

德意志民主共和国 十二年制学校数学课本

第十册(上册)

(内部发行)

人 民 教 育 出 版 社

德意志民主共和国

十二年制学校数学课本

第十册（上册）

人民教育出版社

本书是德意志民主共和国十二年制学校数学课本第十册(1962年版)的译本。第十册的译本分为上下两册出版。上册的内容包括指数函数和对数函数,对数计算,三角函数和平面三角。本书系内部参考资料,供研究外国中学数学教学情况用。

德意志民主共和国
十二年制学校数学课本

第十册 (上册)

北京翻译社译

北京市书刊出版业营业许可证出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

新华书店北京发行所发行

全国新华书店经售

人民教育印刷厂印装

统一书号: 13012·66 字数: 143 千

开本: 850×1168 毫米 1/32 印张: $6\frac{1}{4}$

1965年5月第一版

1965年7月第一次印刷

北京: 1—3,700册

定价 1.00 元

目 录

1. 指数函数和对数函数	1
1.1 复习	1
1.2 指数函数 $y = a^x (a > 0)$	3
1.3 对数函数 $\log_a x (a > 0, x > 0)$	8
2. 对数的计算	15
2.1 复习	16
2.2 对数和对数系	18
2.3 利用对数进行计算	31
2.4 其他的对数计算方法	45
2.5 对数辅助计算工具的应用	64
2.6 指数方程	84
2.7 应用问题	90
2.8 对数计算的历史(略)	100
3. 三角函数和平面三角	101
3.1 三角函数	101
3.2 三角函数间的关系	112
3.3 三角函数表	126
3.4 直角三角形	143
3.5 斜三角形	170
3.6 测量	184

1. 指数函数和对数函数

一艘船所使用的核燃料是濃縮的鈾 235, 它在船的反应堆中裂变, 放出热能. 放射性元素的裂变依下列的裂变规律进行:

$$(1) \quad n = n_0 \cdot e^{-\lambda t}.$$

式中: n_0 是某一(任意假定的)零时刻的未裂变的原子数; e 是一个常数, 它的值为 $2.718\cdots$; λ 是物质常数; t 是从(任意假定的)零时刻起算的时间(变量); n 是当时时间为 t 时未裂变的原子数(变量).

式(1)表明, t 的任何一个值都有一个值 n 相对应, 所以(1)是一个函数的解析表达式. 如果一个函数的变量是幂的指数, 这个函数就叫做指数函数.

1.1 复习

1. 設 x 分別取下列数值, 計算 2^x 和 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$:

a) 2 b) 5 c) 7 d) 10 e) 20 f) -1
g) -4 h) -5 i) -7 k) -10 l) -20

2. 設 x 的值分別取 $-10, -9, -8, \cdots, -1, 0, 1, \cdots, 10$, 計算

a) 10^x 和 b) $\left(\frac{1}{10}\right)^x$.

3. 当 $x=0$ 时, 习题 1 和 2 有什么特点?

4. 設 x 分別取下列数值, 計算 2^x 和 $\left(\frac{1}{2}\right)^x$:

a) 4.5 b) 3.75 c) $\frac{10}{3}$ d) 2.5 e) $\frac{9}{4}$

$$\begin{array}{llll} \text{f)} \frac{11}{6} & \text{g)} 1\frac{2}{3} & \text{h)} \frac{5}{4} & \text{i)} 0.75 \quad \text{k)} \frac{2}{3} \\ \text{l)} 0.5 & \text{m)} \frac{1}{3} & \text{n)} \frac{1}{4} & \text{o)} -\frac{1}{4} \quad \text{p)} -\frac{1}{2} \\ \text{q)} -\frac{3}{4} & \text{r)} -\frac{4}{3} & \text{s)} -\frac{5}{3} & \text{t)} -\frac{9}{4} \quad \text{u)} -\frac{5}{2} \\ \text{v)} -\frac{10}{3} \end{array}$$

5. 設 x 取习题 4 中 a) 至 v) 列出的值, 計算 10^x 和 $\left(\frac{1}{10}\right)^x$.

6. 設 x 分別取下列数值, 求 A) $(-3)^x$, B) $\left(-\frac{1}{5}\right)^x$,

C) $(-10)^x$:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} 4 & \text{b)} 3 & \text{c)} 2 & \text{d)} \frac{2}{3} \quad \text{e)} \frac{1}{2} \quad \text{f)} \frac{1}{3} \\ \text{g)} -\frac{2}{3} & \text{h)} -\frac{3}{2} & \text{i)} -2 & \text{k)} -3 \quad \text{l)} -4 \end{array}$$

利用冪和根式的計算证明上列各題的計算結果.

7. 設 x 分別取下列数值, 計算 A) 2^{-x} , B) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$, C) 10^{-x} :

$$\begin{array}{llll} \text{a)} 3 & \text{b)} \frac{5}{2} & \text{c)} \frac{3}{4} & \text{d)} 0 \quad \text{e)} -\frac{1}{2} \\ \text{f)} -1 & \text{g)} -\frac{4}{3} \end{array}$$

8. 如果把下列各数写成以 2 为底的冪, 它的指数等于多少?

$$\begin{array}{llll} \text{a)} 8 & \text{b)} 128 & \text{c)} \frac{1}{4} & \text{d)} \frac{1}{32} \quad \text{e)} \frac{1}{256} \\ \text{f)} \sqrt{2} & \text{g)} \sqrt[3]{4} & \text{h)} \sqrt[4]{32} & \text{i)} \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{k)} \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \\ \text{l)} \frac{1}{\sqrt[3]{64}} \end{array}$$

9. 如果底数是 10, 下列各幂的指数等于多少?

a) 100 b) 100,000 c) 十亿 d) 0.001

e) $\frac{1}{10000}$ f) $\sqrt[3]{100}$ g) $\sqrt[2]{0.1}$

10. a) 怎样驗算习题 8 和 9 的解是否正确?

b) 你自己編写一些这样的习题.

11. a) 你自己举一些例子来说明“互为反函数”的概念.

b) 說明怎样求一个已知函数 (例如 $y=x^2$) 的反函数.

c) 写出 $y=x^3$ 的反函数. 这个函数的反函数和 $y=x^2$ 的反函数有什么区别?

d) 在同一坐标系中互为反函数的函数图象有什么特性?

e) 互为反函数的函数定义域和值域之間有什么关系?

1.2 指数函数 $y=a^x (a>0)$

指数函数 $y=2^x$, $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y=10^x$, $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$

指数函数

$$(2) \quad y=2^x, \quad y=\left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad y=10^x, \quad y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$$

都是

$$(3) \quad y=a^x \quad (a>0)$$

型的指数函数的实例, 其中 x 取实数值, a 代表确定的正实数.

● 取 x 为有理数, 計算(2)中給出的指数函数的函数值, 并且在笛卡儿直角坐标系中画出各个数对对应的坐标点.

当 $a>0$ 和 x 为有理数时, 幂 a^x 只取一个正实数值; 这个幂值可以利用乘方或开方运算, 也可以利用內插法求出其有理近似值到任意精确度.

当 x 为无理数时, $y=a^x$ 的函数值只能求出近似值, 计算时用有理近似值代替无理指数. 应用内插法求无理指数幂的值时, 幂值界于指数为有理数的两个相邻的幂之间.

■ 例: 求 $10^{\sqrt{2}}$ 的近似值.

解: 从 $1.4 < \sqrt{2} < 1.5$

得出 $10^{1.4} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1.5}$.

因为 $10^{1.4} = \sqrt[5]{10^7} = 25.12$, $10^{1.5} = \sqrt{1000} = 31.62$,

所以 $25.12 < 10^{\sqrt{2}} < 31.62$.

这个区间还可以大大加以缩小:

从 $1.41421 < \sqrt{2} < 1.41422$

得出 $10^{1.41421} < 10^{\sqrt{2}} < 10^{1.41422}$.

由于 $10^{1.41421} = 25.9544$, $10^{1.41422} = 25.9550$

所以 $25.9544 < 10^{\sqrt{2}} < 25.9550$.

这两个幂的差小于 $\frac{1}{1000}$.

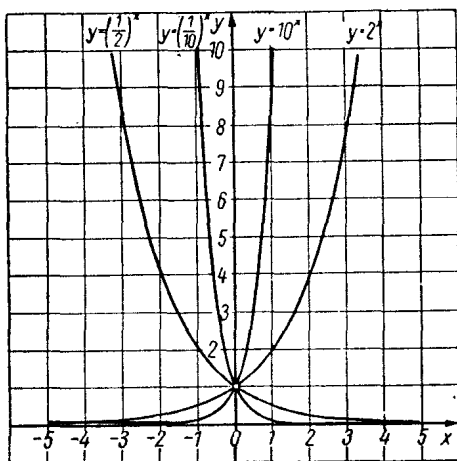


图 1.1

因为有理数是稠密地分布着的, 所以任意一个无理指数可以用有理指数十分近似地加以表示, 使固定底数的对应幂值的差可以任意小. 因此, 幂的指数为无理数时, 幂的值可以完全按照所要求的精确度近似地求出.

对于 (2) 中的各指数函数来说, 这就意味着, x

的任何一个值都同一个 y 值相对应, 因此这些函数的图象是互相有关联的曲线 (图 1.1). 指数函数 (2) 的图象叫做 **指数曲线**.

图 1.2 所表示的是 $y=a^x$ ($a>1$) 的指数曲线族. 除 $y=2^x$ 和 $y=10^x$ 以外, 还画出了 $y=3.2^x$ 和 $y=7^x$. 从指数函数

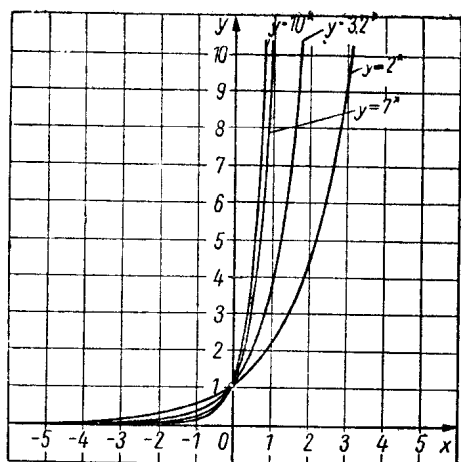


图 1.2

$$(4) \quad y = a^x \quad (a > 1)$$

和它们的曲线族可以看出下列的共同性质:

1. 函数 $y=a^x$ ($a>1$) 是——**对应的函数**, 所以一切曲线都随着 x 值的增大而上升.

2. 因为底数为正数的幂一定是正的, 所以当 x 的值不断减小时, 曲线就越来越从上向 x 轴接近, 但不会同 x 轴相切或相交. 我们说, 曲线渐近 x 轴. x 轴就是 $y=a^x$ ($a>1$) 的指数曲线族的一切曲线的渐近线.

3. a 越大, 曲线向上倾斜度越大; 但是当 x 取负值时, a 越大, 曲线接近 x 轴越快.

4. 从上面可以知道, 一切 $y=a^x$ ($a>1$) 的指数函数的定义域是 $-\infty < x < +\infty$, 值域是 $0 < y < +\infty$.

5. 根据定义 $a^0=1$, 所以点 $P(0, 1)$ 是曲线族中一切曲线的公共点, 也是一切曲线同 y 轴的交点.

加法定理 $a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2}$

图 1.1 中的函数值显然有下列关系:

$$y_3 = y_1 \cdot y_2 = 2^{-1} \cdot 2^3 = 2^2, \quad y_3 = y_1 \cdot y_2 = 10^{\frac{1}{4}} \cdot 10^{\frac{3}{4}} = 10^1;$$

而相应的 x 值的关系是:

$$x_3 = x_1 + x_2 = -1 + 3 = 2, \quad x_3 = x_1 + x_2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1.$$

現在我們要探討一下, 这种关系普遍成立嗎?

如果 $y_1 = a^{x_1}$, $y_2 = a^{x_2}$, $y_3 = a^{x_3}$, 同时 $y_3 = y_1 \cdot y_2$, 那么根据幂的第一条定律就有

$$\blacktriangleright (5) \quad y_3 = y_1 \cdot y_2 = a^{x_1} \cdot a^{x_2} = a^{x_1+x_2} = a^{x_3}.$$

換句話說:

指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$) 的两个函数值的积, 等于这个函数的另一个值, 它所对应的 x 值等于前两个函数值所对应的 x 值的和.

因此, 指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$) 的特点是: 两个函数值相乘意味着对应的(处于指数地位的) x 值相加, 这就是說, 函数值相乘可变为 x 值相加. 因此, 这条規律就叫做指数函数的加法定理.

习 題

1. a) 利用图 1.3 研究指数函数 $y = a^x$ ($0 < a < 1$) 及其图象具有哪些共同特性.

b) 把第 5 頁上列出的关于 $y = a^x$ ($a > 1$) 的共同特性同 a 的結果作比較.

c) 通过 $y = a^x$ ($a > 1$) 和 $y = a^x$ ($0 < a < 1$) 就能掌握一切指数函数 $y = a^x$ ($a > 0$) 嗎?

d) 为什么 $y = 1^x$ 有特別的地方?

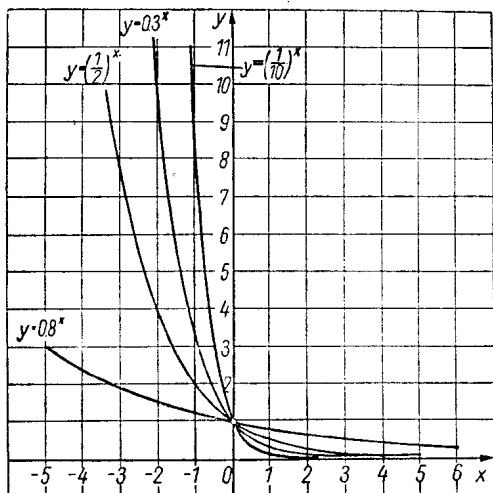


图 1.3

提示：利用 $y=1^x$ 的幂的计算结果及其图象加以说明。

e) 当 $0 < a < 1$ 和 $a > 1$ 时, 指数函数 $y=a^x$ 有哪些特性?

f) 当 $a > 0$ 时, 指数函数 $y=a^x$ 具有哪些共同特性?

2. a) 函数 $y=2^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 以及 $y=10^x$ 和 $y=\left(\frac{1}{10}\right)^x$ 的图象相对位置怎样(图 1.1)?

b) 一般地说明, 为什么 $y=a^x$ ($a > 0$) 和 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ ($a > 0$) 的图象关于 y 轴成对称。

c) 说明 $y=a^x$ ($a > 0$) 和 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^{-x}$ ($a > 0$) 以及 $y=a^{-x}$ ($a > 0$) 和 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ ($a > 0$) 的图象为什么重合。

d) 同 $y=a^x$ ($a > 0$) 关于 x 轴成对称的函数的解析表达式怎样写?

3. a) 函数 $y=0^x$ 的图象怎样?

b) 它同 $y=0$ 的图象有什么区别?

4. 某人试图在 $y=a^x$ 中取一个值 $a<0$.

a) 这样会发生什么困难呢?

提示: 注意幂的底数的符号规则.

b) 怎样证明 $a<0$ 时 $y=a^x$ 的图象不是连续的曲线?

5. 作出下列各指数函数的图象:

a) $y=3^x$

b) $y+\left(\frac{5}{4}\right)^x=0$

c) $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x-3$

d) $y=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$

e) $y-0.8\cdot 5^x=0$

f) $y=(0.8\cdot 5)^x$

g) $y-\frac{1}{10}\cdot 4^x+2=0$

h) $y-2.5^{-x}=0$

i) $y=-\left(\frac{1}{4}\right)^{-x}+8$

k) $y-\left(\frac{3}{4}\right)^{-x}-5=0$

提示: 取 x 为整数值计算对应的函数值, 并且把所得出的图象上的点用曲线板连接起来.

1.3 对数函数 $\log_a x (a>0, x>0)$

“对数”的概念

在指数函数 $y=a^x$ ($a>0$) 中, 当底数是固定的正实数时, 每一实数的指数 x 都和一个实数的正幂值 y 对应. 反过来, 当底数固定时, 每一正实数的幂值是否也都和一个实数的指数相对应呢?

在 1.1 节的习题 8 和 9 中, 我们曾经就一些特别的底数 a 和幂值 c 研究了这一问题. 在那里举出的习题都可以用

$$(6) a^x = c$$

的形式写成 x 的方程，并通过适当的試驗求解。但是無論通过乘方或是通过开方都不可能求出式(6)的一般解，因为未知数恰恰是指数 x 。这里所求的指数叫做对数。采用(6)式中所用的符号时，通常有下面的定义：

► 如果正底数 a 的 x 次幂等于 c ，指数 x 就叫做对数。

(6)式也可以写成：

$$(7) x = \log_a c,$$

讀作：“ x 是以 a 为底、 c 的对数”。

如果 $a=10$ ， $x = \log_{10} c$ 可以簡写成 $x = \lg c$ 。以 10 为底的对数叫做十进对数或常用对数。

相应地，求对数可以解釋为：已知固定的正底数和幂值时要求出指数。

方程(6)和(7)只是同一問題的两种不同写法。这就是說，取对数时可以利用式(6)作驗算。

■ 例：

$$2) x_1 = \log_2 8 = 3, \text{ 因为 } 2^3 = 8$$

$$3) x_2 = \log_2 \sqrt[3]{\frac{1}{32}} = -\frac{5}{3}, \text{ 因为 } 2^{-\frac{5}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2^5}} = \sqrt[3]{\frac{1}{32}}$$

$$4) x_3 = \lg 0.0001 = -4, \text{ 因为 } 10^{-4} = \frac{1}{10000} = 0.0001$$

● 将 1.1 节中的习题 8 和 9 写成 $\log_a c = x$ 的形式，并对每个結果进行驗算。

对数函数 $y = \log_2 x$ 和 $y = \lg x$

求对数的运算也可以按对应法則处理，例如

(8) $y = \log_2 x$ 和 $y = \lg x$.

这样的函数叫做**对数函数**.

- 把 1.1 节中的习题 5 的幂值 x 和由它计算出的对数 y 在直角坐标系中画出, 并将画出的点连接成两条闭合曲线.

图 1.4 上画出了对数函数

$y = \log_2 x$, $y = \lg x$ 和 $y = \log_5 x$ 的图象.

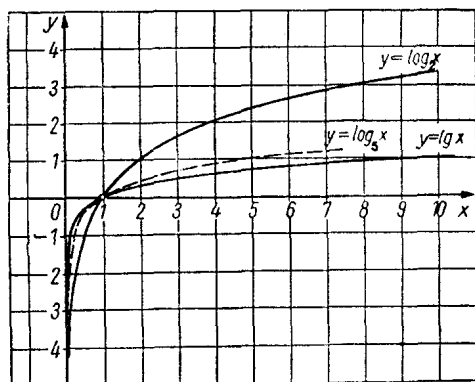


图 1.4

对数函数是指数函数的反函数

因为指数函数

(9) $y = a^x$ ($a > 1$ 和 $0 < a < 1$)

在它整个定义域内, 是一一对应的函数, 所以在整个定义域内存在反函数.

如果把 x 从 (9) 式解出来, 应用对数的定义 [注意 (6) 式和 (7) 式之间的关系], 得出

(10) $x = \log_a y$ ($a > 1$ 和 $0 < a < 1$)

然后互换 x 和 y , 得出

(11) $y = \log_a x$ ($a > 1$ 和 $0 < a < 1$).

相应地,从特殊的指数函数

$$(12) y=2^x \text{ 和 } y=10^x$$

中解出 x 以后,就得出它们的反函数

$$(13) x=\log_2 y \text{ 和 } x=\lg y,$$

互换 x 和 y , 得出

$$(14) y=\log_2 x \text{ 和 } y=\lg x,$$

也就是对数函数(8).

由此可见:

以不等于 1 的相同正数为底数的指数函数和对数函数互为反函数.

因此,以 a 为底数的指数函数的图象在直线 $y=x$ 上的对称图象,就是以 a 为底数的对数函数的图象.

如图 1.5, 用这种方法从函数 $y=2^x$ 以及 $y=10^x$ 的图象得出

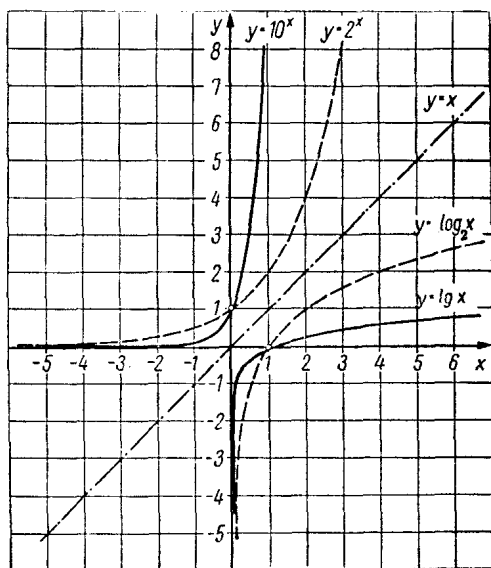


图 1.5

了函数 $y = \log_2 x$ 以及 $y = \lg x$ 的图象.

从对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 1$) 和它的图象(图 1.4), 我们可以看出下列的共同特性:

1. 函数 $y = \log_a x$ ($a > 1$) 是一一对应的函数., 这个函数的一切曲线都随着 x 值的增大而上升.

2. 当正的 x 值不断减小时, 曲线便越来越从“右方”靠近 y 轴, 但是和 y 轴既不相切也不相交. y 轴是对数曲线族 $y = \log_a x$ ($a > 1$) 的一切曲线的渐近线.

3. a 越小, 在 $1 \leq x < \infty$ 范围内曲线上升就越快, 而且当 $x < 1$ 且为正数时, 曲线向 y 轴的弯曲就“越慢”.

4. 由此得出一切对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 1$) 的定义域为:

$$0 < x < +\infty;$$

函数值域为:

$$-\infty < y < +\infty.$$

由于互为反函数的两个函数的定义域和值域正好相反, 所以上述性质是不难想到的.

5. 由于 $\log_a 1 = 0$ (因 $a^0 = 1$), 所以点 $P(1, 0)$ (即曲线和 x 轴的交点) 是曲线族中的一切曲线的公共点.

$$\text{加法定理 } \log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$$

在图 1.6 中, 再一次画出了对数函数 $y = \log_2 x$ 的图象. 同时还画出了 $x_1 = 4$ 和 $x_2 = 8$ 的函数值 $y_1 = \log_2 4 = 2$ 和 $y_2 = \log_2 8 = 3$. 同 y 值 $y_3 = y_1 + y_2$ 相应的 x_3 取什么数值呢? 从图 1.6 读出 $x_3 = 32 = x_1 \cdot x_2$. 因此在上述情况下, 下式成立:

$$(15) \log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

关系式(15)称为对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 的加法定

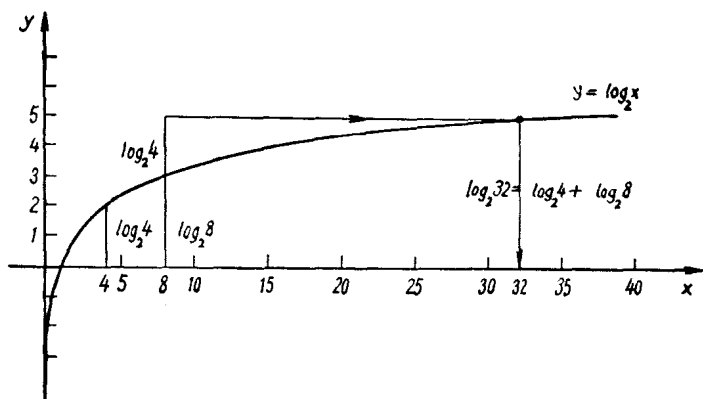


图 1.6

理。現在我們证明这条定理是普遍适用的。

假設

$$(16) \quad y_1 = \log_a x_1, y_2 = \log_a x_2, y_3 = \log_a x_3 \text{ 而且}$$

$$x_3 = x_1 \cdot x_2,$$

根据底数固定的对数的定义可以写成:

$$x_1 = a^{y_1}, \quad x_2 = a^{y_2}, \quad x_3 = a^{y_3}.$$

因为 $x_3 = x_1 \cdot x_2$, 根据幂的第一条定律, 有

$$x_3 = x_1 \cdot x_2 = a^{y_1} \cdot a^{y_2} = a^{y_1 + y_2},$$

用对数形式可以写成

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a a^{y_1 + y_2}.$$

由于 $\log_a a^{y_1 + y_2} = y_1 + y_2$ 并根据(16)式得出

$$\log_a (x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2.$$

換句話說:

在对数函数 $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) 中, 同两个 x 值的乘积相对应的函数值等于同这两个 x 值相对应的两个函数值的和。