 的值。

本方法一般较适合于网点较少的情况，因为就目前已发表的正交多项式表来看，其对应的单向网点数 m 或 n 最多不超过 20，一般不到 10 个。由于点数不多，在具体拟合 (2.3.1) 模型时，可令其项数等于观测点数，即等于 $m \times n$ 。各项对应的 Z^2 值可以按照 r 和 s 顺序排成一个数据表。这个表很有用，通过对它的分析，可以帮助分析人员选定趋势面方程中应包含的多项式项。

一般在拟合正交多项式模型时，习惯于让方程中的项数等于观测点数，以求得完全的拟合，故 $p = m - 1$ ， $q = n - 1$ 。从理论上说，当趋势面方程的项数等于观测点数时，就将出现完全的拟合，即各 $e_{i,j}$ 均应等于 0。但在实际计算时，一般 $e_{i,j}$ 并不完全为 0，故剩余总是不可避免的。我们为了分离趋势和异常，可以考虑只选用对总平方和说明能力强的项来组成 (2.3.1) 中的趋势方程。

此外，理论上认为

$$\sum_{r=0}^{m-1} \sum_{s=0}^{n-1} Z^2_{r,s} = \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} y^2_{i,j} \quad (2.3.5)$$

0.234	0.225	0.204
0.205	0.212	0.202
0.220	0.214	0.234
0.510	0.730	0.870

图 2.2 湖岸砂粒度观测网

(据 Krumbein 和 Graybill, 1965 改制)

但计算时，由于各种计算误差的影响，上式只能近似地成立。两者越接近，说明计算精度越高；反之，两者差异越大，计算精度就越低。

正交多项式模型的另一个突出特点，是 (2.3.1) 式中各项相互间是不相关的。方程中加入或删除任何一项，都不会对其他项及其系数有任何影响。

为了具体说明计算过程，我们不妨借用 Krumbein 和 Graybill (1965) 的一个简单例子予以说明。这是一个行距为 10 英尺，列距为 25 英尺的湖岸砂粒度观测网 (图 2.2)。网点上的数据是以毫米为单位的粒度值。所得原始数据有 $3 \times 4 = 12$ 个。这里 $m = 3$ ， $n = 4$ 。横向上最多能拟合到二次，纵向上拟合到三次，即 $p = 0, 1, 2$ ； $q = 0, 1, 2, 3$ 。由正交多项式表 (中国科学院数学研究所概率统计室, 1974) 可得与 p 相应的多项式矩阵 N ，与 q 相应的矩阵 M ：

$$N = \begin{pmatrix} \phi_0(u) & \phi_1(u) & \phi_2(u) \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} \phi_0(v) & \phi_1(v) & \phi_2(v) & \phi_3(v) \\ 1 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$