工程有限单元法

署恒木　仝兴华　编

石油大学出版社

工程有限单元法

署恒木　仝兴华　编

石油大学出版社

内 容 提 要

本书是一本供初学者掌握有限单元法基本原理、方法及在工程中简单应用的参考书。内容完整，简明易懂。

全书共十一章。第一章为有限单元法概论；第二章为变分原理及加权余量法，介绍了有限单元法的数学基础；第三章为有限单元法的基本步骤；第四章介绍了高阶单元和等参单元；第五章至第七章介绍了有限单元法在固体静力学和动力学中的应用，并介绍了对一些特殊问题的处理方法；第八章和第九章分别介绍了有限单元法在传热学和流体力学中的应用；第十章介绍了有限单元法方程组的解法；第十一章介绍了两个简单有限单元法教学程序，并讨论了目前一般大型通用有限元软件的使用方法。

本书可作为高等工科院校多种专业本科生及研究生的少学时有限单元法课程的教材，也可供有关专业的教师及工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

工程有限单元法/署恒木编．—2版．—东营：石油大学出版社，2002
ISBN 7-5636-1134-7

Ⅰ．工… Ⅱ．署… Ⅲ．有限元法-应用-工程技术 Ⅳ．TB115

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第078988号

工程有限单元法

署恒木 仝兴华 编

出 版 者：石油大学出版社(山东 东营 邮编 257061)
网 址：http://sunctr.hdpu.edu.cn/~upcpress
电子信箱：upcpress@mail.hdpu.edu.cn
排 版 者：石油大学出版社照排中心
印 刷 者：石油大学印刷厂
发 行 者：石油大学出版社(电话 0546—8392563)
开 本：185×260 1/16 印张：15.75 字数：400千字
版 次：2003年1月第2版第1次印刷
印 数：1—1000册
定 价：21.00元

序　言

有限单元法是新近发展起来的一种工程数值计算方法。由于它具有独特的优越性，所以随着计算机的发展得到迅猛的发展。除了用来解决建筑、航空、造船、机械等各个部门中的力学问题外，现在的应用范围已遍及电磁场、热传导、流体力学等多个领域。在石油工业中它也被广泛地应用于石油机械与化工设备、油气储运、测井、油藏描述、油气勘探、采油及钻井多个专业中的应力场、位移场、温度场、压力场等多种变量的数值计算中。

由于有限单元法是在结构问题矩阵分析方法的基础上发展起来的，所以目前的教材大都是讲授固体力学的有限单元法，不适用于没学过力学课程的专业。现在很难找到各专业通用的少学时的有限单元法教材。根据多年的教学经验，我们编写了这本通用教材。本书对有限单元法的理论、方法和应用均做了系统的阐述，其目的是使学生在掌握有限单元法基本原理的同时，对它的实际应用也有一个初步的了解。全书共十一章。第一、二、三、四、十、十一章为通用部分，在这部分里主要讲了有限单元法的基本概念、原理、方法和步骤、方程组的解法及计算机程序，并不涉及专业知识，所以各专业可以通用。第五、六、七章讲述了有限单元法在固体力学中的应用。第八、九章讲述了有限单元法在传热及流体力学中的应用。第五至第九章可以根据专业的需要进行选讲。每章附有若干习题，供学生练习之用。

本书最初是作为石油大学少学时本科生教材，经过校内多次修改印刷，于1998年第一次公开出版。这次修订增加了第四、六、七章内容，可以适用于研究生和工程力学本科专业的学生。在这次修订过程中，力学教研室许多同志提出了不少宝贵意见，并给予大力的支持，编者在此表示诚挚的感谢。

由于编者水平所限，书中不妥之处在所难免，敬请读者批评指正。

编　者

2002年8月

目　　录

第一章　有限单元法概论 …… 1
§1-1　有限单元法的基本概念 …… 1
§1-2　简例 …… 2
§1-3　有限单元法的历史发展 …… 4
§1-4　有限单元法的普遍适用性 …… 4
第二章　变分原理及加权余量法 …… 6
§2-1　泛函与变分的概念 …… 6
§2-2　泛函的极值·欧拉方程 …… 8
§2-3　变分原理的建立 …… 12
§2-4　变分问题的近似解法——里兹法 …… 15
§2-5　加权余量法 …… 20
习题 …… 23
第三章　有限单元法的基本步骤 …… 25
§3-1　有限单元法分析简例 …… 25
§3-2　物体的离散化 …… 28
§3-3　插值函数 …… 31
§3-4　单元特性分析 …… 43
§3-5　整体特性分析 …… 43
§3-6　有限元方程的解和单元场变量计算 …… 47
习题 …… 48
第四章　高次单元和等参单元 …… 50
§4-1　引言 …… 50
§4-2　Lagrange 及 Hermite 插值多项式 …… 50
§4-3　一维单元 …… 53
§4-4　二维单元 …… 55
§4-5　三维单元 …… 63
§4-6　等参单元 …… 66
§4-7　高斯积分法 …… 74
习题 …… 76
第五章　固体力学有限单元法 …… 78
§5-1　弹性力学基本方程 …… 78
§5-2　有限元方程的推导 …… 80
§5-3　一维杆及桁架分析 …… 82
§5-4　刚架分析 …… 89
§5-5　弹性力学的平面问题 …… 99
§5-6　轴对称问题 …… 108

§5-7 平面问题的等参单元 …… 113
习题 …… 115
第六章 动力学有限单元法 …… 117
§6-1 动力学问题的基本方程 …… 117
§6-2 动力学问题的有限元方程 …… 117
§6-3 质量矩阵和阻尼矩阵 …… 119
§6-4 结构的自振特性 …… 121
§6-5 求结构动力响应的直接积分法 …… 124
§6-6 求结构动力响应的振型叠加法 …… 127
习题 …… 129
第七章 有限元应用中的若干问题 …… 130
§7-1 弹性支承的处理 …… 130
§7-2 刚架中间铰的处理 …… 130
§7-3 约束不足和附加约束的处理 …… 132
§7-4 斜支承的处理 …… 133
§7-5 子结构法 …… 134
第八章 传热学有限单元法 …… 136
§8-1 传热学基本方程 …… 136
§8-2 有限元方程的推导 …… 139
§8-3 一维热传导问题 …… 141
§8-4 二维热传导问题 …… 144
§8-5 轴对称热传导问题 …… 150
§8-6 瞬态热传导问题 …… 153
习题 …… 155
第九章 流体力学有限单元法 …… 157
§9-1 流体力学基本方程 …… 157
§9-2 二维不可压缩无粘性流动问题 …… 159
§9-3 渗流问题 …… 168
§9-4 二维不可压缩粘性流问题 …… 171
习题 …… 174
第十章 有限元法方程组的解法 …… 175
§10-1 高斯消元法 …… 175
§10-2 三角分解法 …… 176
§10-3 系数矩阵在计算机中的存储 …… 181
* §10-4 二维等带宽存储的高斯消元法 …… 183
* §10-5 一维变带宽存储的三角分解法 …… 184
习题 …… 185
第十一章 有限元程序 …… 186
§11-1 有限元程序的基本内容 …… 186
§11-2 有限元程序的使用 …… 187

§11-3　平面刚架有限元程序 ………………………………………………………… 188
§11-4　固体、传热、流体有限元程序 ………………………………………………… 192
附录Ⅰ　平面刚架有限元源程序 ……………………………………………………… 201
附录Ⅱ　平面问题(固体、传热、流体)有限元源程序 ………………………………… 224
参考文献 …………………………………………………………………………………… 244

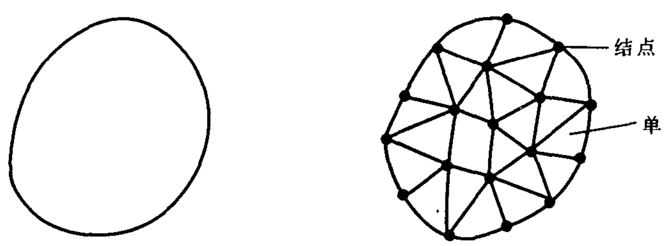
第一章　有限单元法概论

§1-1　有限单元法的基本概念

自然界中的许多实际现象——从简单的自由落体运动到复杂的航空航天技术，从油气资源勘探到天气形势预报等——都是借助于代数方程、微分方程或积分方程来描述和分析它们的自然规律。如固体力学中的平衡方程、几何方程和物理方程，传热学中的热传导方程等。尽管对于许多实际问题已经得到了它们所应遵循的基本方程，但只有那些方程性质比较简单且几何边界相当规则的少数问题才能求出解析解。而对于大多数的工程技术问题，由于物体的几何形状复杂或问题的某些特征是非线性的，则很难得到解析解。解决这种问题通常有两种途径，一是引入简化假设，把基本方程和边界条件简化为能够得到解析解的问题，这种方法只在少数情况下是可行的，因为过多的简化将导致不正确甚至错误的解答。二是人们多年来寻求和发展的另一种解法——数值方法，它可以给出近似的然而却是满足工程精度要求的解答，如变分法及有限差分法等。

有限单元法也是一种数值计算方法，它是随着近几十年来电子计算机的飞速发展和广泛应用而发展起来的。它以大型和复杂问题为对象，未知数可以有成千上万个，可以应用于工程界许多领域，是广大科技工作者、工程技术人员从事科学研究和工程设计的有力工具。

有限单元法是一种非常有效的数值计算方法。其基本前提是将连续的求解域离散为有限个单元的组合体，这样的组合体能较好地模拟或逼近求解域(图1-1)。由于单元能按各种不同的连接方式组合在一起，且单元本身又可以有不同的几何形状，因此可以模拟几何形状复杂的求解域。有限单元法的另一重要步骤是利用在每一个单元内假设的近似函数来表示全求解域上待求的未知场函数。单元内的近似函数通常由未知场变量函数在各个单元结点上的数值及插值函数表达。这样一来，未知场函数的结点值就成为新的未知量，从而使一个连续的无限个自由度问题变成离散的有限个自由度问题，即把一个无限个自由度的连续体理想化为只有有限个自由度的单元集合体。所以有限单元法分析的已不是原有的物体或求解域，而是一个由同样物理性质的用有限个单元按一定方式连接而成的与原求解域相近的离散域。如果求出了结点处的未知量，就可以利用插值函数确定单元组合体上的场函数。显然随着单元数目的增加，亦即单元尺寸的缩小，解的近似程度将不断改进，如果单元是满足收敛要求的，近似解最后将收敛于精确解。



(a) 连续求解域　　(b) 单元组合体

图 1-1

从数学意义上说，就是把微分方程的连续形式转化为代数形式方程组。求解代数方程组要比求解微分方程组简单得多。计算机技术对有限单元法的发展有着决定性的影响。有限单元法要求解算大规模的联立代数方程组，未知数的个数高达成千上万，甚至几十万，没有高速度、大容量的计算机，运算是难以想象的。学习有限单元法，了解和掌握其基本概念、方法和步骤，熟悉一些通用程序，对于今后在实际工作中处理和解决工程问题将是非常有益的。

§1-2　简　　例

为了帮助理解有限单元法的基本思想，我们来考虑一个简单的例子。

设有一半径为R的圆，为了求圆的面积，我们把此圆n等份，作内接和外切正n边形，如图1-2(a)所示，以它们的面积作为圆面积的近似值。下面分步求解。

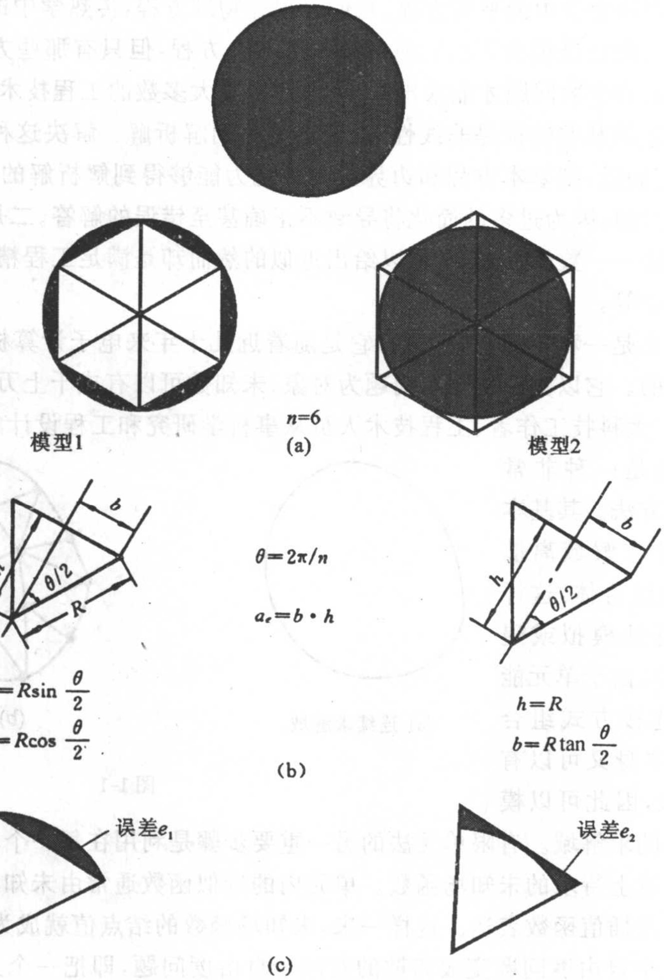


图1-2　圆的有限元模型

(a) 有限元离散模型；(b) 典型单元；(c) 边界误差

1. 区域离散

首先把一个连续的区域——圆，离散为有限个子域——内接或外切三角形的组合。这就是

所谓的“区域离散化”，每一个三角形子域称为一个“单元”，单元的组合体（即圆内接或外切多边形）称为“有限元模型”。图 1-2(a)所示为把圆分为$n=6$个单元的情况。

2. 单元方程

取一典型单元T_e，考虑求单元面积的方程，如图1-2(b)所示。令a_e为圆内接有限元模型中单元e的面积，$\overline{a_e}$为外切模型的单元e的面积，则显然有

$$a_e=\frac{R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n},\qquad \overline{a_e}=R^2\tan\frac{\pi}{n}$$

3. 组合单元方程并求解

圆的近似面积等于各单元面积的和，即

$$A_1=\sum_{e=1}^{n}a_e,\qquad A_2=\sum_{e=1}^{n}\overline{a_e}$$

考虑到我们的模型是均分的，故各单元的面积相同，由此得到

$$A_1^{(n)}=n\frac{R^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n},\qquad A_2^{(n)}=nR^2\tan\frac{\pi}{n}$$

4. 收敛性讨论和误差估计

对于这里所讨论的简单问题，我们已知其精确解即圆的面积为$A_0=\pi R^2$。对于典型单元e，对应的圆上的扇形面积为$S_e=\frac{1}{2}R^2\theta$，则三角形单元与扇形面积间的误差为（见图 1-2(c)）：

$$e_1=|S_e-a_e|,\qquad e_2=|S_e-\overline{a_e}|$$

或者有

$$e_1=R^2\left(\frac{\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$e_2=R^2\left(\tan\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{n}\right)$$

总体误差为

$$E_1^{(n)}=R^2\left(\pi-\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\pi R^2-A_1^{(n)}$$

$$E_2^{(n)}=R^2\left(n\tan\frac{\pi}{n}-\pi\right)=A_2^{(n)}-\pi R^2$$

记

$$A_1^{(n)}=R^2\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}=R^2\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\pi=\pi R^2\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}$$

$$A_2^{(n)}=R^2n\tan\frac{\pi}{n}=\pi R^2\frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$$

则当$n\to\infty$时，有

$$\lim_{n\to\infty}A_1^{(n)}=\lim_{n\to\infty}\left[\pi R^2\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}\right]=\pi R^2$$

$$\lim_{n\to\infty} A_2^{(n)} = \lim_{n\to\infty}\left[\pi R^2 \frac{\tan\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right] = \pi R^2$$

即有 $$\lim_{n\to\infty} E_1^{(n)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} E_2^{(n)} = 0$$

证明了近似解的收敛性。

上面的例子只是简单地说明了有限单元法的基本概念。实际上，用有限单元法求解问题当然不会像在这里介绍的如此简单。首先，问题的定义域会很复杂，可能需要应用多种类型的单元来离散。其次，问题的控制方程会很复杂，在单元上得不到精确解，需利用单元上的近似插值函数，用变分法或加权余量法建立单元方程。并且，一般情况下单元方程不能独立求解，因为要考虑单元间的联系和问题的边界条件和初始条件。另外，对有限元解的误差估计和收敛性证明也是十分复杂的问题，对于与时间有关的问题要把有限单元法和有限差分法相结合，等等。这些都需要我们做进一步的分析与讨论。

§1-3 有限单元法的历史发展

要确定有限单元法最初出现的准确日期是相当困难的，它的思想萌芽可以追溯到很久以前，如上节简例中用圆的内接正多边形的面积来逼近圆的面积的方法，我国魏晋时期的数学家刘徽就已经采用过。他计算了圆内接正 192 边形和正 3 072 边形的面积，求得较精确的圆周率 π 的值。当然有限单元法的提出和发展是近几十年的事情。1943 年，Courant 在他的数学论文中提出在三角形区域内定义分段连续函数求近似数值解。1956 年，美国波音公司的特纳(Turner)和华盛顿大学的马丁(Martin)教授等人采用三角形和矩形单元对机翼结构进行分析研究，获得了成功，把有限单元法的思想发展成为矩阵位移法。1960 年，加利福尼亚大学伯克利分校的克劳夫(Clough)把这个新的工程计算方法由航空结构工程扩展到土木工程，并首先提出了有限单元法这个名字。1965 年，英国辛克维茨教授及其合作者认为有限单元法可以应用于所有场的问题，因为有关场的问题能够写成变分的形式，从而把有限单元法的应用推广到更广泛的范围。我国著名计算数学家冯康教授也从 1956 年开始研究，独立于西方创立了系统化的有限单元法，编出了程序，解决了国防上和工程中一些重大的计算课题。1960 年至1970 年十年间是有限单元法在国际上蓬勃发展的十年，是有限单元法发展史上的一个高潮。

自从有限单元法出现以来，人们很快就认识到了它的潜力，特别是在工程技术领域内。随着计算机的迅速发展和普及，有限单元法的应用也得到了迅猛的发展，并且日趋完善。如今，有限单元法的应用已从开始的固体力学扩展到流体力学、热传导、电磁场、建筑声学与噪音、地质力学及生物力学等各方面。出现了许多大型商业有限元通用软件，并且功能日趋强大且使用方便，使有限单元法的应用更加简单和普及。可以预计，随着计算机技术的发展，有限单元法作为一种具有坚实理论基础和广泛应用价值的数值分析方法，必将在国民经济建设和工程技术领域发挥更大的作用，其自身亦将得到进一步的发展与完善。

§1-4 有限单元法的普遍适用性

通用性是有限单元法的突出特点。目前有限单元法已广泛应用于各种不同的领域，成功地

解决了各种工程问题。考察一下各类工程问题之间存在的相似性，即可看出有限单元法的通用性。为了说明这一点，我们来考虑下述问题。

对于一维热传导问题，由热传导理论得知，对于稳态和物体内部无热源的情况，热量平衡可用Laplace 方程表示，即

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(KA\frac{\partial T}{\partial x}\right)=0 \tag{1-1}$$

式中：K 为热传导系数；A 为热流通过的横截面面积；$\frac{\partial T}{\partial x}$为温度$T$ 沿轴线 x 方向的改变率。

对于一维流体流动，由流体力学得知，对于非粘性流体，其运动微分方程为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho A\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)=0 \tag{1-2}$$

式中：ρ 为流体密度；A 为流体经过的横截面面积；Φ 为势函数。

对于受轴向载荷的一维杆件，由材料力学得知，其平衡方程为

$$P=A\sigma=AE\varepsilon=EA\frac{\partial u}{\partial x}$$

式中：P 为作用于杆端的轴向载荷；σ 为正应力；ε 为应变；u 为杆件的轴向变形。若 P 为常数，则上式可改写为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(EA\frac{\partial u}{\partial x}\right)=0 \tag{1-3}$$

式中：E 为材料的弹性模量；A 为杆件的横截面面积；u 为杆件的轴向变形。

比较式(1-1)、(1-2)和(1-3)，其数学表达式是相似的，这说明有限单元法如果能解决式(1-3)表示的固体力学的问题，也必然可以解决式(1-1)所示的热传导问题和式(1-2)所示的流体力学问题。

第二章　变分原理及加权余量法

§2-1　泛函与变分的概念

变分原理及加权余量法是建立有限元方程的重要理论基础。本章将对这两种方法作一简单介绍，以便能对有限单元法的基本原理有一初步的了解。同时，变分原理及加权余量法又都是独立的处理工程技术问题的有效方法。学习这些方法对于提高分析问题及解决问题的能力将是很有帮助的。下面首先用最速降线问题来引出泛函的概念。

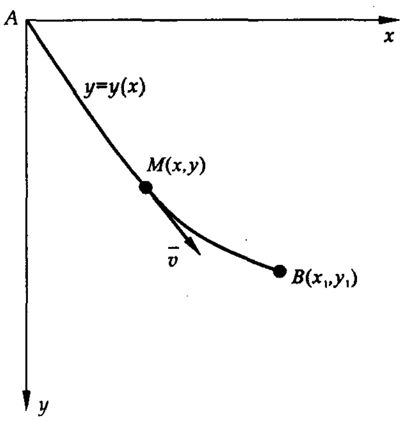


图 2-1

在一铅垂平面内，设有 $A(0,0)$、$B(x_1,y_1)$ 两点，A、B 两点不在同一铅垂线上(图 2-1)，要求在所有连接 AB 的曲线上找出一条曲线，使得当重物从 A 沿此曲线自由滑下时，从 A 到 B 所需时间最少(忽略摩擦力)。

显然，对应于连接 A、B 两点的任一条曲线，质点从 A 到 B 有一个时间 T 与之对应。设 $y=y(x)$ 是连接 AB 的曲线方程，质点从 A 出发沿此曲线运动到点 M 时的速度为 v，设质点的质量为 m，由能量守恒得

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2 \quad 即 \quad v = \sqrt{2gy}$$

若以 s 表示从 A 点算起的弧长曲线，则有

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

其中
$$\mathrm{d}s = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\mathrm{d}x = \sqrt{1 + y'^2}\mathrm{d}x$$

于是有

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v} = \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x$$

质点沿此曲线由 A 到 B 所需时间

$$T = \int_0^T \mathrm{d}t = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}\mathrm{d}x \tag{2-1}$$

由式(2-1)可以看出，时间 T 是函数 $y(x)$ 及其导数 $y'(x)$ 的函数，称之为泛函。最速降线问题可以描述为：寻找满足边界条件 $y(0)=0, y(x_1)=y_1$ 的曲线，使泛函 $T = \int_0^{x_1} \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}}\mathrm{d}x$ 取极小值。这是J·贝努利于1696年提出来的。

泛函和函数不能混淆。函数的自变量是数，而泛函的自变量是函数，因此可以说，泛函是自

变函数的函数。泛函的定义为：

设$\{y(x)\}$是已给的函数集，如果对于这个集合中任一函数$y(x)$，恒有某个确定的数与之对应，记为$\Pi[y]$，则说$\Pi[y]$是定义于集合$\{y(x)\}$上的一个泛函。

从这个定义可以看出，泛函有两个基本点：

(1) 泛函有它的定义域，这个定义域是指满足一定条件的函数集。

(2) 泛函$\Pi[y]$与可取函数$y(x)$有明确的对应关系。泛函的值是由一条可取曲线的整体性质决定的，它表现在“积分”上。

如前所述，最速降线问题最后归结为求泛函极值的问题。求函数的极值用微分，求泛函的极值用变分。下面我们对函数的微分和泛函的变分做一比较。

考察函数$y(x)$，$x\in[a,b]$(图2-2)。对于x的增量Δx，在$x+\Delta x\in[a,b]$时，有$y(x+\Delta x)$，则函数y的增量为

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x)$$

在极限情况下，

$$\Delta x \to \mathrm{d}x \text{（自变量微分）}$$

$$\Delta y \to \mathrm{d}y \text{（函数微分）}$$

忽略高阶微量时，有

$$\mathrm{d}y = y'(x)\mathrm{d}x。$$

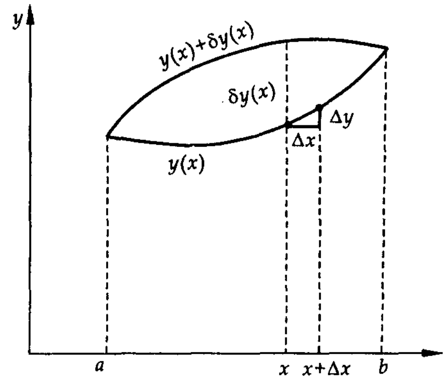


图 2-2

而对于泛函$\Pi[y(x)]$，其自变数为函数$y(x)$。对于某一给定的$x\in[a,b]$，函数$y(x)$的改变微量$\delta y(x)$定义为$y(x)$的变分，则泛函$\Pi[y]$的变分为

$$\delta\Pi = \Pi[y(x)+\delta y(x)] - \Pi[y(x)] \tag{2-2}$$

从图2-2中可以看出，变分$\delta y(x)$是在x不变(即$\delta x=0$)的条件下两条函数曲线上两点函数值之差，而微分$\mathrm{d}y(x)$是在不同x处同一函数曲线上两点函数值之差。这是变分和微分在概念上的不同之处。在运算上，变分和微分有相似的运算法则，如：

$$\left.\begin{aligned}
&\delta(xy) = x\delta y\\
&\delta(uv) = u\delta v + v\delta u\\
&\delta(y') = (\delta y)'\\
&\delta y^n = n y^{n-1}\delta y\\
&\delta\int F\mathrm{d}x = \int\delta F\mathrm{d}x
\end{aligned}\right\} \tag{2-3}$$

等等。

与函数存在极值的条件相类似，泛函$\Pi[y]$在$\{y(x)\}$上取极值的必要条件是其一阶变分为零，即

$$\delta\Pi = 0 \tag{2-4}$$

这种利用泛函Π对于微小的变化δy取极值，即泛函的变分等于零求得问题的解答的方法称为变分原理或变分法。

§ 2-2 泛函的极值·欧拉方程

一、定积分 $\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 的极值

现在来求较简单的泛函

$$\Pi[y(x)] = \int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{2-5}$$

的极值,其中 $y(x)$满足如下的边界条件

$$y(a) = \alpha, \qquad y(b) = \beta \tag{2-6}$$

也就是在自变量 x 的区间 $a \leqslant x \leqslant b$ 内,选择一个 $y(x)$,满足边界条件(2-6)式,并使得泛函式(2-5)取极值。

参考图2-2,设$y(x)$就是欲求的极值曲线,在$y(x)$的近旁构造一类可取函数$y_1(x) = y(x) + \delta y(x)$,$\delta y(x)$是一个任意变化的无穷小量,但必须满足强加边界条件$\delta y(a)=0$,$\delta y(b)=0$。与 $y(x)$和 $y_1(x)$相对应的泛函分别为

$$\Pi[y(x)] = \int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x$$

$$\Pi[y_1(x)] = \int_a^b F(x,y+\delta y,y'+\delta y')\mathrm{d}x$$

泛函的增量,即泛函的变分为

$$\delta\Pi = \int_a^b [F(x,y+\delta y,y'+\delta y') - F(x,y,y')]\mathrm{d}x \tag{2-7}$$

把$F(x,y+\delta y,y'+\delta y')$在任一$x$ 处展成泰勒(*Taylor*)级数,得

$$F(x,y+\delta y,y'+\delta y') = F(x,y,y') + \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \cdots \tag{2-8}$$

把(2-8)式代入(2-7)式,得

$$\delta\Pi = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y' + \cdots\right)\mathrm{d}x$$

忽略高阶微量,则有

$$\delta\Pi = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x \tag{2-9}$$

上式也可以直接对$\Pi[y(x)]$取变分,得到

$$\delta\Pi = \delta\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x = \int_a^b \delta F(x,y,y')\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right)\mathrm{d}x$$

对(2-9)式中的第二项进行分部积分,得

$$\delta\Pi = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x + \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right]\Big|_a^b$$

因为在端点处,y 是已知的固定值,所以 y 不能有变化,即$\delta y(a)=\delta y(b)=0$。所以

$$\delta\Pi = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x \tag{2-10}$$

根据泛函取极值的必要条件$\delta\Pi=0$以及δy 的任意性,可得

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \tag{2-11}$$

上式即为$y(x)$应满足的微分方程，称为欧拉方程。会同边界条件，便能决定$y(x)$了。(2-11)式只是与(2-5)式形式的泛函相对应，每一类问题都有不同形式的欧拉方程，所以重要的是掌握欧拉方程的推导方法，而不在于记住欧拉方程。对于每一类问题应该能做出相应的推导。下面利用(2-11)式，求最速降线问题。

例2-1 已知泛函$T[y(x)]=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x$，求满足边界条件$y(0)=0, y(x_1)=y_1$的曲线，使$T$取极小值。

解

$$F=\frac{1}{\sqrt{2g}}\sqrt{\frac{1+y'^2}{y}},\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}},\quad \frac{\partial F}{\partial y'}=\frac{1}{\sqrt{2g}}\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}$$

代入(2-11)式，得

$$\frac{\sqrt{1+y'^2}}{2y^{3/2}}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1+y'^2}}\right)=0$$

记$p=y'=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，将上式整理得到

$$\frac{2p}{1+p^2}=-\frac{\mathrm{d}y}{y}$$

对上式积分得到 $$1+p^2=\frac{c}{y}$$

c为积分常数，这样便有 $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p=\sqrt{\frac{c-y}{y}}$$

从而有$x=\int_0^y\sqrt{\frac{y}{c-y}}\mathrm{d}y$，令$y=c\sin^2\frac{\theta}{2}$，$\mathrm{d}y=c\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta$

则可得$x=\int_0^\theta\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}c\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=\int_0^\theta c\sin^2\frac{\theta}{2}=\frac{c}{2}\int_0^\theta(1-\cos\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{c}{2}(\theta-\sin\theta)$

即有
$$\begin{cases}x=\frac{c}{2}(\theta-\sin\theta)\\ y=\frac{c}{2}(1-\cos\theta)\end{cases}$$

此组方程是半径为$\frac{c}{2}$的轮沿着x轴滚动时，轮周上一点的轨迹方程，所以这条曲线是一段旋轮线。积分常数c可以从另一个边界条件求得。

二、涉及高阶导数的泛函的极值

设泛函为

$$\Pi[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',y'')\mathrm{d}x$$

求使其取极值时的$y(x)$。取$\Pi[y(x)]$的一阶变分，得到

$$\delta\Pi=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'+\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y''\right]\mathrm{d}x \tag{2-12}$$

利用分部积分，上式中的第二项变为

$$\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\mathrm{d}x=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\delta y\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{2-13}$$

连续二次分部积分，(2-12)式中的第三项成为

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y''\mathrm{d}x&=-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\delta y'\mathrm{d}x+\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'\Big|_{x_1}^{x_2}\\&=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\delta y\mathrm{d}x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}+\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'\Big|_{x_1}^{x_2}\end{aligned} \tag{2-14}$$

将(2-13)及(2-14)式代入(2-12)式，得

$$\delta\Pi=\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]\delta y\mathrm{d}x+\left[\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)\right]\delta y\Big|_{x_1}^{x_2}+\frac{\partial F}{\partial y''}\delta y'\Big|_{x_1}^{x_2} \tag{2-15}$$

令 $\delta\Pi=0$，由 δy 的任意性可以推出欧拉方程为

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0 \tag{2-16}$$

对于(2-15)式的第二项，如果在端点上 y 是已知的，那么 $\delta y=0$，于是第二项恒等于零。如果 y 是未知的，δy 可取任意值，那么必须有

$$\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0$$

对于(2-15)式的第三项可做类似的分析，可知如果在边界上 y' 不是已知的，则应有

$$\frac{\partial F}{\partial y}=0$$

归纳起来边界条件为在 $x=x_1$ 和 $x=x_2$ 处

$$y\text{ 已知}(\delta y=0)\qquad\text{或}\qquad\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)=0$$

$$y'\text{ 已知}(\delta y'=0)\qquad\text{或}\qquad\frac{\partial F}{\partial y''}=0$$

上面左边的条件为本质性边界条件或强加边界条件。右边的边界条件称为自然边界条件，它是根据泛函的极值条件推导出来的，不是事先指定的。对于泛函(2-5)式的极值问题，如果在两端点 a 和 b 处，y 不是已知的，同样可以得出相应的自然边界条件。

类似地，对于泛函 $\Pi=\int_{x_1}^{x_2}F(x,y,y',y'',\cdots,y^{(n)})\mathrm{d}x$，可以得到如下欧拉方程及边界条件

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)-\cdots+(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)=0$$

在 $x=a$ 和 $x=b$ 处

$$\delta y=0,\quad\text{或}\quad\frac{\partial F}{\partial y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)=0$$

$$\delta y'=0,\quad\text{或}\quad\frac{\partial F}{\partial y''}+\cdots+(-1)^{n-2}\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right)=0$$

$$\vdots$$

$$\delta y^{(n-1)}=0,\quad\text{或}\quad\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}=0$$

当微分算子是 $2m$ 阶时，对应的强加边界条件是函数 u 直至 u 的 $m-1$ 阶导数；而自然边界条件是 u 的 m 阶直至 $2m-1$ 阶导数。