東北師範大學數學函授專修班教材

幾何

馬忠林　編譯

東北師範大學函授教育處

1954年12月出版

數學函授專修班

幾　　何

馬忠林　編譯

東北師範大學

1954年12月

數學函授專修班
幾何講義

編選者 馬　忠　林
出版者 東北師範大學函授教育處
印刷者 長春監獄印刷廠
（本校教材，請勿翻印）

1954年12月 初版
1—3,650

目　　錄

幾何學講義

引　　　言

§ 1. 各方面都有限界的空間的一部分，叫做**體**。

空間相隣的兩個領域的公共部分，叫做**面**。一張紙能給我們關於面的近似觀念．實際上 它是在它兩側的兩個領域的界限．但是，嚴格的說，一張紙並不是面：因爲紙有厚度，這兩個領域是被整個的中間領域所分開的．我們來觀察，厚度無限縮小的一張紙，就將得到面的概念。

面的相隣兩個領域的公共部分，我們叫做**線**．顯然，這個定義等值於這樣的定義：**線是兩個面的交**．

我們所引的線，它給與了我們幾何線的觀念，但這個觀念並不是很正確的觀念．因爲它無論是怎樣的細，總是有寬度的，但是幾何線却沒有寬度。

最後，一條線的相隣兩部分的公共部分，或者說，相遇的兩條線的交，我們叫做**點**。點並沒有大小。

點，線，面和體的任意集合，叫做**圖形**。

§ 1*a*. 每條線含有無限多個點。

線也可以看做是點移動的痕跡．就像當我們在紙上引線時，鉛筆或鋼筆尖端的位置（當線十分細的時候，所得的點就近似幾何點）．完全同樣地，可以將面看做是由線的移動而形成的。

一般來說，線或面，是無限多的點所佔的位置的集合，即所謂點的**軌跡**所構成的圖形。

完全同樣地，我們可以將面看做是線移動的軌跡。

§ 2. 幾何學研究圖形的性質和它們之間的相互關係．並且將所研究的結果，寫成**命題**的形式．

命題由兩部分組成：第一部分，叫做**假設**，它是所有的條件的全體；第二部分，叫做**終結**，它是根據假設必然成立的事實。

像下面的命題：“**兩個量 A 和 B，都等於第三個量 C 時，則這兩個量相等**”，假設是命題的前一部分：**量 A 和 B 都等於 C**；終結是後一部分：**這兩個量 A 和 B 相等**．

命題中有這樣的命題，就是我們不加證明而採用的，我們把它叫做**公理**．譬如“兩

個量都等於第三個量時，這兩個量相等". 所有其他被我們叫做定理的命題，必須利用個別的論述加以證明. 爲了引出這種論述，必須根據定理的假設，且如果定理的假設是完全的，從這些事實就能引出定理裡所說的終結.

根據這個，我們應該設想，有下面的某種情況的產生：

1） 如果它是假設的一部分；

2） 如果它是問題裡的元素中之一的定義的一部分[1]；

3） 如果它可以從公理推出；

4） 如果它可以從前面的證明中之一推出.

因此，在任何一個命題的論述裡，就不應當一定看做是正確的. 除非有以上的四個原因中的一個的時候.

§ 2*a*. 已知命題的逆命題，仍是一個命題，它的終結完全地，或部分地與前一個命題的假定一致，反過來也是一樣.

直接由定理推得的命題，我們叫做系（推論）.

爲了便於證明問題的證明，予先所作的命題，我們叫做補助定理.

§ 3. 每個圖形可以用無限多個方法使它在空間裡移動，完全像鋼體的移動那樣，並不改變它原來的形狀. **一個圖形與另一個圖形所有的各部分都完全地重合時，這兩個圖形我們就叫做相等圖形**. 換句話說，**兩個相等圖形是位於兩個不同的位置的同一個圖形**.

經過移動並不變形的圖形，叫做不變的圖形.

§ 4. 線中最簡單的是直線；我們可以設想它恰如一條用力拉直的線. 直線的概念是自明的. 爲了在我們的論述上可能利用這個概念，我們應把它看作是真直的顯然地性質. 特別是下面的兩個命題：

1. **與直線相等的每個圖形，是直線；反過來也一樣. 每條無限直線可與任意另外一條無限直線相重合，因此第一條直線上的任意點可與第二條直線上的一點重合.**

2. **通過兩點能引直線，並且祇能引一條.**

因此，我們可以說，通過點 A 和 B 的直線（或者簡單地說：直線 AB）.

從定義直接可以推出，**兩條不同的直線祇能交於一點**，因爲假如它們有兩個公共點時，就不能是不同的直線了.

由諸直線的部分所組成的線，叫做折線. 此外，既不是直線又不是折線的線，叫做曲線.

§ 5. 兩個點 A 和 B 之間所含的直線的一部分，叫做線段 AB.

直線的一方可以看作是沒有限界的，另一方有一個點作爲它的限界（端點），這樣

1） 對於兩個線段，由前款直接即可得出.

的直線的一部分，叫做**半直線**。根據前面所說的，任意兩條半直線，都是相等的圖形。

如果兩個線段 AB 和 $A'B'$ 中，第一個可以放在第二個上，並且使點 A 與 A' 重合，點 B 與點 B' 相重合時，則這兩個線段叫做**相等的**。

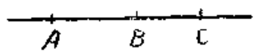

圖 1

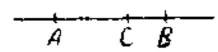

圖 2

根據作爲直線定義的兩個命題，有上面條件的兩個線段的所有點都重合。所以相等線段的定義，完全和上面所說的相等圖形一般的定義是一致的。

使兩個相等的線段 AB 和 $A'B'$ 重合，實際上有兩種不同的方法。也就是：點 A 可以與點 A' 相重，點 B 與點 B' 相重，或者反過來，由於這種相等性，線段 AB 可以轉動，使兩點 A, B 中的每一個到另一個的位置。

如果兩個線段 AB 和 BC 位於一條直線上，並且其中的一個是另一個的延長線（圖 1），則線段 AC 我們叫做這兩個線段的**和**。因此，兩個或若干個線段的和與相加[1]各線段的順序是沒有關係的。

爲了比較兩個線段的大小，必須把它們移到一條直線上，並且使它們是從同一的點引出，方向也相同，例如 AB 和 AC（圖 1 和圖 2）。這時如果點的順序是 A,B,C（圖 1）時，則線段 AC 等於線段 AB 和 BC 的和，在這種情形下我們說它**大於** AB，而 AB **小於** AC；反過來，如果點的順序是 A,C,B（圖 2）時，則線段 AB 大於 AC。在這兩種情形下，第三線段 BC 加上兩個已知線段中的一個就得出第二個線段，我們把它叫做兩個線段的**差**，最後，點 B 和 C 有時可能重合。在這種情形下，恰如我們所知道的，這兩個線段相等。

在每個線段 AB 上，必存在一個點 M，是 AB 的**中點**。它距兩點 A 和 B 有等距離。直線上在 M 和 A 之間的每個點，顯然，它較接近於 A，而距 B 較遠。反過來，在點 M 和 B 之間的所有點，恰與上面的情形相反。

線段 AB 還可以分成任意個相等的部分[2]。

§ 6. 一個沒有限界的面，如果這個面上的任意兩個點所連結的直線，完全在這個面上時，這個面我們就叫做**平面**。

過空間的任意三個點，我們可以引一個平面。平面上的任意直線，將它分成兩個領域，在直線一側的每個領域，都叫做**半平面**。如果不超出平面以外，並且不通過這條直線，就不可能將一個領域移到另一個上。但是使一個領域繞直線旋轉，就可以與另一個重合。

我們首先來研究在平面上的所有圖形。所要研究的圖形，它們是**平面幾何學**的對

[2] 我們可以理解，在線段 AB 上存在着將這個線段分成等份的點。關於這個問題，在以後（第三編）我們再來研究它，可以用器械實際地求出這樣的點。

象.

§ 7. 平面上[3]到已知點 O 有已知距離的點的軌跡，我們叫做**圓周**（圖 3）；已知點叫做**圓心**。

連結圓心與圓周上的一個點的線段，叫做**半徑**。因此所有的半徑都相等。

根據上面的定義，我們要證明平面上的點在這個平面上的圓周上時，祇要證得它到圓心的距離等於半徑就可以了。

每個圓周都把它所在的平面，分成兩個領域：一個叫做**外部**，是沒有界的，它是由到圓心的距離大於半徑的所有點構成；另一個叫做**內部**，是有界的，它是由到圓心的距離小於半徑的所有點構成。後面這個領域，我們把它叫做**圓**。

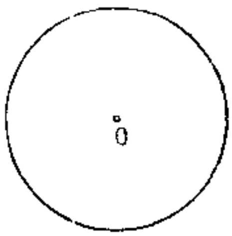

圖 3

很明顯地，圓周由它所在的平面，圓心和半徑，完全可以確定。

圓周常用表示它圓心的字母來表示（當不能誤解時），或者用表示它的半徑的兩個字母來表示；這時應把表示圓心的字母放在前面。因此，圖 4 裡的圓周，可以用《圓 O》，或者用《圓 OM》（如果研究一些有圓心為 O 的圓時，來表示。

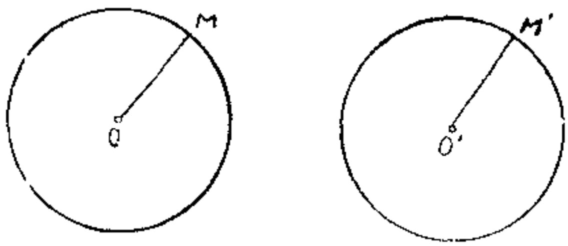

圖 4

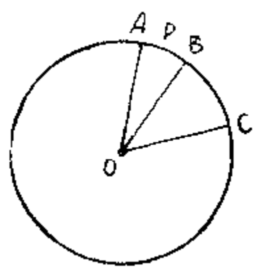

圖 5

有同一半徑的兩個圓周是相等的圖形；很明顯地，當它們的中心相重合時，它們就將重合。

兩個相等的圓周，可以用**無限多的方法**，使其中的一個重合在另一個上；並且當重合時，可以使第二個圓周上的一點 M' 與第一圓周上的已知點 M 重合（圖 4）。為了這個目的，祇要使兩個半徑 OM 和 OM' 重合就可以了，並且這是可能的，因為這兩個線段相等。

§ 8. 圓周的一部分，我們叫做**弧**（圖 5 裡的 ApB）。

由於可以使兩個相等圓周用無限多個方法重合的事實，我們就有像比較線段那樣來

3) 在平面上到平面外的已知點有等距離的點的軌跡（這樣的點存在的時候）是一個圓周，這個問題、在立體幾何學裡可以得到證明。

在空間到已知點有等距離的點的軌跡，是球面。

比較屬於同一圓周或相等圓周上的兩個弧的可能性。為了這個目的，可移動這兩個弧，使它們有同一圓心和一個公共端點，並且在這個公共端點的同一側。設 AB 和 AC 是具有這樣位置的兩個弧，如果我們沿弧 AB [1] 移動點 A，在遇到點 B 以前先遇到點 C 時（圖 6），我們就說，弧 AB 大於弧 AC。反過來，如果點 A,B,C 的順序與前者相反時（圖5），我們就說，弧 AB 小於弧 AC。

§ 8 *a*. 完全同樣地，我們可以定義屬於同一個圓周（或兩個相等圓周）的兩個弧 AB 和 BC 的和（圖 5），祇要使這兩個弧有一個端點相重合，而它們另外的端點，在這個公共端點的不同側就够了。

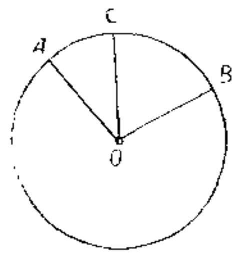

圖 6

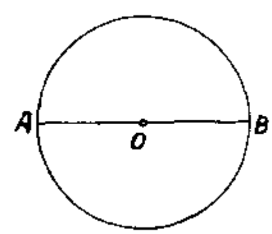

圖 7

弧 AB 也可以像線段那樣，把它分成二等分，或若干等分 [2]。弧也可以被它自身上的點 M 分成兩個弧，使一個弧 AM 大於弧 MB，或弧 AM 小於弧 MB。

§ 9. 如果連結圓周上的兩個點的線段，通過圓心時，這個線段叫做直徑。這兩個點我們就叫做直徑的端點（圖 7 裡的點 A 和 B）。顯然地，直徑的長度等於半徑的二倍.

很明顯地，圓周由它的直徑，完全確定．這時，它的中心是直徑的中點.

直徑 AB 把圓周分成兩個弧。它們分別在直線 AB 所確定的兩個半平面上.

這兩個部分，彼此相等：可以摺疊上述的兩個半平面之一於另一個上(根據§6）因此我們把這兩個都叫做半圓周。

完全同樣地，直徑把圓分成兩部分，當兩個半圓周互相重合時，它們也互相重合。

1) 在這裡當進行移動時，規定方向是很重要的（若是直線時，就不需要），因為點 A 和 B 把圓周分成兩部分，由於我們沿着二弧中的一弧或另一弧移動點 A 時,所遇到點 B 和 C 的順序不同。

2) 像前面對於線段的作法（§ 5，註二），與以同樣的注意就可以了。

第一編　直　線

第一章　角

§ 10. 從同一個點引出的兩條半直線所構成的圖形，叫做**角**. 這個點叫做角的**頂點**，兩條半直線叫做它的**邊**.

我們用表示角的頂點的同一個字母來表示這個角，並將這個字母寫在表示它的邊的其他兩個字母之間；中間的字母常看做是專用的符號. 如果，僅僅包含有已知頂點的一個角的圖形問題則只用表示這個頂點的字母，來表示這個角就够了. 像由兩條半直線 AB, AC 所構成的角（圖8），我們就用 $\angle BAC$，或簡單地用 $\angle A$ 來表示它.

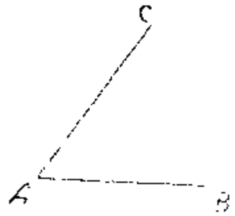

圖 8

按照相等圖形的定義（根據 §3.），如果兩個角中的一個可以重合到另一個上，這兩個角就叫做**相等的**.

兩個相等的角 $\angle BAC$ 和 $\angle B'A'C'$，可以用兩個不同的方法，將其一重合在另一角上，也就是：或者是把邊 $A'B'$ 與邊 AB 重合，邊 $A'C'$ 與邊 AC 重合，或者是反過來作也行。從一個方法可以變到另一個，將一個角實行翻轉，也可以與它自身重合，例如，翻轉角 BAC，使邊 AB 落在它的另一邊 AC 上.

§ 11. 如果兩個角有公共頂點，與一條公共邊，並且它們各在這條公共邊的異側，我們把這兩個角叫做**相鄰的**.

如果兩個角 $\angle AOB$ 和 $\angle BOC$ 是相鄰的（圖 9）角，我們便把角 AOC 叫做這兩個角的**和**. 一些個角的和，與相加的角的順序是沒有關係的.

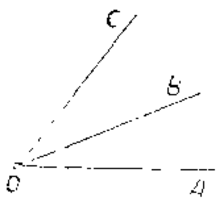

圖 9

爲了比較兩個角的大小，可以移動它們，使其有公共頂點，與一條公共邊，並且使它們都在公共邊的同側.

設已知兩個角 $\angle AOB$ 和 $\angle AOC$ 的位置是這樣的，即如果圍繞着頂點 O 的它們邊的順序是 OA, OB, OC（圖 9）時，則角 AOC 就等於角 AOB 和 BOC 的和；在這種情形下，我們說角 AOC 大於角 AOB，而角 AOB 小於角 AOC；反之（圖10），邊的順序是：OA, OC, OB，則角 AOB 大於角 AOC. 角 BOC 加到兩個已知角的一個上，就得到另一個已知角，所以它是這兩個角的**差**.

最後，在 OB 與 OC 重合的情形下，兩個角相等（參考前一段）.

在每個角 BAC 的內部，存在一條半直線 AM，它把這個角分成兩個相等的部分.

我們把它叫做這個角的**平分線**．從點A引出並且在角 BAM 的內部的半直線，它和 AB 所構成的角小於它和 AC 所構成的角．

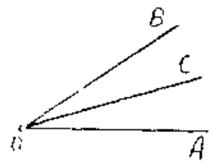

圖 10

如果一個角等於已知角的兩個，三個……等等的和，我們就把這個角，叫做已知角的二倍角、三倍角……等等．最後的這些角，叫做第一個角的**二分角，三分角**……等等．

註：很明顯地，角的大小與它的邊的大小是沒有關係的。所以我們總可以使角的邊無限的延長。

§ 12．如果我們有一個由兩條半直線 OA 和 OB 所構成的角（圖11），並且從點 O 把 OA 延長到 A'，再從點 O 把 OB 延長到 B'，這樣就構成一個新的角 $A'OB'$．

在兩個角 $\angle AOB$，$\angle A'OB'$ 之間，一個角的邊是另一個角的邊的延長線時，則這兩個角叫做**對頂角**．

定理．兩個對頂角相等．

證明．實際上，如果把角 BOA' 實行翻轉，並使其落在它自身上（圖11），邊 OB 就落在 OA' 的位置，另一方面，邊 OA'就落在邊 OB 的原來位置；半直線 OA 是 OA' 的延長線，OB' 是 OB 的延長線，角 AOB 就重合於原來的角 $A'OB'$ 上；所以這兩個角相等．

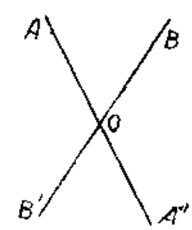

圖 11

§ 13．自圓心所引出的每條半直線，與圓周相交於一個點，並且祇是一個點

頂點爲圓心 O 的每個角 AOB（圖 5）（圓心角），確定以圓周與這個角的兩邊交點爲界的弧 AB．這個弧在任何情形下都小於半圓周，如果取點 A 作爲半圓周的端點，並用以過點 A 的直徑的他端作爲點 B 來看，這個問題就可以得到了說明．

反之，每個小於半圓周的弧，可以看作是由一個圓心角確定的；這個角是過已知弧的端點的半徑所構成的．

定理．於同圓或等圓中：

1）等弧（小於半圓周的）所對應的圓心角也相等，反過來也成立．

2）不等的弧（小於半圓周的）所對應的圓心角也不等，並且較大的弧所對應的角也大．

3）如果某個弧（小於半圓周的）是其他兩個弧的和時，則它所對應的圓心角也是其他兩個弧所對應的兩個圓心角的和．

證明．1°，2°，設 AB AC（圖5）是同一圓周上從一個點 A 向同一方向所引出兩個弧（根據 § 8），兩個圓心角 AOB，AOC 的位置像 §11 所說的那樣，半直線 OA，OB，OC 與在圓周上的點 A，B，C 有相同的順序．此外，如果直線 OB 和 OC 重合，則點 B 和 C 也相重合，反過來也成立．

3°　因爲像在 § 8 a 那樣作兩個弧的和，我們就把兩個弧放置像弧 AB，BC 那樣的

位置（圖 5），則圓心角 AOC 對應着相鄰的兩個圓心角 $\angle AOB$ 與 $\angle BOC$ 所確定的弧的和。

在這個基礎上，要比較不同的角的大小，只要用它們的頂點作爲圓心，在以同一半徑所作的圓周上，來比較這兩個角在圓周上所截取弧的大小就够了。

要把角分成二等分或更多的等分時，我們可以把用該角的頂點作爲圓心所作的圓周被角的兩邊所截取的弧分成二等分或更多的等分，就可以了。

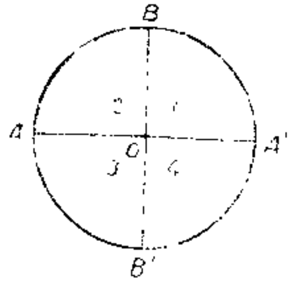

圖 12

§ 14. 如果兩條直線所構成的四個角中，相鄰的兩個角，彼此相等時，我們就說這兩條直線是**互相垂直的**。例如，在圖裡用記號 1 和 2 所表示的角（圖 12）彼此相等時，則直線 AOA' 垂直於直線 BOB'。在這種情形下，以點 O 爲頂點的四個角都彼此相等，因此 $\angle 3$ 和 $\angle 4$ 分別等於 $\angle 1$ 和 $\angle 2$，因爲它們是對頂角。

兩條邊互相垂直的角，叫做**直角**。

定理．在已知平面上，過直線上的已知點，可引這條直線的垂線，並且祇能引一條。

證明．設要求過點 O 引已知直線的垂線時，可以點 O 爲圓心作一圓周，它與已知直線相交於兩點 A 和 A'（圖12），再以點 B 將半圓周 ABA' 分爲二等分．OB 就是所求的垂線；反之，過點 O 垂直於 AA' 的直線，也一定把半圓周 ABA' 分成二等分。

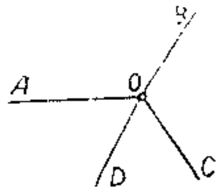

圖 13

系．**我們可以看出，頂點是圓心的直角，它的邊在圓周上所截取的弧等於圓周的四分之一**。

所有的直角都相等．因爲以直角的頂點爲圓心的相等的圓周，被它們所截取的弧都相等。

§ 15. **如果通過已知點，引若干條半直線，它們圍繞着這個點所構成一連串的角（$\angle AOB$，$\angle BOC$，$\angle COD$，$\angle DOA$，圖13）的和，等於四直角**。

實際上，這些角在已知點 O 爲圓心的圓周上，所截取的弧的和等於整個的圓周。

如果過直線上的一個點，在這條直線的同側引若干條半直線（圖14）時，則它們所構成的角的和等於兩直角。因爲這些角所截取的弧的和等於半圓周。

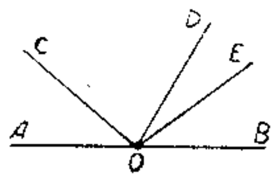

圖 14

反之，**如果有兩個或若干個有共公頂點的角．其中每一個都與前一個相鄰（$\angle AOC$，$\angle COD$，$\angle DOE$，$\angle EOB$，圖14），並且這些角的和等於兩直角時，則這些角的始邊和終邊在一條直線上**。

事實上，始邊和終邊與以共同頂點爲圓心所作的圓周的交點，是直徑的兩個端點，這是因爲這些角所對應的弧，構成半圓周。

§ 15*a*. **定理。兩條相交的直線所構成的四個角的平分線，是兩條互相垂直的直線。**

證明。設 AA' 和 BB'（圖 15）是相交於點 O 的兩條直線，並構成角 $\angle AOB'$，$\angle BOA'$，$\angle A'OB'$，$\angle B'OA$，它們的平分線分別是 OM，ON，OM'，ON'；我們可以斷定：

1） OM 和 OM' 中的一條是另一條的延長線，同樣地，ON 和 ON' 也是這樣的兩條半直線。

2） 所得到的這樣的兩條直線是互相垂直的。

首先，可以說 OM 垂直於 ON，因爲兩個角 $\angle AOB$，$\angle BOA'$ 的和是兩直角，而它們的二分角 $\angle MOB$ 與 $\angle BON$ 的和是直角。將同樣的討論應用到角 $\angle BOA'$ 和 $\angle A'OB'$ 上，則我們就可以看到直線 OM' 垂直於 ON。所以 OM' 是 OM 的延長線；完全同樣地，可知 ON' 是 ON 的延長線。

§ 16. 小於直角的角，叫做**銳角**；大於直角的角，叫做**鈍角**。

如果兩個角的和等於直角時，這兩個角我們把它叫做**互餘的**，如果它們的和等於兩直角時，那麼這兩個角叫做**互補的**。

§ 17. 同種類的兩個量的**比**，是表示一個量含有另一個量的倍數，或者是另一個量的 p 等分（p——整數）。

例如，把線段 AB 分成 5 等分，我們可以看到，如果線段 BC 包含這一等分的三倍，我們就說，線段 BC 與 AB 的比等於 $\frac{3}{5}$。

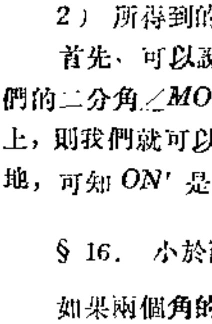

圖 15

又，如果線段 BC 不是包含線段 AB 的 5 等分中一份的整數倍，例如，它含有大於這個線段的三倍，而小於這個線段的四倍時，則 $\frac{3}{5}$ 是比 $\frac{BC}{AB}$ 的**近似值**。並且它是準確度到 $\frac{1}{5}$ 的**不足近似值**。（準確度到 $\frac{1}{5}$ 的**過剩近似值**是 $\frac{4}{5}$）。

兩個同種類的量 a 和 b 的比，與另外同種類（但不一定與前者是同種類）的兩個量 a' 和 b' 的比之間，如果無論 n 是任何數，準確度取到 $\frac{1}{n}$ 的第一個比值，等於準確度取到 $\frac{1}{n}$ 的第二個比值時，則這兩個比相等。

已知量關於採用作爲單位的同種類量的測度，就是已知量與這個單位的比。

我們可以說明下面的性質：

1° **關於同一個單位，有同一測度的兩個量相等。**

2° **同種類的兩個量的比，等於它們關於同一單位的測度的數的比。**

3° 兩個數的比，等於這兩個數的商。

定理．在同一圓周或相等的圓周中，兩個圓心角的比，等於它們的邊所截取的弧的比。

證明。設[1] 已知圓周 O 的兩個弧 AB 和 CD（圖16）．若把圓心角 AOB 分成三等分，並且假定，角 COD 含有其中一等分的四倍多，但小於它的五倍，於是準確度到 $\frac{1}{3}$ 的比 $\frac{\angle COD}{\angle AOB}$ 的比值是 $\frac{4}{3}$．

但是，把角 AOB 分成三等分，同時弧 AB 也被分成三等分．（根據§13），如果角 COD 大於角 AOB 的三分角的四倍，而小於它的五倍．這就證明了弧 CD 大於弧 AB 的四倍而小於它的五倍．

準確度到 $\frac{1}{3}$ 的兩個測度的比值，對於任意値 n，完全等於準確度到 $\frac{1}{n}$ 的兩個測度的比值，所以本定理得到了證明．

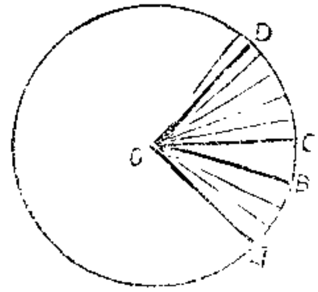

圖 16

系．如果採用它的兩個邊間所夾的弧作爲單位弧的圓心角作爲角的單位時，則每個圓心角和它所對的弧有相同的測度．

這個命題，歸結於上面的定理．因爲量的測度，是這個量與單位量的比．

假如我們在每個圓周上取作爲角的單位的圓心角的兩邊間所夾的弧作爲弧的單位時，則上面的系我們就可以寫作：圓心角可以用它的兩條邊間所夾的弧來測量．

§ 8．使用方才所建立的定義，我們就能引出一個重要的結果．

首先，我們可以想到，關於所有的量我們都可以說，它的測度是由所選定的每個同種類的單位量所確定；其次，在我們所寫的所有的等式裡，等式的左邊和右邊所包含的量，並不是量本身，而祇是這些量的測度．

因此，我們可以寫出一系列的等式，如果沒有這些假定，它就沒有任何意義了．例如，表示不同種類的量相等的測度的數，我們可以把它們看作是相等的．在這種情形下的等式的意義，我們完全可以瞭解了．同樣地，我們也可以寫任意兩個量的積，這是因爲兩個數的積，已經定義了的，等等．

但是，一直到現在我們所寫的是兩個同種類量相等的等式．這樣的等式，也和我們上面所說的那樣的等式，完全有同樣的意義．因爲兩個量間的等式和它們測度間的等式，是可由其中的一個得到另一個的（根據 § 17）．

1） 假如採用下列算術的假定（丹聶利〈*Таннери*〉著算術教程，第十二章，）：假設 1）第一個量的某一個同一値，恒對應着第二個量的一個同一値，且 2）第一個量的兩個値的和恒對應第二個量的兩對應値的和時，則這兩個量成比例．這裡，滿足這兩個條件．在本定理的證明原文裡，只是對算術的一般定理已知的特殊情形加以證明了．

根據這個，如果 AB 是某一個弧，O 是圓心，我們就可以寫成：

$$\angle AOB = \text{弧 } AB.$$

在這個情形下，更需要强調的是，對於這樣的等式，必須假定我們取選定的角的單位和弧的單位滿足上面所說的條件。

§ 18*a*. 把圓周分成 360 等分，每個等分我們叫做度，每一度含有 60 分，每一分再分成 60 秒。於是，弧可以用度來測量，因此角也可以用度來測量。角所含有的度，分，和秒數，等於這個角在以它的頂點爲圓心的圓周上兩邊所截取的弧的度，分，和秒數；直角所對應的弧是圓周的四分之一，或 90 度。由此推出，圓心角的測度，是用它所對應的弧來計算，與圓周的半徑無關，這是因爲所選定的角的單位（度）是與半徑沒有關係的，而是直角的九十分之一。

若用度，分，秒來表示角（或弧）的大小，可以用下面的寫法：87 度 34 分 51 秒的角，寫作：$87°34'51''$.

用另一種分割圓周的方法，對於求每個已知測度的角，也可以引進十進位制的測度系，這時候，它不是把圓周分成 360 等分，而是分成 400 等分，每一等分叫做級，顯然，級小於度，因爲它是直角的一百等分之一。

級再按十進位制，分成更小的等分，這些小的等分，沒有再給它特別命名的必要。按十進位的原則，很簡單地就可以寫出。

因此，我們可以提到角 3^G，5417（也就是 3 級又萬分之 5417）。

但是，級的百分之一，我們常把它叫做級分，並且用符號`來表示，（代替六十進位制的分；也就是度的六十分之一的符號 $'$）。同樣地，級分的百分之一（級的萬分之一），叫做級秒，用符號``來表示。因此，上面的角按照這個進位法，可以寫作：

$$3^G54`17``.$$

一級是 $\frac{360°}{400}$ 或 $\frac{9}{10}$ 度，或 $54'$. 而一度是 $\frac{400^G}{360} = 1^G11`,1\cdots\cdots$（或 $\frac{10}{9}$ 級）。

§ 19. **定理．過直線外的一點，可引這條直線的垂線，並且祇能引一條．**

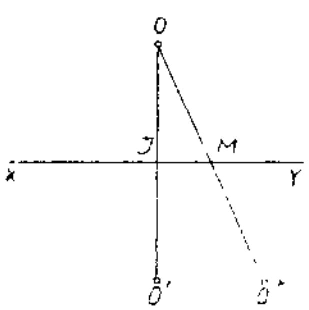

圖 17

證明 1° 引垂線的可能性。如設已知點爲 O，及已知直線 XY（圖 17）。把點 O 所在的半平面，繞直線 XY 就像圍繞一個軸那樣地旋轉，使它和另一個半平面相重合。點 O 落在點 O' 上。連結直線 OO'.

因爲這條直線是連結直線 XY 異側的兩點，所以它和直線 XY 相交。設 I 是交點。角 $O'IX$ 和 OIX 是直角，因爲把一個半平面繞直線 XY 旋轉，與另一個半平面重合後，角 $O'IX$ 是落到角 OIX 的位置．所以，直線 XY 和 OO' 垂直。

2° 垂線的唯一性．設 OM 是過點 O 垂直於 XY 的直線：假如在這條直線的延長線上取 MO'' 等於 OM。我們若翻摺一個半平面，使它重合於另一個半平面上，直線 MO 必落在 MO'' 上，因爲角 OMX 和 $O''MX$ 都等於直角，且 $MO''=MO$，則點 O 落在點 O'' 上，所以點 O' 與點 O'' 重合，並且直線 OO'' 與 OO' 重合。

§ 19*a*．如果有一個點，它在從已知點 O 向直線 XY 所引垂線的延長線上，且它到直線 XY 的距離，等於點 O 到這條直線所作垂線的長時，則這點我們叫做點 O 關於直線 XY 的**對稱點**．由上面所說的，可以知道點 O 的對稱點是點 O 繞軸 XY 旋轉後的位置（據§19，1°）．如果已知某個圖形，我們可作出這個圖形的每個點的對稱點．這些對稱點的集合構成一個新的圖形，它叫做前一個已知圖形的**對稱圖形**．由此可以看出，爲了得到已知圖形關於直線 XY 的對稱圖形時，可以繞直線 XY 翻摺已知圖形所在的半平面，使這條直線所確定的兩半平面之一落在另一個上．已知圖形的新位置，就是所要求的圖形．由此得出：

定理．兩個對稱圖形相等．

系．直線的對稱圖形，仍是直線．

如果一個圖形與它的關於直線 XY 的對稱圖形重合時，則我們就說這兩個圖形關於這條直線是對稱的，或者說它們有這條直線是**對稱軸**。

§ 20．要使圖形 F 和它的對稱圖形重合，我們應該實行這樣的一種移動．在這種情形下，已知圖形必須離開它所在的平面。我們必須注意到，沒有這樣的移動，是不可能使圖形相重合的；這樣我們就發見圖形的兩種相反的旋轉方向，我們用下面的敍述來說明．

首先，我們應注意到，圖形所在的平面把空間分成兩個區域．其中的一個我們簡單地把它叫做位於平面上方的區域，另一個叫做位於平面下方的區域．

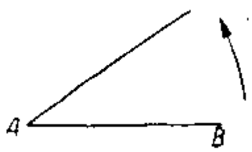

圖 18

假設圖 F 有一個角 BAC，它可以看作是從半直線 AB 的位置通過該角的內部移動到 AC 的位置而構成的（圖18）．當我們從上面看這個平面時，我們根據這條半直線的旋轉方向是與時針的旋轉方向相反[1]或相同，就說這個角有正向或負向．

對於這樣的規定，就有下面的兩種情形．當觀察者在 AB 上站在點 A 的位置，而面向 AB 的方向，向下看平面時，則邊 AC 在自己的左側；所以，如果沿着 AB 原位不動而面向 AC 的方向時，則在平面下方的空間部分在自己的右側．

很明顯地，如果當我們從下面來看平面時，完全可以重覆像上面的敍述，只用"上"

1）應注意到，所指出的旋轉方向，是決定於所取被考察角的邊的順序．比如，角 BAC 對於按角 CAB 來考察就有反對的方向。