整 数

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会編

新知識出版社

中國数学会上海[illegible]会

中学数学研究委員会編

新 知 識 出 版 社

一九五六年·上海

整　　　　　数

中國数学会上海分会
中学数学研究委員会編

*

新知識出版社出版
（上海湖南路9号）
上海市書刊出版業營業許可証出015号

中科藝文聯合印刷廠印刷　新華書店上海發行所總經售

*

开本：787×1092　1/32　印張：2 3/16　字数：49,000
1956年9月第1版　1956年9月第1次印刷
印数：1—70,000本

統一書号：13076·52
定　价：（7）0.20元

序　言

本会为了学習苏联先進經驗，帮助教师積極提高教学質量，并根据当前中学教学实际需要，决定着手編寫有关高初中数学各科包括算術、代数、几何、三角教材內容的小册子，陸續分批出版，以提供中学数学教师作为進一步研究和了解教材的参考，从而更好地掌握教材的教学目的。同时也可供高初中学生作为課外鑽研的題材，以利更深刻理解教材內容。我們希望通过这一套小册子的出版，能使数学界同志对中学数学教材的研究得到廣泛的交流。

这本"整数"小册子，是按照中学数学教学大綱(修訂草案)"复習在小学学習过的課程"及"数的整除"編寫的。由数数引入自然数列，研究其性質并推到擴大的自然数列。敍述的程序是首先建立运算律；其次介紹算術四則运算方法，对于和、差、積、商的存在性和唯一性，作了較嚴密的証明；然后研究整数的整除性，并証明質数的个数是無限的以及分解合数为質因数的連乘積的唯一性。本册对于实际应用問題及我國古代数学家对算術的偉大成就也作了較詳細的闡述。

本会在編寫本册前，曾拟就編寫計划，邀請上海市二十余个学校的算術教师参加意見，又經編輯組兩次討論，然后确定初步提綱，分别由黃公安、胡冠璦、尤彭莘諸同志提供材料，而由范际平同志执筆寫成，再經程其襄、楊荣祥、黃公安、夏守岱諸同志校訂，最后由范际平同志作了修正。虽然这样，但由于我們水平有限，缺点是难免的，希望数学界同志予以批評和指正。

中國数学会上海分会中学数学研究委員会

1956年6月

主要参考書

1. 初級中学課本　算術　人民教育出版社
2. 算術　格列本卡著　張禾瑞　孙永生譯
3. 算術　杜林諾夫　捷馬列夫著　叶述武譯
4. 中学算術教学法　柏拉基斯著　吳品三譯
5. 初中数学教学法　利亞平編　叶佩華　叶述武　曾如阜譯
6. 中学算術教学法　契契根著　王明德譯

目　　錄

一 自 然 数 列

“算術”这一名詞是導源于希臘文，它的原意是“数”。正如这个字本身的涵意，**算術是研究数的性質及数的运算的科学**。所以算術的主要任务是研究数的概念，發展数的概念，并且研究数与数間的关系及其运算。在初中一年級的算術中我們僅僅敍述整数和分数（卽不負的有理数）的概念及其运算；至于負的有理数、無理数和虛数是在代数里面講述。所以代数中的数的概念發展，基本上是屬于算術的范圍，而代数是算術的自然延續。

德國数学家克朗納克（Kronecker，1823年—1891年）說道：“除了自然数是上帝創造的，其他的数都是人为的。”这句話后半段說明数是应人类需要而產生的，是正确的；但是自然数的產生說法是唯心的，应当加以批判。

我們知道自然現象反映到人的思維，就產生了“一”的意識，例如一只兎子、一棵大樹、一塊石头等等。在原始共產主义社会，由于那时的生產方式單純，比較多寡的重要方法是“对应”。那时的牧童在黎明时候，赶着羊羣到大自然去吃草。每走出一只羊，随卽拿進一塊石子。到了黃昏时分赶着羊羣囘來，每走進一只羊，随卽拿出一塊石子。假如羊進來完畢，石头剛巧拿完，他便很放心的睡覺；假如羊進來完畢，屋內石头还有，他便知道是走失了羊，赶快出去尋找；假如屋內石头拿完，羊还是進來，他便知道人家的羊混進來，馬上詢問失主归还。我們曉得这种比較多寡方法，对于計算劳动果实太不方便。因而我們把一个物体叫做單位，一个單位上添上一个單位，在所得結果上再添上一个

單位，这样依次地做下去，就得到一列自然数

一，二，三，四，五，六，七，……．

那末我們便可以数°数而計算劳动果实了．这一列自然数叫做自然数列．由于数°数可以無限地做下去，所以自然数列也是無限的。

自然数列有下面三个重要性質：

1．在自然一列中有一个数，它不跟随任何一个数，这个数是一．

2．在每个自然数后面跟随一个而且只跟随一个后繼数。

3．除了数一以外，每个自然数前面都有一个而且只有一个先行数．

从实际数数中知道，数东西的結果和数的次序無关，只要每个东西都数到而且只数到一次．那就是說数的結果和数的次序沒有关系，而且是一个唯一的数．但在人类的生活实踐中必然要碰到較大的数．倘若每一个数都給它一个数字，那是何等的累贅？因而我們必須建立一种記数法．目前我們用的記数法是十進位制，并配合印度阿拉伯数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 來寫出一切自然数．

十進位制記数法由于符号“0”的引進，才能完备而便于計算．我們如果把印度阿拉伯数字 1, 2, 3, 4, 5. 6, 7, 8, 9 中最后一个数字 9 再添上一个單位，由于符号“0”的引進，便不需要再增加数字而寫成 10 就好了。

又如 $23=2\times10+3,\quad 435=4\times10^2+3\times10+5.$
零表示在数数时沒有东西。数零不是自然数．假如我們把零寫在自然数列前面，那末我們便得到所謂擴大的自然数列

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, \cdots\cdots,$$

其中任何一个数都叫做整数。

擴大的自然数列有下面三个重要性質:

1.在这个数列中有一个数,它不跟随任何一个数,这个数是零。

2.在每个数后面跟随一个、而且只跟随一个后繼数。

3.除了数零以外,每个数前面都有一个而且只有一个先行数。

按十進位制及零,一般西洋数学史都說是第七世紀时印度人所發明;第十世紀阿拉伯采用并为之傳播;第十三世紀傳入意大利;第十六世紀时,欧洲人才普遍采用。

古代希臘和罗馬因为缺乏位置原則与符号"0",他們的計算方法很幼稚。例如極簡單的加法 614+341 和減法 614−341 他們寫成

$$\begin{array}{r} \mathrm{DCXIV} \\ +\ \mathrm{CCCXLI} \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} \mathrm{DCXIV} \\ -\ \mathrm{CCCXLI} \\ \hline \end{array}$$

再运算已經感到麻煩,何况乘除法呢? 英國数学家怀德赫(Whitehead)說过:"在阿拉伯数字未輸入以前,乘法非常繁难,除法一定要有天才的人才会运算。現代因为施行強迫教育的影响,西欧人民都能演算大数的除法了。如果古希臘数学家复生,知道这件事,一定是很驚異的,因为他們認为这是一件不可能的事啊!"又在第十五世紀时,德國有一商人,要送他的孩子受商業方面的高等教育,便請教一位名教授指示求学处所。那位教授說:"如果你只要你的孩子熟練加減法,進德國大学或可办到;如果要学乘除法,便非要到意大利留学不可。"因为那时的意大利已經采用印度阿拉伯数字了。

按我國春秋战國时代,有各家各派的哲学思想,可与希臘东西爭美。希臘自退拉斯(Thales)、畢达哥拉斯(Pythegoras)、柏拉圖(Plato)、欧几里得(Euclid)、亞里士多德(Aristotle)等輩

出，数学著作光輝燦爛；而那时我國数学著作却是很少。我們看到漢时韓詩外傳一段記載：齐桓公設庭燎，为士之欲見者，期年而士不至。于是东野鄙夫有以九九見者。桓公使戲之曰，九九足以見乎？鄙人曰，夫九九薄能耳，而君犹見之，况賢于九九者乎？

所謂"九九"便是乘法的工具。东野鄙夫称"九九薄能"可見当时"九九"是家喻戶曉。由此我們可以推断春秋战國时我國虽無数学專書，但数学是很進步的。

我國自古以來，用文字記数就用地位制。例如"三百五十六"，百、十都表示地位。又如"二千三百五十六"，千字也表示地位。又如"二千五十六"、"二千六"，不用零的符号也很清楚；末位六自然表示个位。

我國实际計算靠一种工具，古人叫它"算"。"算"字上面是竹，下面是具，表示一种竹制的工具。它又叫做筹、筹碼、算筹、算子。所謂运算即运筹，因通过运算才可解决数学問題。由于"算術"表示运筹方法，所以我國古代算術書是包括当时全部数学知識的。

用算筹表示 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 有下列兩种形式：

縱式：𝍠 𝍡 𝍢 𝍣 𝍤 𝍥 𝍦 𝍧 𝍨

橫式：𝍩 𝍪 𝍫 𝍬 𝍭 𝍮 𝍯 𝍰 𝍱

古代相傳算筹記数法單位用縱式、十位用橫式、百位用縱式、千位用橫式，依次类推。夏侯陽算經(原書失傳，是晉或南北朝人。今所傳是唐韓延所著)說得好："一从十橫，百立千僵，千十相望，万百相当。滿六以上，五在上方，六不積聚，五不單張。"

所謂"六不積聚"就是說"六"不要佈等成 |||||| 或 ䷀；"五不單張"是說"五"不要佈等成 | 或 一；必須佈等成 𝍤 或 𝍭。"一从十橫，百立千僵，千十相望，万百相当"是說上面所講的定位的方法。例如 𝍪𝍢𝍭𝍥 表示 2356，𝍪 𝍭𝍥 表示 2056，𝍪𝍢𝍭 表

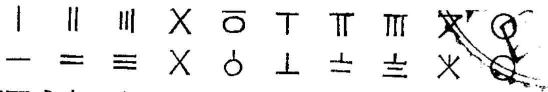
示2350由于用縱橫相間方法表示各位数字，我們一看就可知道何处有空位。算筹在漢朝規定長六寸，合現在四寸，后來因不便而改短，合現在的二寸半。用时把它鋪开在台上，并在台上鋪氈，使摩擦大不致滑动；不用时則置筒中，水滸里面的吳用在大名府便是用算筹替人算命。元代創造珠算盤來代替零碎的算筹，一切筹算的算法可以在珠算盤上应用。算珠所計的数还是用地位制記数法，算盤上空几档卽表示几个零。有人認为中國計算用算筹或算珠而不用数字，終是一个缺点，事实上由于一二三四五六七八九，筆划和發音都很簡單，毋須另选数字；不像西洋人表数的字母复雜，念起來又有几个音節。我國的数字發展較迟，十三世紀中，做照算筹表数的形式而寫做符号

𝍠　𝍡　𝍢　𝍣　𝍤　𝍥　𝍦　𝍧　𝍨

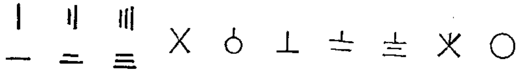
𝍩　𝍪　𝍫　𝍬　𝍭　𝍮　𝍯　𝍰　𝍱

又因寫出一多位数时須要留心空位，所以添圓形符号〇表示零。此种数字叫做金元数字，它和算筹記数式样差不多，不过筆划略微有些長短，不必像算筹有一定的長度罢了。

南宋数学家所用的数字叫做南宋数字，表示4, 5, 9的数字与金元数字略有不同，其表零的圈圈已漸漸变小。



內中数碼〇或ㆁ表示5+0=5，而数碼㐅或㐅表示5+4=9，后來由于珠算代替筹算，数字用处更大。同时由于6, 7, 8, 9不用縱橫兩式不会混乱，而1, 2, 3必須分为縱橫兩式；因而明代数字改为



又因我國人画圈与外國人相反（我國人常順时針向画圈），因而ㆁ轉变为〆。又㐅也轉变为攵，且表零的圈圈更逐漸变小。卽

〡 〢 〣 〤 〥 〦 〧 〨 〩 〇

一 二 三

此种数字目前有些商人記賬还在使用着。

由于东方的兩大民族印度和中國都是早就采用十進位制的記数法，所以数学的計算方面在东方是發展迅速的。我們曉得小兒初学数数，往往用手指。一手五指，兩手十指，所以記数法用五進位或十進位是很自然的。古代人計数又常兼用足指，手足合起來有二十指，所以記数法用二十進位也是很自然的。后來由于五進位制基数太少，二十進位制基数太大，便棄而不用；只采用十進位制了。又古代巴比倫因为解决天文上計算問題，采用六十進位制。他們認为一年是 360 天，分一圓周（当时認为太陽繞地球旋轉，这圓周代表太陽运行的軌道）为 360 度，每度再分为 60 等分，每分叫做 1 分，每分再分为 60 等分，每分叫做 1 秒；所以是六十進位制。如果再增加兩个数字代表十和十一，便得十二進位制的記数法。我們曉得 23 在十進位制是表示 $2\times10+3$；但在十二進位制便表示 $2\times12+3$。在十進位制里面的数，假如末位是 0，便能被 10 整除，即能被 2 和 5 整除。在十二進位里面的数，假如末位是 0，可推知能被 12 整除，即能被 2，3，4 和 6 整除。我們看到整除数由兩个增加到四个，这对于計算分数和小数的时候是便当的。近代电子計算机由于电子相吸相斥兩种信号，所以是采用二進位制的。它只要兩个数字 0、1 即可寫出一切的整数。前十二个数是

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1100.

寫起來很麻煩，但用电子計算机計算，其速度不是我們能够想像得到的。所以不要認为十進位制是唯一的最优越的記数法，十二進位制及二進位制在某些地方也有它們的优越的地方。

在自然数列中，如果数 a 在数 b 的后面，那末我們便說数 a

大于数 b, 寫成 $a>b$; 反过來, 如果数 a 在数 b 的前面, 我們便說数 a 小于数 b, 寫成 $a<b$。而 $a=b$ 是表示数 a 与 b 数一样, 也就是說在自然数列中同样数之間可以画上等号, 并且这些数就叫做相等的数。顯然地对于任何二自然数 a, b, 必有且僅有下列关系之一:

$$a>b, \qquad a<b \qquad \text{或} \qquad a=b.$$

我們根据这种比較大小和相等概念, 易知下面两个命題是成立的。

1. 如 $a=c$, 且 $b=c$, 則 $a=b$.

2. 如 $a>b$, 且 $b>c$, 則 $a>c$.

因为在擴大的自然数列中, 0 是第一个数, 其他任何自然数都在零后, 所以上面所講的比較大小相等的概念, 很自然地可以擴展到擴大的自然数列中去。但用这种方法來比較数的大小, 特别是多位数是很不方便的。我們如果結合数位的意义——每一个数字所在的位置, 能獲得下面整数比較大小和相等的意义。

1. 兩个数位相等的整数, 其最高数位的数字較大的数被認为是較大的; 如果它們相等, 則次高数位的数字較大的数被認为是較大的; 依次类推。(数位較多的整数自然是較大的数)

例如 $3125>2125$, $(\because 3>2)$

$3465<3508$, $(\because 3=3, 4<5)$

$3086>3078$, $(\because 3=3, 0=0, 8>7)$

$3567>567$ (数位較多的四位数是大于数位較少的三位数)

2. 兩个数位相等的整数, 如果从最高数位开始所有数位的数字都相等, 則这兩个数相等。

二 整数加法

如果將两羣的事物合起來組成一个新羣，那末表示这个新羣內的事物的数量，就叫做那两个給与羣內每一羣所指出的事物的数量之和。尋求两已知数 a, b 之和的运算，叫做加法；用記号 $a+b$ 表示之。a 叫做被加数，b 叫做加数；a 和 b 都可以叫做加数。两个已知数合併成的数叫做它們的和。

在擴大自然数列中，由于从 a 以下数起，总能够找得到一个数 c，这个数占有以 b 为号碼的位置。所以 a 与 b 的和是存在的。又因为在擴大自然数列中每一个数有一个唯一的后繼数，所以我們从 a 以下数出 b 个数來时，我們必定达到擴大自然数列中一个唯一的数 c，决不可能求出一个異于 c 的数 c' 來，它也表示 a 与 b 的和。所以两个已知数 a 与 b 的和是唯一的数 c。例如要求 4 与 3 的和。4 是一个自然数，它一定有一个而只有一个后繼数。在擴大自然数列中，我們曉得 5 是它的唯一的后繼数。对于 5 來說，6 是它的唯一的后繼数；对于 6 來說，7 是它的唯一的后繼数。所以在 4 后数出 3 个数來时就得到唯一的数 7，那就是說 4 与 3 的和是 7，它是唯一的存在着的。

从日常生活实踐中我們可以看到：設有两个小組的学生，一組有 6 人，另一組有 7 人。把这两小組合併成一組然后数°数看看一共是多少学生。我們可以先数°第一組的学生，再繼續数第二組的学生得和 $6+7$；或者我們先数°第二組的学生再繼續数°第一組的学生得和 $7+6$。因为不論用哪种数°数法，它的总数都是合成一組的人数。所以 $6+7=7+6$.

一般 $$a+b=b+a.$$

这个性質叫做加法交換律. 且我們也可以由此体会到 a, b 都可以叫做加数的道理.

又設有三組学生,第一組有学生 6 人第二組有学生 8 人,第三組有学生 7 人,求三組学生共有多少人. 我們可先把第一、第二兩組合成一組,再把它們的和与第三組合併,則共有学生 $(6+8)+7$. 又可先把第二、第三兩組合成一組,再把它們的和合併到第一組中去,則共有学生 $6+(8+7)$. 因为最后合併成一組的人数是一样的. 所以

$$(6+8)+7=6+(8+7).$$

一般 $$(a+b)+c=a+(b+c).$$

在这里我們看到括弧( )的用处是先求括弧內兩数的和,这个性質叫做加法結合律.

根据擴大自然数列的性質我們用同样方法可以看到:

$$5+0=5, \qquad 0+5=5, \qquad 0+0=0;$$

$$(0+2)+3=2+3=5, \quad 0+(2+3)=0+5=5.$$

即 $$5+0=0+5, \qquad 0+0=0+0;$$

$$(0+2)+3=0+(2+3)$$

所以加法交換律和加法結合律,并不因为零参加到自然数列而丧失它們的正确性.

由于数 $a+b$ 在自然数列中的位置較数 a 为远,故得 $a+b>a$. 又由于和的交换性質得 $a+b>b$; 所以和是大于任一加数的.

但如加数 b 是零,則 $a+b=a$. 因而对于整数來說 $a+b\geqslant a$, $a+b\geqslant b$, 即和不小于每个加数. 所以我們体会到零参加到自然数列中,有些性質是会丧失的.

明确認識了加法的交換律和結合律,我們很容易演算多位

数的加法。

例如
$$
\begin{aligned}
67+58&=(6\text{拾}+7)+(5\text{拾}+8)\\
&=(6\text{拾}+5\text{拾})+(7+8)\\
&=(6\text{拾}+5\text{拾})+(1\text{拾}+5)\\
&=(6\text{拾}+5\text{拾}+1\text{拾})+5\\
&=12\text{拾}+5\\
&=1\text{百}+2\text{拾}+5\\
&=125
\end{aligned}
$$

因此运算的算式可采用下式:

$$
\begin{array}{r}
67\\
+\ 58\\
\hline
125
\end{array}
$$

即把 7 与 8 相加得到 15, 5 是个位数字。把 1 加到十位里去，即把 6, 5 与 1 相加得到 12, 2 是十位数字而 1 是百位数字。这样一來，多位数的加法便簡捷了。

有些加法如果能够灵活运用加法的交換律和結合律，做起來更迅速簡便。

例如
$$
\begin{aligned}
27+49+13+11&=(27+13)+(49+11)\\
&=40+60\\
&=100.
\end{aligned}
$$

又根据加法的交換律和結合律我們可以進行加法驗算，即將加数的位置交換后重新加一次，这样得到的結果应該与第一次計算的相同。但要注意兩次結果的相同并不能絕对保証第一次計算的正确性。因为可能在兩次計算里都有錯誤，而所得的結果却湊巧相同。

三 整数减法

减法是加法的逆运算，即已知兩个加数之和 c 及一个加数 a，要求一个数 x 使

$$a+x=c.$$

未知数 x 叫做兩数之差，用記号 $c-a$ 表示．c 叫做被減数，a 叫做減数。找出兩数之差的运算就叫做減法。根据这个定义我們曉得**被減数是減数与差的和。**

又根据和的性質，則 $c\geqslant a$，即被減数不小于減数。

讓我們來研究兩数之差是否总是存在的問題。

1. $c=a$.

$\because \quad c+0=c, \quad \therefore \quad c-c=0.$

又 $\because \quad 0+0=0, \quad \therefore \quad 0-0=0.$

2. $c>a$.

(1) $a=0$.

$\because \quad c+0=c, \quad \therefore \quad c-0=c.$

(2) c, a 都是自然数。

因为数 c 在数 a 后，所以从数 a 数起，可以碰到数 c.

(3) $c=0$，因为此时減数一定小于零，我們在算術中不研究它。

我們归納上面所述，知道只要被減数不小于減数时，兩数的差是存在的。

設当 $c\geqslant a$, $c-a=x$, $c-a=x'$, 且 $x>x'$.

則另外有一个自然数 x''，使 $x-x'=x''$，而 $x=x'+x''$.