概率论与数理统计

同步辅导20讲

唐林炜 等 主编

山东大学出版社
Shandong University Press

概率论与数理统计同步辅导二十讲

唐林炜　孟艳双　沙玉英　张来亮　主　编
马宏基　宋韶梅　宋文青　董焕河　副主编

山东大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计同步辅导20讲/唐林炜等主编．
济南:山东大学出版社,2003.3
ISBN 7-5607-2541-4

Ⅰ．概…
Ⅱ．唐…
Ⅲ．①概率论－高等学校－自学参考资料
②数理统计－高等学校－自学参考资料
Ⅳ．021

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第014076号

山东大学出版社出版发行
(山东省济南市山大南路27号　邮政编码:250100)
山 东 省 新 华 书 店 经 销
莱芜市圣龙印务书刊有限责任公司印刷
850×1168毫米　1/32　8.625印张　222千字
2003年3月第1版　2003年3月第1次印刷
印数：1—3000册

山东大学出版社

当我们第一遍读一本好书的时候，我们仿佛觉得找到了一个朋友；当我们再一次读这本好书的时候，仿佛又和老朋友重逢。

——伏尔泰(法国哲学家、思想家)

能够摄取必要营养的人，要比吃得多的人更健康。同样地，真正的学者往往不是读了很多书，而是读了有用的书的人。

——亚里士多德(古希腊哲学家)

前　言

浙江大学《概率论与数理统计》作为高等学校优秀教材被国内许多院校广泛使用，在许多考研辅导书中也广泛使用该书中的一些例题与习题。山东科技大学使用浙江大学《概率论与数理统计》作为教材已有十多年了，在教学中，教师们积累了许多经验与体会，为配合概率论与数理统计课程的教学，编写了辅导讲义，经过多年的使用，受到广大同学欢迎。现在，我们以浙江大学《概率论与数理统计》第三版为蓝本，在教学实践的基础上，对辅导讲义进行完善、修改与补充，现正式出版。

为了方便学生学习、复习、总结，本书从教学要求、考试内容及教学进度等方面基本上与教师讲授课程是同步的。为了让同学初步了解工科硕士研究生入学考试中《概率论与数理统计》部分的知识点和考点，在各讲中还选配了部分历年考研题。

我们在编写本书的过程中，力求将学习中的知识点、考点、题型等都分解到各章各讲中去，使同学们在学习中目标更明确，思考更深刻，总结更清晰。

本书具有学习要求明确、与教学同步、解题证题思路清晰、紧扣教材、有利于复习总结、精选历年考研题、便于了解考研题型等

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

特点。

参加本书编写的还有：曹秀娟、刘晓妍、马燕、郑艳琳、高国成、罗雪梅、宋治涛等老师。

在编写过程中，我们参考了许多书籍，限于篇幅，在书末只列出了部分参考文献，在此一并表示衷心的感谢。

由于出书时间仓促，书中难免有不足之处，请读者批评指正。

编　者

2002年12月于济南

目　　录

第一章　概率论的基本概念

第一讲　随机试验　样本空间　随机事件

一、基本要求

了解样本空间的概念，理解随机事件的概念，熟练掌握事件间的关系和运算。

二、考试内容

（一）随机试验和随机事件

1．随机试验

若试验满足下列三个条件：

(1) 可以在相同条件下重复进行；

(2) 所有可能结果事先可知；

(3) 在进行一次试验之前不能确定哪个结果出现。

则称该试验为随机试验，记作 E。

2．样本空间

试验 E 的所有不可再分解的结果组成的集合称为 E 的样本空间，记作 S。试验 E 的每一个不可再分解的结果称为 E 的样本点，记作 e。样本点是样本空间 S 的元素，即 $e \in S$。

3. 随机事件

用集合论的观点看,试验 E 的样本空间 S 的子集 A 称为 E 的随机事件,即若 $A \subset S$,则 A 为 E 的随机事件。用"发生"的观点看,在试验 E 中,可能发生也可能不发生的事件称为随机事件。

4. 基本事件

由一个样本点组成的单点集 $\{e\}$ 称为基本事件。

5. 事件发生

在试验 E 中,当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时,称事件 A 发生。

6. 必然事件

用集合论的观点看:因 $S \subset S$,所以 S 是 E 的随机事件。用"发生"的观点看:每次试验,S 总是发生,它不是随机事件,通常称为确定性事件,可视为随机事件的极端情形,但为了方便和理论研究中的需要,视它为特殊的随机事件,称为必然事件,记作 S。

7. 不可能事件

用集合论的观点看:因 $\phi \subset S$,所以 ϕ 是 E 的随机事件。与必然事件类似,用"发生"的观点看:每次试验中 ϕ 都不发生,称为不可能事件,记作 ϕ。

(二) 事件间的关系与事件的运算

1. 四种关系

(1) 包含关系($A \subset B$),概率意义:A 发生必然导致 B 发生。

(2) 相等关系($A = B$),概率意义:$A \subset B$ 且 $B \subset A$。

(3) 互不相容($AB = \phi$),概率意义:A 与 B 不能同时发生。

注:基本事件是两两互不相容的。

(4) 互为逆事件($\overline{A}$:$A \cup \overline{A} = S$,$A\overline{A} = \phi$),概率意义:A 与 $\overline{A}$ 不能同时发生,但必然有一个发生。

2. 四种运算

(1) 事件的和:$A \cup B = \{x \mid x \in A$ 或 $x \in B\}$。概率意义:A

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

与B中至少有一个发生。

(2) 事件的积：$AB=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$。概率意义：$A,B$同时发生。

(3) 事件的差：$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$。概率意义：$A$发生且$B$不发生(注：$A-B=A\overline{B}$)。

(4) 互逆：$\overline{A}=\{x\mid x\in S \text{ 且 } x\notin A\}=S-A$。

3. 事件运算的运算律

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$；$AB=BA$

(2) 结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$

$A(BC)=(AB)C=ABC$

(3) 分配律：$A\cup(BC)=(A\cup B)(A\cup C)$

$A(B\cup C)=AB\cup AC$

(4) 德·摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$；$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$

三、例题解析

例 1　(习题第 1 题(1),(3),(4))

写出下列随机试验的样本空间：

(1) 记录一个小班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分)。

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查,合格的记上“正品”,不合格的记上“次品”,如连续查出 2 个次品就停止检查,或检查 4 个产品就停止检查,记录检查的结果。

(4) 在单位圆内任意取一点,记录它的坐标。

知识点：样本空间。

解：(1) 设小班人数为 n,学生得分没有小数,则全班总分所有的可能为：$0,1,\cdots,100n$,所求样本空间即为

$$S=\left\{\frac{i}{n}\mid i=0,1,\cdots,100n\right\}$$

(3) 用 0 表示次品,1 表示正品。

连续查出两个次品停止检查的是:00,100,1100。

连续查四个产品停止检查的是:0100,0101,0110,1010,0111,1101,1011,1110,1111。

故 $S=\{00,100,1100,0100,0101,0110,1010,0111,1101,1011,1110,1111\}$。

(4) 设单位圆内任一点的坐标为(x,y),则

$$S=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$$

注:① 随机试验的样本空间是由试验的所有样本点构成的集合,所以求样本空间只需根据题设条件,把试验的各个样本点都写出来。

② 在确定试验的样本空间时,还必须掌握排列、组合的有关知识。

例 2　(习题第 2 题(6),(7))

设 A,B,C 为三事件,用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件:

(6) A,B,C 中不多于一个发生。

(7) A,B,C 中不多于两个发生。

知识点:随机事件的关系和运算。

解:(6) 解 1:依题意直接写作:$\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}$。

解 2:"A,B,C 不多于一个发生"等价于"A,B,C 都不发生或仅发生一个"表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\,\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}$。

解 3:"A,B,C 不多于一个发生"的逆事件等价于"至少两个发生"表示为 $AB\cup AC\cup BC$,所以"A,B,C 不多于一个发生"表示为$\overline{AB\cup AC\cup BC}$。

注:可以证明这三种表示法等价。

(7) 解 1:"A,B,C 中不多于两个发生"等价于"三个都不发生或三个中发生一个或三个中发生两个",表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}B\overline{C}\cup A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup AB\overline{C}$。

解 2:"A,B,C 中不多于两个发生"等价于"A,B,C 同时发

生是不可能的"，表示为$\overline{ABC}$。

解 3："A,B,C 中不多于两个发生"等价于"A,B,C 中至少有一个不发生"表示为 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$。

注：① 初学概率的人，重要的是学会用概率的语言来解释集合间的关系及运算，并能运用它们。

② 巧妙运用事件间的关系及运算表示复杂事件。

③ 体会"恰好"、"不多于"、"至少"、"至多"等词在概率学习和解题中的作用。

第二讲　事件的概率　等可能概型

一、基本要求

了解频率的概念，了解随机现象的统计规律性，了解概率的统计定义，理解概率的公理化定义，掌握概率的基本性质，会应用这些性质进行计算，理解和掌握等可能概型，了解几何概型，理解实际推断原理。

二、考试内容

1. 频率的定义

在相同条件下，进行 n 次试验，其中事件 A 发生了 n_A 次(频数)，称 $f_n(A)=n_A/n$ 为事件 A 发生的频率。

2. 概率的统计定义

如果在 n 次重复试验中，事件 A 发生了 n_A 次，当 n 逐渐增大时，比值 $f_n(A)=n_A/n$ 稳定地在某一个常数 p 附近摆动，且 n 越大，摆动幅度越小，则称此常数 p 为事件 A 的概率。

3. 概率的公理化定义

设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件

A 赋予一个实数，记作 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$满足下列三条公理：

(1) 非负性　对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性　$P(S)=1$；

(3) 可列可加性　设 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件(即 $i\neq j$时，$A_iA_j=\phi, i, j=1,2,\cdots$)，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup \cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

4. 概率的性质

(1) $P(\phi)=0$。注：反之不一定成立，即 $P(A)=0$ 不能推出 $A=\phi$。

(2) 有限可加性　若 $A_1,\cdots,An$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup\cdots\cup An)=P(A_1)+\cdots+P(An)$$

(3) 单调性　设 A, B 是两个事件，且 $A\subset B$，则有 $P(A)\leqslant P(B)$及

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

(4) 有界性　对任一事件 A，有 $P(A)\leqslant 1$。

注：因 $\phi\subset A$，故有 $P(\phi)\leqslant P(A)$即 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

(5) 逆事件的概率　$P(\overline{A})=1-P(A)$

注：性质 5 是概率论解题中常用的一种方法，当 A 比较“复杂”时，则 $\overline{A}$ 比较“简单”，可以通过计算 $P(\overline{A})$来得到 $P(A)$。

(6) 加法定理　若 A, B 为任意两个事件，则有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

注：① 性质 6 可推广至有限个的情况，如

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

② 性质(2)与性质(6)的区别：仅当 A, B 是两两不相容的事件时，用性质(2)。或者说，性质(2)是性质(6)的特例。

5. 等可能概型

试验 E 若具有下列特点，则称 E 为等可能概型。

(1) $S=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$

(2) $P(e_1)=P(e_2)=\cdots=P(e_n)$

注：① 易知 $P(e_i)=\frac{1}{n},i=1,2,\cdots,n$；② 若 $A=\{e_{i_1},e_{i_2},\cdots,e_{i_k}\}\subset S$，则 $P(A)=k/n$，这就是等可能概型概率的计算公式，解题中常用。

6. 几何概型

当随机试验的样本空间是某一个区域，并且任意一点落在度量(长度、面积和体积)相同的子区域是等可能的，则事件 A 的概率可定义为

$$P(A)=S_A/S$$

其中 S 是样本空间的度量，S_A 是构成事件 A 的子区域的度量。

三、例题解析

例1　(习题第 4 题)　设 A,B,C 是三事件，且 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{4},P(AB)=P(BC)=0,P(AC)=\frac{1}{8}$。求 A,B,C 至少有一个发生的概率。

知识点：概率的性质。

解：因 $ABC\subset AB$，又 $P(AB)=0$，所以 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$。故 $P(ABC)=0$。

于是 $P(A,B,C$ 至少有一个发生$)=P(A\cup B\cup C)$

$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$

$=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-0-\frac{1}{8}-0+0=\frac{5}{8}$。

注：下面求出 $P(ABC)=0$ 的过程是错误的：因为 $P(AB)=0$，所以 $AB=\phi$，所以 $ABC=\phi$，所以 $P(ABC)=0$。请再想一想性质(1)，到第二章讲到

连续型随机变量的性质时，再来看此问题会更清楚。

例 2 （习题第 6 题） 在房间里有 10 个人，分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章，任选 3 人记录其纪念章的号码，(1) 求最小号码为 5 的概率；(2) 求最大号码为 5 的概率。

知识点：等可能概型。

解：10 人中选 3 个，共有 C_{10}^3 种选法。

(1) A = "最小号码为 5" = "一个人号码为 5，其余 2 人从 6～10 号中选号，"有 C_5^2 种选法，故 $P(A)=\dfrac{C_5^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{12}$。

(2) B = "最大号码为 5" = "一个人号码为 5，其余 2 人从 1～4 号中选号"，有 C_4^2 种选法，故 $P(B)=\dfrac{C_4^2}{C_{10}^3}=\dfrac{1}{20}$。

例 3 （习题第 7 题） 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶、红漆 3 桶，在搬运中所有标签脱落，交货人员随意将这些油漆发给顾客。问一个定货为 4 桶白漆、3 桶黑漆、2 桶红漆的顾客，能按所定颜色如数得到定货的概率是多少？

知识点：等可能概型。

解：17 桶漆中任取 9 桶共有取法 $C_{17}^9=24310$ 种。

A = "取出的 9 桶中恰有 4 桶白漆，3 桶黑漆和 2 桶红漆"有取法 $C_{10}^4C_4^3C_3^2=2520$ 种，故 $P(A)=\dfrac{C_{10}^4C_4^3C_3^2}{C_{17}^9}=\dfrac{252}{2431}$。

例 4 （习题第 9 题） 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只，问这 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双的概率是多少？

知识点：等可能概型。

解 1：从 5 双(10 只)中任取 4 只，共有取法 $C_{10}^4=210$ 种(无顺序)。

设 A = "取到的 4 只中至少有两只配成对"，则 $\overline{A}$ = "取到的 4 只均为单只"取法有

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com