

高等工程力学系列规划教材

工程弹塑性力学

杨伯源 张义同 编著
徐秉业 主审

125
39



机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS



高等工程力学系列规划教材

工程弹塑性力学

杨伯源 张义同 编著

徐秉业 主审

机械工业出版社

本教材为“高等工程力学系列规划教材”之一。该书的特点是：基础理论扎实；力学概念准确；解题方法简明；例题典型实用；在内容编排上脉络清晰，方便教学与读者自学。

全书共 3 篇 14 章。第 1 篇为弹塑性力学基础，内容包括：应力理论和应变理论。第 2 篇为弹性力学，内容包括：应力应变关系，弹性理论的解题方法，弹性力学平面问题，弹性力学空间问题，热应力简介，弹性力学的变分解法，弹性薄板的弯曲问题。第 3 篇为塑性力学，内容包括：基本概念，屈服准则，塑性本构关系，简单的弹塑性问题，结构的塑性极限分析。

本书可作为机械、动力、材料、土建等非力学专业的研究生和力学专业的高年级本科生教材，也可供工程技术人员参考。

图书在版编目 (CIP) 数据

工程弹塑性力学 / 杨伯源, 张义同编著. —北京: 机械工业出版社, 2003.10

(高等工程力学系列规划教材)

ISBN 7-111-12603-3

I. 工… II. ①杨…②张… III. 工程力学—弹塑性变形理论—高等学校—教材 IV. TB125

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 056819 号

机械工业出版社 (北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037)

责任编辑: 季顺利 版式设计: 霍永明 责任校对: 韩 晶

封面设计: 姚 毅 责任印制: 施 红

北京铭成印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2003 年 9 月第 1 版·第 1 次印刷

1000mm × 1400mm B5·8.75 印张·337 千字

定价: 24.00 元

凡购本书, 如有缺页、倒页、脱页, 由本社发行部调换

本社购书热线电话 (010) 68993821、88379646

封面无防伪标均为盗版

高等工程力学系列教材编委会

主任委员 徐秉业

副主任委员 郭乙木 庄 茁 亢一澜 林 松

委 员 (按姓氏笔画排序)

计欣华 亢一澜 邓宗白 张义同 张少实

庄 茁 朱为玄 林 松 季顺利 肖明葵

杨伯源 武建华 郭乙木 徐秉业 徐铭陶

陶伟明 蒋持平 鲁 阳

秘 书 季顺利

前 言

本书是“高等工程力学系列规划教材”之一，是为高等工科院校非力学专业的研究生和力学专业高年级学生学习弹塑性力学基础知识而编写的一本教学用书。

根据编者长期讲授弹塑性力学课程的体会，这门课具有概念密集、公式繁多、理论性强、初学者难以融会贯通的特点。因此，在本书的编写中，注意组织与选择符合基本要求并与读者对象相适应的学习内容；在内容的阐述中注意讲清基本概念、基本公式和基本解题方法；为了给后续课程打好基础，注意了基本公式与控制方程的建立。另外，还注意吸取国内外多种弹塑性力学教材的优点，尽量达到编委会制定的“基础扎实、概念准确、方法简明、例题典型”的要求。

本书采用从一般到特殊的编写体系，采用分三块(弹塑性力学基础、弹性力学、塑性力学)编写的方法，各块之间既自成体系又相互联系，其目的是使在学时不多的情况下，仍能对弹塑性力学的基本理论和方法有比较完整的了解。根据教学实践，此体系方便教师组织教学，易于学生学习，教学效果良好。

为了确保本教材内容的完整性与实用性，将一部分理论性较强和具有工程实用价值的内容编入本书，并用“*”号注出，在教学学时受限制时此部分内容可以选修，不影响与其他内容的衔接。为加强读者对弹塑性力学基本概念、基本理论的理解和对基本方法的掌握，书中编入了较多的典型例题与习题。

本书由杨伯源教授、张义同教授共同编著，最后由杨伯源教授统稿。巫绪涛老师担任全书文字录排、插图制作、习题解答和一部分校对工作。

本书由徐秉业先生主审，对本书的组织框架和初稿的修改提出了许多宝贵意见，作者在此表示衷心的感谢。

限于编者的水平，本书难免有不妥之处，恳请广大师生和读者批评指正。

作 者

目 录

前言	
绪论	1

第 1 篇 弹塑性力学基础

第 1 章 应力理论	4
1.1 体力与面力的概念	4
1.2 平衡方程	5
1.3 一点的应力状态 边界条件	7
1.4 坐标变换 应力张量	8
1.5 主应力 应力张量不变量	10
1.6 最大切应力	12
1.7 正八面体上的应力	13
1.8 应力张量的分解	14
1.9 习题	15
第 2 章 应变理论	17
2.1 相关位移 位移梯度张量	17
2.2 应变张量及应变分量	18
2.3 转动张量与转动位移	21
2.4 任意方向的线应变	22
2.5 应变张量的分解及不变量	23
2.6 变形协调方程	26
2.7 习题	29

第 2 篇 弹性力学

第 3 章 应力—应变关系	30
3.1 弹性变形过程热力学	30
3.2 广义胡克定律	33

3.3	弹性常数之间的关系	37
3.4	体积改变定律和形状改变定律	38
3.5	线弹性体的应变能	40
3.6	习题	41
第 4 章	弹性理论的解题方法	42
4.1	弹性力学问题的建立及分类	42
4.2	位移解法	43
4.3	应力解法	45
*4.4	常体积力下应力和位移的特点	47
*4.5	弹性理论解的唯一性定理	48
4.6	按位移解题 (半逆解法)	49
4.7	圣维南原理 (局部影响定理)	51
4.8	习题	51
第 5 章	弹性力学平面问题	53
5.1	平面应变问题	53
5.2	广义平面应力问题	55
5.3	应力函数	56
5.4	应力函数法解直角坐标系下的平面问题	59
5.5	极坐标系下的基本方程	65
5.6	轴对称问题 (拉梅问题)	70
5.7	半平面体的边界受力问题 (符拉芒问题)	74
5.8	圆孔的应力集中	77
5.9	楔端受力	79
*5.10	圆板受压问题	82
5.11	习题	83
第 6 章	弹性力学空间问题	86
6.1	弹性力学空间问题基本方程	86
6.2	按应力求解轴对称问题	91
6.3	按位移求解空间轴对称问题	93
6.4	半空间体边界上受法向集中力 (Boussinesq Solution)	96
6.5	半空间体边界上受切向集中力 (Cerruti Solution)	98
6.6	半空间体边界上受法向分布力作用 (1)	99
*6.7	空间半无限体边界上受分布压力作用 (2)	102

*6.8 两弹性体之间的接触·····	107
*6.9 两弹性体间的接触压力·····	110
*6.10 接触区域为圆形时, 接触区中心线上各点的应力·····	114
6.11 习题·····	117
第 7 章 热应力简介 ·····	118
7.1 基本方程式·····	118
7.2 按位移法解热应力问题·····	121
7.3 温度沿径向分布的圆板·····	122
7.4 长圆柱体的热应力·····	123
*7.5 增殖反应堆中释热元件的应力·····	126
7.6 习题·····	128
第 8 章 弹性力学的变分解法 ·····	130
8.1 变形体的虚功原理·····	130
8.2 功的互等定理·····	132
8.3 最小势能原理 虚位移方程·····	133
8.4 最小余能原理 虚应力方程·····	135
8.5 用最小势能原理推导梁的挠曲线方程和边界条件·····	137
8.6 基于最小势能原理的近似计算方法——瑞利-里兹法和伽辽金法·····	139
8.7 习题·····	143
第 9 章 弹性薄板的弯曲问题 ·····	144
9.1 小挠度薄板弯曲的基本假设·····	144
9.2 弹性曲面的基本微分方程·····	145
9.3 薄板的边界条件·····	150
9.4 矩形薄板的纳维 (Navier) 解法·····	152
9.5 矩形薄板的莱维 (Levy) 解法·····	156
9.6 圆薄板的弯曲·····	159
9.7 圆薄板的轴对称弯曲·····	161
9.8 习题·····	163

第 3 篇 塑性力学

第 10 章 塑性力学的基本概念 ·····	167
10.1 基本试验资料·····	167

10.2	应力—应变关系的简化模型	170
10.3	应力状态与应变状态的进一步研究	171
10.4	习题	174
第 11 章	屈服准则	176
11.1	屈服准则的概念	176
11.2	两个常用的屈服准则	178
11.3	屈服准则的实验验证	181
*11.4	莫尔-库仑屈服准则	183
11.5	习题	185
第 12 章	塑性本构关系	186
12.1	加载准则与 Drucker 公设	186
12.2	增量理论 (流动理论)	190
12.3	全量理论 (形变理论)	193
12.4	本构理论的验证与比较	194
12.5	习题	197
第 13 章	简单的弹塑性问题	198
13.1	弹塑性边值问题的提法	198
13.2	梁的弹塑性弯曲	200
13.3	受内压的厚壁圆筒	205
*13.4	幂强化材料的长厚壁圆筒	210
*13.5	等速旋转圆盘的弹塑性分析	213
*13.6	空心圆球的弹塑性分析	216
*13.7	柱体的弹塑性自由扭转	222
13.8	习题	229
第 14 章	结构的塑性极限分析	231
14.1	极限状态与极限分析	231
14.2	极限分析定理	231
14.3	梁的极限分析	234
14.4	超静定刚架的极限分析	236
14.5	平面应变问题的极限载荷	238
14.6	轴对称圆板的极限载荷	243

*14.7 非圆形板的机动解——塑性铰线法·····	247
14.8 习题·····	250
附录·····	252
附录 A 直角坐标张量·····	252
附录 B 习题答案·····	257
参考文献·····	263

Contents

Preface

Exordium.....	1
---------------	---

Part 1 Foundation of elastic-plastic mechanics

Chapter 1 Stress theory.....	4
1.1 Concepts of surface force and body force.....	4
1.2 Equilibrium equations.....	5
1.3 State of stress at a point \$ Boundary conditions.....	7
1.4 Coordinate transformation \$ Stress tensor.....	8
1.5 Principal stress \$ Stress tensor invariants.....	10
1.6 Maximum shear stress.....	12
1.7 Stress on octahedron.....	13
1.8 Decomposition of stress tensor.....	14
1.9 Excercises.....	15
Chapter 2 Strain theory.....	17
2.1 Relateve displacements & Displacement gradient tensor.....	17
2.2 Strain tensor and strain component.....	18
2.3 Rotation tensor and rotation diaplacement.....	21
2.4 Linear strain on any angle.....	22
2.5 Decomposition of strain tensor and invariants.....	23
2.6 Continuity equation of deformation.....	26
2.7 Excercises.....	29

Part 2 Elasticity

Chapter 3 Stress-strain relation.....	30
---------------------------------------	----

3.1	Thermodynamics for elastic deformation process	30
3.2	Generalized Hooke's law	33
3.3	Relations of elastic constants	37
3.4	The law of volume change and distortion	38
3.5	Strain energy of linear elastic body	40
3.6	Exercises	41
Chapter 4	Solutions of elasticity theory	42
4.1	Establishment and classification of elasticity problems	42
4.2	Displacement solutions	43
4.3	Stress solutions	45
*4.4	Stress and displacement under zero body force	47
*4.5	Uniqueness of solutions for elasticity theory	48
4.6	Solutions according to displacement (Inverse or semi-inverse solution)	49
4.7	Saint-Venant's principle (Effect of local stress and strain)	51
4.8	Exercises	51
Chapter 5	Two-dimensional problems in elasticity	53
5.1	Plane strain problems	53
5.2	Generalized plane stress problems	55
5.3	Stress function	56
5.4	Stress function solution for two-dimensional problems in Cartesian coordinate system	59
5.5	Basic equations in polar coordinate system	65
5.6	Axisymmetrical problems (Lame solution)	70
5.7	Concentrated force on a half-plane boundary (Flamant solution)	74
5.8	Stress concentration	77
5.9	Load on wedge point	79
*5.10	Load applied to circular plate	82
5.11	Exercises	83
Chapter 6	Three-dimensional problems in elasticity	86
6.1	Basic equations of three-dimensional problems of elasticity	86
6.2	Solution to axisymmetrical problems with stress	91
6.3	Solution to three-dimensional axisymmetrical problems with displacement	93

XII

6.4 Normal concentrated force applied to elastic half-space (Bourssinesq solution)	96
6.5 Shear concentrated force applied to elastic half-space (Cerrati solution)	98
6.6 Normal distributed force applied to elastic half-space (1)	99
*6.7 Normal distributed force applied to elastic half-space (2)	102
*6.8 Contact of two elastic bodies.....	107
*6.9 Contact pressure of two elastic bodies.....	110
*6.10 Stress on central line of circular contact region.....	114
6.11 Exercises.....	117

Chapter 7 Brief introduction on thermal stress.....118

7.1 Basic equation.....	118
7.2 Displacement solution for thermal stress problems.....	121
7.3 Temperature variance with radius in a circular.....	122
7.4 Thermal stress in a long cylinder.....	123
*7.5 Stress of fuel elements in a multiplicational reactor.....	126
7.6 Exercises.....	128

Chapter 8 Variational calculus in elasticity.....130

8.1 Virtual work principle for deformable body.....	130
8.2 The reciprocity theorem.....	132
8.3 Theorem of minimum potential energy & Virtual displacement equation.....	133
8.4 Theorem of minimum complementary energy & Virtual stress equation.....	135
8.5 Deducing equation of deflection curve and boundary conditions of the beam with theorem of minimum potential energy.....	137
8.6 Rayleigh-Ritz method and Gelarkin method.....	139
8.7 Exercises.....	143

Chapter 9 Bending problems of elastic thin plates.....144

9.1 Basic assumption of small deflection thin plates.....	144
9.2 Basic differential equation of deflection plate.....	145
9.3 Boundary conditions of thin plates.....	150
9.4 Navier solution of rectangular thin plates.....	152
9.5 Levy solution of rectangular plates.....	156
9.6 Bending of circular thin plates.....	159

9.7 Axisymmetric bending of circular thin plates.....	161
9.8 Exercises.....	163

Part 3 Plasticity

Chapter 10 Basic concept of plasticity.....	167
10.1 Basic experimental reference.....	167
10.2 Predigested models of stress-strain relation.....	170
10.3 Further study of the state of stress and strain.....	171
10.4 Exercises.....	174
Chapter 11 Yield criterion.....	176
11.1 Concepts of yield criterion.....	176
11.2 Two common yield criteria.....	178
11.3 Experimental verification of the two yield criteria.....	181
*11.4 Mohr-Coulomb yield criterion.....	183
11.5 Exercises.....	185
Chapter 12 Plastic constitutive relation.....	186
12.1 Loading criteria and Drucker's definition.....	186
12.2 Incremental theory (Flow rule)	190
12.3 Deformation theory.....	193
12.4 Checking and comparison of constitutive relation.....	194
12.5 Exercises.....	197
Chapter 13 Simple elastic-plastic problems.....	198
13.1 The presentation way of elastic-plastic boundary numerical value.....	198
13.2 Elastic-plastic bending of beams.....	200
13.3 Thick-cylinder subject to internal pressure.....	205
*13.4 Long thick-walled cylinder of power hardening material.....	210
*13.5 Elastic-plastic analysis in disks rotating at constant angular velocity.....	213
*13.6 Elastic-plastic analysis in annular thin-walled sphere.....	216
*13.7 Elastic-plastic flexible torsion of cylinder.....	222
13.8 Exercises.....	229

Chapter 14 Plastic limit analysis	231
14.1 Limit state and limit analysis	231
14.2 Limit analysis theorem	231
14.3 Limit analysis of beam	234
14.4 Limit analysis of statically indeterminate frame	236
14.5 Limit load analysis of plane strain problems	238
14.6 Limit analysis of axisymmetrical circular plate	243
*14.7 Flexible solution of non-circular plate-plastic hinges line method	247
14.8 Exercises	250
Appendix	252
Appendix A Cartesian coordinates tensor	252
Appendix B Answers to exercises	257
Reference	263

绪 论

一、弹塑性力学的任务

弹塑性力学是固体力学发展较早、且在实践中得到广泛应用的一个分支，是研究弹性与塑性物体变形规律的一门学科。它推理严谨，计算结果准确，是分析和解决工程技术问题的基础与依据。

弹性力学的研究对象是弹性体，所谓弹性体就是在每一给定温度下物理内存在着应力和应变的单值关系，而与时间无关。通常这一关系是线性的，称为胡克定律。当外力解除后，应变立即消失，而物体完全恢复其原来的形状，同时物体内部应力也完全消失。在弹性力学问题中，一般认为加载是缓慢的，不会引起温度变化和产生任何动能。因此可以认为外力在其作用点位移上所做的功等于物体内部贮存的变形能。而恢复过程就是物体释放变形能的过程。既然时间因素在这里不起作用，那么物体内部的应力和应变只与外载有关，而与加载“历史”无关。

当物体上的外力过大时，卸载后物体的变形只能部分地恢复，物体内仍残存一部分变形，这部分变形称为塑性变形。从物理上看，塑性变形属不可逆过程，并且必然伴随着机械能的损耗，因而它比弹性变形过程要复杂得多。从数学上看，塑性力学问题的本质是非线性的。

二、弹塑性理论的基本假设

与其它许多自然学科一样，弹塑性力学将其研究对象的物理几何性质进行抽象，提出若干规定和假设作为研究前提：

(1) 物体的连续性假设 即将物体看成连续介质，内部没有间隙，因此任意一点的应力、应变和位移都是坐标的连续函数。虽然该假设与现代结构理论相抵触，但可用统计平均概念将它们统一起来。

(2) 物体的均匀各向同性假设 即认为物体内部各点在各个方向的物理性质相同。虽然金属材料的晶体呈各向异性，但通常上述物理性质指某种统计平均值，所以金属材料整体仍不违背基本假设。个别材料如木材、岩石除外。

(3) 物体的位移和应变是很小的 根据这个条件，在考虑物体平衡时可以不计物体尺寸改变，运算中可略去应变的乘积项。

(4) 物体在发生弹性变形前无初应力 即处于“自然状态”。

三、弹塑性力学的解题方法

解弹塑性力学问题采用单元体分析法，即以弹性体内无限小的体积素为研究对象。其一般步骤如下：

1) 将弹性体设想成由许多微小六面体和表面上的四面体组成, 如图 0-1 所示;

2) 考虑六面体的平衡, 得到一组含单元体上未知力的方程式, 称为平衡方程;

3) 考虑表面四面体的平衡, 得到一组关于内应力和边界上外力之间的关系式, 称为边界条件;

4) 考虑物体的连续性, 由各单元体的变形必须协调一致, 又可得到一组方程, 称为变形协调方程;

5) 利用应力与应变之间的线性关系可建立物性方程。

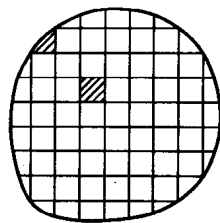


图 0-1 解题方法简图

这样, 我们就有足够的关系式去求解应力和位移。由于以单元体为研究对象, 方程具有微分性质, 解弹塑性问题归结为求解一系列的偏微分方程组。应该注意, 单元体的尺度要比所研究的固体的尺度小, 但并不是数学上的无穷小 (几何学中的点), 而应该远大于固体的微观尺寸。因此, 今后我们所说的某点物理量 (应力、应变、位移等) 都是指以上微分单元体中的统计平均值。

四、符号规定

弹性理论中, 对于应力、应变、位移、弹性模量和泊松比都统一了记号, 文献中常用的应力、应变记号有若干种, 如表 0-1 所示。

表 0-1 应力、应变常用记号

应力分量				应变分量			
一	二	三	四	一	二	三	四
σ_x	X_x	σ_{xx}	σ_{11}	ϵ_x	e_{xx}	ϵ_{xx}	ϵ_{11}
σ_y	Y_y	σ_{yy}	σ_{22}	ϵ_y	e_{yy}	ϵ_{yy}	ϵ_{22}
σ_z	Z_z	σ_{zz}	σ_{33}	ϵ_z	e_{zz}	ϵ_{zz}	ϵ_{33}
τ_{xy}	X_y	τ_{xy}	σ_{12}	γ_{xy}	$2e_{xy}$	$2\epsilon_{xy}$	$2\epsilon_{12}$
τ_{yz}	Y_z	τ_{yz}	σ_{23}	γ_{yz}	$2e_{yz}$	$2\epsilon_{yz}$	$2\epsilon_{23}$
τ_{zx}	Z_x	τ_{zx}	σ_{31}	γ_{zx}	$2e_{zx}$	$2\epsilon_{zx}$	$2\epsilon_{31}$

本书中采用第一、第四种记号。第四种记号一般用于张量式中, 以后用到时再详细介绍。

在第一种记号中, 以 σ 表示正应力, 以 τ 表示切应力。一个下标表示应力地址 (作用面法线方向), 另一个下标表示应力平行的坐标轴, 如 τ_{xy} 表示在 y 面上作用着平行于 x 轴的切应力。由于正应力垂直于作用面, 应力方向与作用面法线重合, 因此只用一个下标就够了, 图 0-2 所示为 18 个应力分量。为了规定应力的正负, 我们将正六面体的六个面分成正面和负面。所谓正面就是该面的外法线沿坐标轴的正向, 反之为负面。应力的正负可规定如下: 正面正向为正, 负面负向为