数学园地的盆栽艺术

——代数方程的攀藤算法

王则柯　著

科学普及出版社

内 容 提 要

不动点算法是拓扑学与计算机科学结合的产物，自六十年代末形成以来，得到迅速发展和广泛应用。本书以代数方程求根为例，介绍了新兴的不动点算法。

本书还简要地介绍了复数、复数运算、复数的几何意义和物理意义，这对读者掌握和理解复数很有好处。

书中各节列有适量的例题和思考题。

本书适合于具有高中文化水平的中学师生、大学低年级学生、科技工作者和数学爱好者阅读。

数学园地的盆栽艺术

——代数方程的攀藤算法

王则柯 著

责任编辑：吴之静

封面设计：胡焕然

*

科学普及出版社出版（北京海淀区白石桥路32号）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

河北省新城县印刷厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/32 印张：3 5/8 字数：79千字

1984年10月第1版 1984年10月第1次印刷

印数：1—19,850册 定价：0.48元

统一书号：13051·1331 本社书号：0640

目　　录

一、会解代数方程的机器

珠江中学高一甲班同学们在张老师带领下去滨江区少年宫参观．这几天，少年宫特别热闹，中学电子计算机科学爱好者们自己设计建造的解方程机器吸引着全市的少年朋友．高一甲班的同学，早就盼望着这一天了．

脱了鞋，走进解方程机器的机房，只见一个由有机玻璃平板组成的层架演示器（图1），放置在中央，平板上划着密密麻麻的几乎看不见的格子细线．旁边的操纵台，仿佛是一块普通的仪表板，配备一个英文打字机键盘．

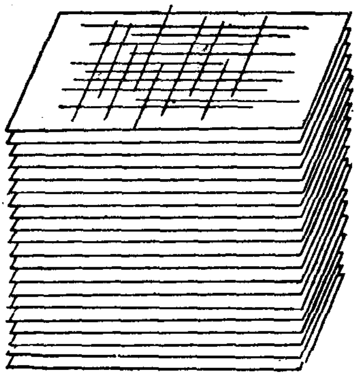

图 1

讲解员同学安排大家围好，说：

“这是我们少年宫自己设计制作的解方程机器，它可以解任何复系数代数方程．在学习它的原理之前，我们先让它表演一下．请同学们随便出几个代数方程题目．”

同学们你看看我，我看看你．

“张老师，什么叫复系数代数方程？”有人悄悄地问．原来，高一的同学还不知道什么叫复数．

“哦，复系数我们先不管它。大家随便出一些你们熟悉的代数方程好了，二次的，三次的，四次五次的都行。”

一元二次方程大家是熟悉的。一个同学心算了一下 $(x+3)(x-4)=x^2-x-12$，说：

“就解 $x^2-x-12=0$ 这个方程吧！”

“好。请大家注意。”讲解员说完，随即在键盘上打下一串拉丁字母和数字：

“S 2；1；－1；－12；0；0；0；J M K”。

只见在最下面的有机玻璃板中央，出现了一个红色的小方框。方框边上，又出现了两个小绿点。慢慢地，两个小绿点竟象绿豆发芽似的，先向方框里钻，然后象藤一样慢慢往上伸展，一直长到最上面的一层玻璃板上。

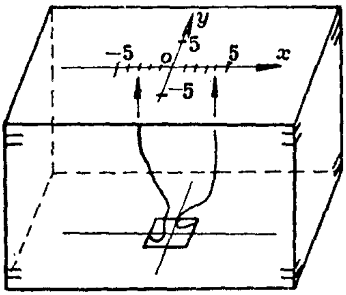

图 2

“请看，它解得对不对？”

这时，同学们才注意到，玻璃板上淡淡地画着褐色的坐标格子。一条绿色的藤指着 x 轴上 $x=4$ 的地方，另一条指着 $x=-3$。

妙极了。同学们一下子兴奋起来。另一个同学争着说：

“我出一个题：$x^2+10x+25=0$。”

讲解员同学又在键盘上打字：

“S 2；1；10；25；0；0；0；JMK”。

S一打下去，原来的小方框和两条藤都消失了。K一打

下去，又出现了刚才的小红框，又是两个绿点，又是两条藤，这两条藤都指向x轴上$x=-5$的那个点。

"这个二次方程有一对重根。"

真是有趣。

"三次方程行不行？"

"当然可以。四次五次，任何次数都行。"

"我出一个：$3x^3-9x^2-18x+24=0$。"

讲解员打字：

"S 3；3；-9；-18；24；0；0；0；0；JMK"。

解出$x=4$，1，-2。

"$2x^4+4x^3-30x^2+8x+40=0$。"

打字。

"S 4；2；4；-30；8；40；0；0；0；0；0；JMK"。

结果，$x=2,2,-1,-5$。

一个调皮的同学说：

"既然任何次数都可以，我就出一个$x^{16}-1=0$。"

"可以。"讲解员同学说，随即打字：

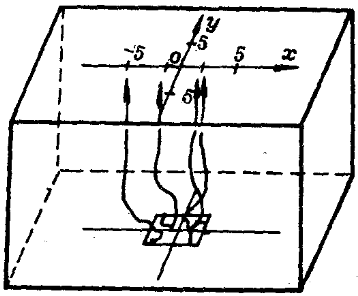

图 3

"S 16；1；0/15；-1；0/17；JMK。"

结果，在下面出现一个大方框，16条藤最后在上面排列成一个小圆圈。

"这是什么意思？"同学们只看见有两条藤正好指向x轴上的1和-1两点，其它的点代表什么数就不明白了。

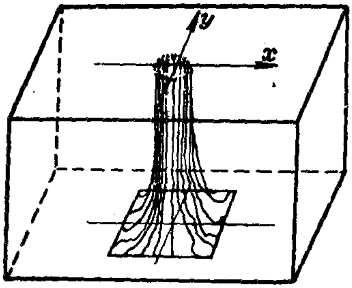

图 4

“方程 $x^{16}-1=0$ 只有两个实根 $x=1$ 和 $x=-1$，其余 14 个根都不是实数根。以后我们学到复数，就会明白了。”

有个同学留心到玻璃板上的坐标里最大的数是10，那么，如果出一个根很大的方程会怎么样呢？他出了一个方程 $x^2-10000=0$。

讲解员打字：

“S　2；1；0；－10000；0；0；0；JMK。”

底层出现一个小红框。两条绿藤刚从方块里抬起头来，就分道扬镳，一个向右，一个向左，似乎要从两侧逃逸出去。的确，演示用的大层架太小了，两条藤施展不开，只好半途而停。过了一会儿，板壁上的莹光屏上直接用数字显示出计算结果：

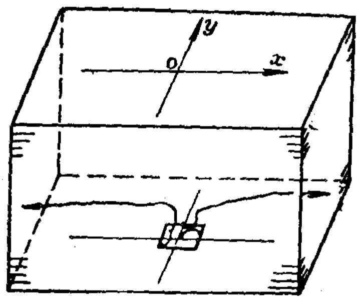

图 5

$$x_1=1.00\times10^2,\ x_2=-1.00\times10^2.$$

“这类题目是难不倒计算机的。”讲解员同学说，“这个大层架，是机器的演示部分，它的大小是有限的，主要是用

来帮助同学们了解机器解题的原理。如果一个方程的根离原点比较远，也就是根的绝对值比较大，演示器容纳不下，不能在层板的有限范围内把根的位置指出来，这时，计算机照样还是可以把根算出来，它就把计算结果直接在显示屏幕上显示。刚才你们看到的，就是解题结果。”

表演到此结束。同学们都很兴奋。

二、二十世纪的现实

读者要问：刚才讲的解题机器，是神话，还是现实？

电子计算机象上面所演示的魔术植物那样解代数方程，是二十世纪七十年代的现实。我国的电子计算机，在1979年，也具备了这样解题的能力。这本小册子的目的，就是向热爱科学的中学生，介绍它的原理。我们从一元二次方程讲起，补充一些复数知识，使每个愿意了解这种七十年代新算法的高中学生掌握这种算法的要领。

有些同学感到数学抽象、枯燥。数学，因为它高度概括了现实世界的空间形式和数量关系，所以是抽象的。但它决不是枯燥的。数学，只要你了解它，就会看到它有时候简直象大自然那么生动。

至于专为帮助同学们理解机器解代数方程的原理而设计的演示器，滨江区少年宫现在还没有。随着社会主义现代化建设的发展，我们的祖国越来越富强，我们民族的科学文化水平越来越提高，国家对教育事业的投资越来越大，在二十世纪的某一天，也许就在八十年代，上面所说的一切，就可

以全部成为现实。读完这本小册的同学是会相信这一点的，因为他们知道，电子计算机现在就可以这样解题。而层架演示器，我们的少年电子技术爱好者，完全有能力设计。

三、从一元二次方程谈起

同学们已经熟悉一元二次方程的解法：因式分解法，配方法，公式法。如果要电子计算机专门解一元二次方程，最好用公式法。因为电子计算机虽然速度很快，准确性很高，但它没有创造性。它是公式主义的，只能按照人们预先教给它的方法"千篇一律"地去处理问题●，因式分解法需要经验，这是同学们都有体会的。但电子计算机本身，只有记忆，没有经验。它不会自己总结经验。

一元二次方程都可以写成下述形式：

$ax^2+bx+c=0$，$a\neq 0$。

它的解是：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

例如，上面的第一个例子：$x^2-x-12=0$，就是$a=1$，$b=-1$，$c=-12$，结果是：

$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-12)}}{2\times1}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}$$

● 以后可以知道，电子计算机本身（"硬件"）虽然是公式主义的，但人们通过各式各样的指令系统（"软件"）指挥电子计算机的本领是不断发展的，这就使人们能够利用电子计算机处理许多错综复杂的问题。

$$=\frac{1\pm7}{2},$$

$x_1=(1+7)/2=4$，$x_2=(1-7)/2=-3$ 。这是大家都会的。

$\triangle=b^2-4ac$，叫做一元二次方程的判别式.初中的同学就知道，一元二次方程当$\triangle>0$时有两个不相等的根，当$\triangle=0$时有一对相等的根,亦即有一对重根.而当$\triangle<0$时，方程没有解，老师强调说，是没有“实数解”.

四、虚数单位 i

老师的这个强调，十分重要. 没有实数解，就是在0和正负数（包括“有理数”和“无理数”）范围内没有解. 例如，很简单的一元二次方程 $x^2+1=0$ 就是这样，$\triangle=b^2-4ac=0^2-4\times1\times1=-4<0$. 事实上，任何实数，不论它是0还是正数还是负数，它的平方都大于或等于0，把它代入方程左端,结果总是大于或等于1,所以它不是方程的根.

现在，我们学习一个新的数i. 它有一条特殊的运算规律：$i^2=-1$.记住这条特殊的运算规律后,我们就可以把i当作一个字母来进行运算. 这个i叫做虚数单位.

虚数是凭空造出来的吗？它有什么用？

虚数的用处大着呢，同学们先别着急. 在第十节和第十二节，你就可以看到它的一些最简单的用处了.

现在，让我们先熟悉一下虚数的脾气.

$i^2=-1$，这是任何实数都没有的性质，因为实数的平

方总是大于或等于 0，不会是负数。根据$i^2=-1$，换一个角度，我们就得到$i=\sqrt{-1}$。这也与我们在实数范围内所得出的结论“负数不能开平方”不同。

首先，我们把这个i看作和初中代数运算中的字母a、b、c或x、y一样来进行运算，如果遇到i^2，就按$i^2=-1$做下去。

于是，$i+i=2i$，$2i+3i=5i$，$5i-8i=-3i$，$ai+bi=(a+b)i$，$3ci-d^2i=(3c-d^2)i$。这些运算，都和实数的代数运算完全一样。

进一步，看乘法运算怎样。

$i\cdot i=i^2=-1$，

$i\cdot 3i=3i^2=3\cdot(-1)=-3$，

$2i\cdot 3i=6i^2=6\cdot(-1)=-6$，

$4i\cdot(-5i)=(-20)\cdot i^2=20$，

$ai\cdot bi=ab\cdot i^2=-ab$，等等。

通过以上不多几个例子，可以总结出一条规律：如果我们把i，$3i$，$-5i$，ai中的1，3，-5，a叫做“系数”，而i，$3i$，$-5i$，ai这类由一个实系数乘一个虚数单位所形成的数叫做**虚数**，那末，虚数的加减乘，就和实数的代数运算基本一样，只要留意$i^2=-1$就可以了。为了稳妥起见，开始运算时可以系数管系数运算，i管i运算，最后再将i^2换成-1。

再看下面稍为复杂一点的几个例子：

$ai\cdot bi\cdot ci=abci^3=abc\cdot i^2\cdot i=abc(-1)i=-abci$，

$2i\cdot 3i\cdot 4i\cdot 5i=120i^4=120(-1)^2=120$，

$6i^3\cdot 7i^4=42i^7=42(i^2)^3\cdot i=42(-1)^3i=-42i$。

这些计算说明，只要记住$i^2=-1$，虚数的运算并不困难。

现在好了，因为$i^2=-1$，所以$i^2+1=0$，所以$x=i$

是方程$x^2+1=0$的一个根。同样，因为$(-i)^2=(-1)^2i^2=-1$，所以$(-i)^2+1=0$，即虚数$x=-i$也是方程$x^2+1=0$的一个根。总起来，$x_1=i$，$x_2=-i$是方程$x^2+1=0$的两个虚数根。

这是虚数的第一个用处，它使象$x^2+1=0$这样的方程有了解。

【例1】 计算$(2i+\sqrt{2}i)(2i-\sqrt{2}i)=?$

解 $(2i+\sqrt{2}i)(2i-\sqrt{2}i)=(2+\sqrt{2})i\cdot(2-\sqrt{2})i=(4-2)\cdot i^2=2(-1)=-2$。

【例2】 计算$(2i+\sqrt{2}i)+(2i-\sqrt{2}i)=?$

解 $(2i+\sqrt{2}i)+(2i-\sqrt{2}i)=2i+\sqrt{2}i+2i-\sqrt{2}i$

$=(2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2})i=4i$。

【例3】 计算$(2i+\sqrt{2}i)-(2i-\sqrt{2}i)=?$

解 $(2i+\sqrt{2}i)(-2i-\sqrt{2}i)=2i+\sqrt{2}i-2i+\sqrt{2}i$

$=(2+\sqrt{2}-2+\sqrt{2})i=2\sqrt{2}i$。

【例4】 $(\sqrt{2}i)^5+(\sqrt{2}i)^7=(\sqrt{2}i)^5[1+(\sqrt{2}i)^2]=(\sqrt{2})^5i^5[1+(\sqrt{2})^2i^2]$

$=4\sqrt{2}(i^2)^2i[1+2(-1)]$

$=4\sqrt{2}(-1)^2i[1-2]=-4\sqrt{2}i$。

以上所运算的数，都是在虚数单位前乘一个实数系数。上面说过，这样的数叫做虚数。为了和以后学习的复数相区别，有时我们把上面所说的虚数，叫做纯虚数。

·练习和思考·

1.计算下列各题：

$4i+9i$；　　$4i-9i$；　　$\sqrt{3}i-\sqrt{2}i$；

$\sqrt{3}i\cdot\sqrt{2}i$； $(3i-4i)(3i+4i)$； $(\sqrt{7}i)^4$；

$(\sqrt{3}i)^3+3\sqrt{3}i$.

2.计算i；i^2；i^3；i^4；i^5；i^6；i^7；i^8；i^9；…. 算后一个时可以利用前一个的结果.

3.观察上题的计算结果有什么规律性？

五、复　　数

讲了纯虚数之后，不免产生这样一个问题：一个实数和一个虚数加在一起，怎么处理呢？

虚数单位是i，实数单位是什么呢？

实数的单位就是1．例如，2就是2个1，$3=3\cdot1$，$a=a\cdot1$，$-b=(-b)\cdot1$，等等．但实数是最基本的数，我们自然约定不写它的单位就是了，并不是它没有单位.

一个实数2和一个虚数$3i$加在一起，记作$2+3i$．即实数部分和虚数部分分开，各自独立.

一般说来，一个实数a和一个虚数bi（这里b是实数，实系数，但bi是虚数）加在一起，叫做一个**复数**，记作$a+bi$，并且，a叫做复数$a+bi$的**实部**，bi叫做复数$a+bi$的**虚部**．实部总写在前面，虚部总写在后面.

所以，复数就是将实数与虚数复合起来的数．例如，$3+\sqrt{2}i$，$\sqrt{5}-0.5i$，$\pi+8i$，$-1000-\sqrt{\pi}i$等等，都是复数.

虚部等于0的复数，就是实数．例如，$3+0i=3$，

$\sqrt{5}+0i=\sqrt{5}$，$\pi+0i=\pi$，$-1000+0i=-1000$就是这样．所以说，复数包括实数，就象实数包括有理数一样．

同样，纯虚数就是实部等于0的复数．

今后，我们有时将实数从复数中区别开来，但一般不将（纯）虚数从复数中区别开来．

例如，在$\frac{1}{2}$，$2+i$，$4i$，$3.33\cdots$，$\sqrt[3]{2}$，$\frac{5-i}{2}$，πi这些数中，$\frac{1}{2}$，$3.33\cdots$，$\sqrt[3]{2}$是实数，而$\frac{1}{2}$，$2+i$，$4i$，$3.33\cdots$，$\sqrt[3]{2}$，$\frac{5-i}{2}$，πi全是复数．

两个复数$a+bi$和$c+di$，如果它们实部相等，虚部也相等，即$a=c$，$b=d$，那么就说这两个复数相等，记作$a+bi=c+di$．

例如，$2+3i=2+3i$，因为等号左右两个复数，实部都是2，虚部都是$3i$．同样，$\frac{3}{2}+\pi i=1.5+\pi i$．

但$3+2i\neq 2+3i$，因为它们实部不相等，一个是3，一个是2，虚部也不相等．

要注意，$\pi+i\neq\pi-i$，因为它们虽然实部相等，但虚部不相等，一个是i，一个是$-i$．

同样$0.0001+\sqrt{2}\,i\neq 0.00001+\sqrt{2}\,i$．

复数的加减乘运算，和初中代数所学的代数运算一样，只要注意$i^2=-1$就可以了．

【例1】 $(5+7i)+(3-4i)=5+7i+3-4i$

$=(5+3)+(7i-4i)=8+3i$．

就是按照实数单位1和虚数单位i各自“合并同类项”．

【例2】 $(5+7i)-(3-4i)=5+7i-3+4i$

$=(5-3)+(7i+4i)=2+11i$。

【例3】 $(5+7i)\cdot(3-4i)=5(3-4i)+7i(3-4i)$

$=15-20i+21i-28i^2=15+i-28(-1)$

$=15+i+28=43+i$。

【例4】 $(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)^2(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)^2$

$=[(\sqrt{2})^2+2\sqrt{2}\sqrt{3}i+(\sqrt{3}i)^2]$

$\cdot[(\sqrt{3})^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}i+(\sqrt{2}i)^2]$

$=(2+2\sqrt{6}i+3i^2)(3-2\sqrt{6}i+2i^2)$

$=(-1+2\sqrt{6}i)(1-2\sqrt{6}i)$

$=(-1)(1-2\sqrt{6}i)+(2\sqrt{6}i)(1-2\sqrt{6}i)$

$=-1+2\sqrt{6}i+2\sqrt{6}i-(2\sqrt{6})^2i^2$

$=-1+4\sqrt{6}i+24=23+4\sqrt{6}i$。

【例5】 上题也可以这样做：

$(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)^2(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)^2$

$=[(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)]^2$

$=[\sqrt{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)+\sqrt{3}i$

$(\sqrt{3}-\sqrt{2}i)]^2$

$=(\sqrt{6}-2i+3i-\sqrt{6}i^2)^2$

$=(2\sqrt{6}+i)^2=(2\sqrt{6})^2+4\sqrt{6}i+i^2$

$=23+4\sqrt{6}i$。

【例6】 $(x+7-5i)(x+7+5i)$

$=(x+7)^2-(5i)^2$

$=x^2+14x+49-25i^2$

$=x^2+14x+74$。

从这些例子可以体会到，复数的加减乘运算并不难，只要将i看作是具有特殊性质$i^2=-1$的字母就可以了。下面讲的除法，也是这样。

有一些简单的除法，同学们马上可以做，比如：（注意，我们不用÷号，用/号）

$\pi i/2=\frac{\pi}{2}i$；

$(4+6i)/2=2+3i$；

$\pi^2 i/\pi i=\pi$（上下“约去”πi）；等等。

头两个，实际上是复数除以实数，那只要实部和虚部系数分别除以那个实数就可以了。

一般的复数除法，即当除数是复数时，我们是这样做的：

【例7】 $\frac{1}{2+i}=\frac{1\cdot(2-i)}{(2+i)(2-i)}=\frac{2-i}{2^2-i^2}=\frac{2-i}{4-(-1)}$

$$=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}i.$$

就是说，当分母（除数）是一个复数（例7中的$2+i$）时，我们使分子分母同乘它的**共轭复数**，即实部相同而虚部相反的数（例7中的$2-i$），就可以将分母实数化。为什么把$a+bi$和$a-bi$叫做一对共轭复数，下一节会说明。同学们可以体会一下，这个分母实数化的做法，与代数运算中的分母有理化做法，十分相象。

【例8】 $\frac{\sqrt{7}-3i}{3-\sqrt{7}i}=\frac{\sqrt{7}-3i}{3-\sqrt{7}i}\cdot\frac{3+\sqrt{7}i}{3+\sqrt{7}i}$

$$=\frac{3\sqrt{7}+7i-9i-3\sqrt{7}i^2}{9+7}=\frac{6\sqrt{7}-2i}{16}$$

$$=\frac{3\sqrt{7}}{8}-\frac{1}{8}i.$$