

中等体育学校讲义



数 学



体育院校教材编审委员会
数学编选小组 编

中等体育学校讲义

数 学

体育院校教材编审委员会

数学编选小组 编

人民体育出版社

教一書号: 7015·1138

中等体育学校讲义

数 学

体育院校教材编审委员会

数学编选小组 编

人民体育出版社出版·北京·德胜门内大街

(北京市书刊出版业营业登记证出字第049号)

北京崇文印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

全国新华书店经售

850×1168 1/32 286千字 印张11 $\frac{22}{32}$ 插页1

1961年 7 月第1版

1961年 7 月第1次印刷

印数: 1—5,000

定 价[8]1.30元

編者的話

这本講义，是根据1960年8月中华人民共和国体育运动委员会教育司所审編的中等体育学校数学教学大綱(草案)，以原(工高等教育出版社出版的中等专业学校的代数、几何、三角教科書业、农林、財經性質专业适用)为基础，参考了九年一貫制数学試用課本而編选的。

本講义，包括代数、几何、三角的主要內容，增添了二次曲綫、排列組合、概率論初步、制图、測量等数学知識。整个講义內容建立成为一个以函数为綱，理論联系实际的新体系。在文字叙述方面，力求通俗易懂，例如习题尽量做到結合实际。

本講义，由赵津生、卢翠容、徐代树、郭玉虹、曹書璵、刘新民六位教师，采取分工执笔，集体討論的办法編选的。由于時間仓促，編者水平有限，錯誤之处，在所难免，希望各地教师和讀者予以批評和指正。

体育院校教材編审委员会

数学編选小組

1961年4月

目 录

編者的話

第一章 幂与方根

一 无理数..... 1

§1 綫段的度量..... 2

§2 无理数..... 5

§3 实数..... 8

§4 实数的运算..... 9

习 題

二 整指数幂.....11

§5 正整指数幂.....11

§6 零指数幂和負指数
幂.....14

§7 零指数幂和負整指
数幂的运算.....16

习 題

三 方根和分指数幂 ...18

§8 方根的意义.....18

§9 方根的性质.....19

§10 算术根.....20

§11 积、分式、幂的算术
根.....21

§12 分指数幂.....22

§13 分指数幂的运算.....23

习 題

四 根式27

§14 根式的意义.....27

§15 根式的基本性质.....28

§16 根式的变形.....29

§17 根式的化簡.....31

§18 根式的加減法.....31

§19 根式的乘法.....32

§20 根式的除法.....33

§21 根式的乘方和开方...35

习 題

五 近似計算39

§22 准确数和近似数.....39

§23 关于誤差的理論.....40

§24 近似数的計算.....44

§25 計算数字法則.....48

§26 預定准确度的計算...49

习 題

第二章 相似形

一 比例綫段.....53

§1 綫段的比.....53

§2 比例綫段.....53

§3 关于比例綫段的定
理.....56

习 題

二 相似形.....62

§4 相似形的概念.....62

§5 相似多边形.....63

§6 三角形相似的判定
定理.....64

§7 相似三角形的一些
主要性質.....70

§8 比例規.....71

习題

三 直角三角形和圓
中各綫段的度量
关系.....75

§9 点和綫段在直綫上的
射影.....75

§10 直角三角形中各綫
段間的相互关系.....76

§11 圓中各綫段間相互
关系.....79

习題

四 相似多边形的性質
与作图.....83

§12 相似多边形的性質.....83

§13 相似多边形的作图.....84

§14 放縮尺.....86

习題

五 实习作业——測
量.....89

§15 平板仪的构造.....89

§16 平板仪的使用方法.....93

第三章 一次函数

一 函数的概念.....97

§1 常量与变量.....97

§2 函数的定义.....98

§3 函数关系的表示法.....99

§4 直角坐标系.....101

§5 函数的图象.....102

二 一次函数及其图

象.....104

§6 一次函数及其图象.....104

§7 直綫方程.....188

习題

第四章 二次函数与二次 曲綫

一 二次函数.....117

§1 二次函数的概念.....117

§2 二次函数的图象.....117

§3 二次函数的性質.....122

习題

§4 一元二次方程.....125

习題

二 二次曲綫.....140

§5 圓.....140

§6 橢圓.....142

§7 双曲綫.....145

§8 拋物綫.....149

§9 圓錐截綫.....151

习題

§10 二元二次方程組.....153

习題

第五章 指数函数与对数 函数

一 指数函数.....161

\$1	无理指数幂的概念	161
\$2	指数函数的概念	162
\$3	指数函数的图象和性质	162

习 题

二 对数函数..... 165

\$4	对数的概念	165
\$5	对数函数的定义、图象和性质	168
\$6	积和幂的对数	171

习 题

三 十进对数.....176

\$7	十进对数	176
\$8	对数表	181
\$9	对数的运算	183

习 题

四 计算尺.....187

\$10	计算尺的构造原理	189
\$11	计算尺的使用方法	191

习 题

第六章 三角函数

一 角的概念的推广、

弧度制.....203

\$1	角的概念的推广	204
\$2	弧度制	206
\$3	弧度和角度的关系	207
\$4	弧长、圆心角和半径的关系	208

习 题

二 三角函数的概念及

图象.....210

\$5	三角函数的概念	210
\$6	三角函数线	212
\$7	特殊角的三角函数值	214
\$8	三角函数在各象限中的符号	217
\$9	已知一个角的三角函数值, 求此角	218

习 题

\$10	任意角的三角函数	220
\$11	三角函数的周期性	222
\$12	三角函数的图象	223

习 题

三 基本公式.....229

\$13	基本恒等式	229
------	-------	-----

习 题

\$14	简化公式	233
------	------	-----

习 题

四 直角三角形解法.....238

\$15	三角函数表	238
------	-------	-----

习 题

\$16	直角三角形解法	242
------	---------	-----

习 题

\$17	三角函数尺	248
------	-------	-----

习 题

五 二角和差的三角函

数、倍角、半角公式	253
-----------	-----

\$18	二角和差的正弦、余
------	-----------

弦、正切、余切……253

\$19 倍角公式和半角公式……256

习 題

六 斜三角形解法……259

\$20 基本定理……259

\$21 应用問題……261

习 題

实习作业——三角測量……269

第七章 数列、排列、組合、 概率論初步

一 数列……273

\$1 数列的概念……273

习 題

\$2 等差数列……279

\$3 等比数列……284

习 題

二 排列、組合……291

\$4 排列……291

\$5 組合……295

\$6 重复排列……300

习 題

三 概率論的初步知

識……304

\$7 偶然事件和必然事件……304

\$8 概率的概念……306

\$9 概率的性質……309

\$10 概率的求法……311

习 題

第八章 制图与計算

一 平面图形的制图与

計算……323

\$1 基本知識……323

习 題

\$2 基本作图……330

习 題

\$3 場地的制图与計算……341

习 題

二 立体图形的制图与
体积公式……344

\$4 空間直綫与平面的相
关位置……344

习 題

\$5 柱、錐、台、球……348

习 題

\$6 軸測投影……352

习 題

\$7 棧体的体积公式……352

习 題

\$8 旋轉体的体积公式……363

第一章 幂与方根

一 无理数

在我們研究各种事物和現象的时候，总要考虑到“量”的問題。

量的种类是很多的，如在我們日常生活和生产实际中，常遇到的长度、重量、体积、面积、溫度、時間等等，它們都是量的不同形式的表現，或者說，它們是不同种类的量。量的表現虽然有不同的形式，但都具有一个共同的性質，就是可以用选定的同类量做单位，一个单位一个单位的来量。例如：我們选定一尺作单位，来量某一段布或某一条綫段的长，假如，量得的长是5尺、12尺；又如：选定以斤作单位，来量某一堆煤的重量是500斤，一挑谷物的重量是1000斤。那末，数5、12、500、1000都确切的表达了这些量的多少。

实际上，只有通过数才能确切的表达量的实际情况，才能比較量的多少、大小和說明量的变化。同时也只有把数和量结合起来，数才有它的实际意义。因此，要研究量与量之間的变化，量与量之間的关系的时候，都得通过数来做研究的工具。

在初中代数里，我們根据实际生活中存在着相反方向的量，曾經引进了負数来适应研究这些量的需要，把数的范围扩充到有理数，它包括一切正的或負的整数、分数和零。但仅有这些数还是不能满足实际的需要，有些量往往不是都能用有理数来表示的。例如，在生产实际中度量一块場地的长度和寬度，或者一条渠道的深度，以及在体育运动中，要量投擲运动員投擲标枪或手榴弹

的距离，或跳高运动员所跳的高度等等，因此，有必要把数的范围再加以扩充。为了说明这个问题，先来研究线段度量的问题。

§ 1 线段的度量

线段度量的问题，就是用单位线段来连续截取一条已知线段，从而得到某一个数值来表示此线段的大小。就是说我们要量某条线段的长短，先要选取一个长度单位。在日常生活中，常用的基本长度单位是米和尺。

这里我们规定：用单位来量一个量所得到的数，叫这个量的数值，又叫量数。

例如，有一段布，如果用尺来量，量5下正好量尽，那末，这段布的量数是5，而它的长度是5尺（如图1—1）。



图 1—1

如果用米来量，那末，量一下有剩余，量两下又不够，这时，我们知道这段布的长度是一米多，但是，究竟是一米几呢？需要进一步用分米来量，也就是用1米的十分之一来量，这时，量得剩下的部分是6分米还有剩余，但不够7分米，这就是说，这段布的长度是1米6分米多，因为剩下的部分不足1分米，进一步就用分米的十分之一，也就是用厘米来量，量得剩下的部分是6厘米多不够7厘米，这就是说这段布的长度是1米6分米6厘米多，接着用厘米的十分之一，也就是用毫米来量，量得剩下的部分是6毫米多，不够7毫米，这样，这段布的长度是1米6分米6厘米6毫米多，接着还可以量下去，但在实际生活中，量到毫米以后就不再量下去，由于最后剩下的部分比半毫米还大，我们

可以四捨五入，得到这段布的长度为1米6分米6厘米7毫米，如果用小数表示，就是1.667米。我們說用米作为长度单位，这段布的量数是1.667。

一般的，在数学上度量綫段的长度，不一定要用米或尺来作长度单位。可以取定任意一条綫段，作为长度单位。例如，繪出一条綫段 AB ，又繪出一条綫段 CD ，可以用 CD 作为长度单位，来量一量 AB 的量数是多少（如图1—2）？

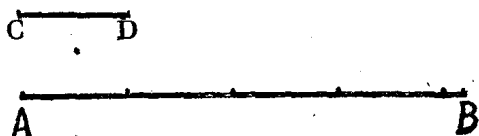


图 1—2

量的方法和上面一样，用 CD 来量 AB ，量4下有剩余，量5下又不够，我們知道，对长度单位 CD 来说， AB 的量数，在4与5之間。为了得出准确的量数，进一步把 CD 分成10等份，取其一一份来量剩下的部分，量两次正好量尽，这时， AB 的量数是4.2。換句話說， AB 含有4个 CD 和2个千分之一的 CD 。

由上面例子可以看出，用长度单位去度量綫段，如果量不尽有剩余，就把剩余部分用长度单位的十分之一去量，如果还量不尽，就把第二次剩余部分用长度单位的百分之一去量，这样……，繼續量下去，就可以得出綫段的量数。

取定一个长度单位后，可以量出任意一条綫段的量数。

有一条綫段 a ，如果用綫段 l 为长度单位（如图1—3），我們



图 1—3

看一下线段的量数可能是怎样的数：

1. 如果第一次就能量尽，这时 a 的量数是整数，也就是说， l 的整数倍等于 a ，或者说 a 含有整数个 l 。

2. 如果第一次未能量尽，第二次恰好量尽，也就是说，第一次量后剩下的部分，用 l 的十分之一来量，恰好量尽，这时 a 的量数是小数，整数后有一位小数。

如果第二次未能量尽，而在第三次恰好量尽，也就是说，第二次量后剩下的部分，用 l 的百分之一量恰好量尽，这时 a 的量数还是小数，整数后有两位小数。

如果第三次未能量尽，而在第四次量尽，那末， a 的量数还是小数，整数后有三位小数。照这样继续量下去，得出下面重要事实：

取定长度单位后，任意一条线段的量数或者是整数，或者是小数。

在实际度量的过程中，由于工具和视觉的限制，在有限次后一般的都能量尽，也就是说，实际度量所得到的量数一般都是有限小数。但是，在理论上，的确存在永远量不尽的线段，这时有两种情况出现，我们看下面的例子：

例 1 设线段 l 的长是 1 米，线段 a 的长是 5 尺，那末以 l 为长度单位， a 的量数就不是有限小数，而是无限循环小数 $1.6666\cdots$ （在本节开头利用四舍五入，得出 a 的近似量数是 1.667 ）。

为什么不能是有限小数呢？可以这样想： l 的长是 3 尺， a 的长是 5 尺，如果有限次能量尽，那末应有 3 的有限小数倍等于 5，换句话说，5 除以 3 将得出有限小数，这是不可能，因为 $5 \div 3 = 1.6666\cdots$ 是无限循环小数。

例 2 设线段 l 是一个圆的直径，而线段 a 的长度等于这个圆的周长，那末，以 l 为长度单位， a 的量数就是圆周率。在初

中我們已經介紹過，它的近似值是3.1416，它的前幾位小數是：

$$\pi = 3.1415926535897 \cdots$$

π 既不是有限小數，也不是無限循環小數，而是無限不循環小數。

由上面的討論我們可以看到，線段的量數有以下四種情況：

- ① 量數是整數；
- ② 量數是有限小數；
- ③ 量數是無限循環小數；
- ④ 量數是無限不循環小數。

整數、有限小數、無限循環小數都是有理數，而第四種情形的無限不循環小數，我們把它叫做無理數。

無限不循環小數叫做無理數。

這樣，我們就得知：取定長度單位後，任意一條線段的量數是有理數，或者無理數。

§ 2 無 理 數

前面由於線段的度量，出現了一種以前未見過的數，就是無限不循環小數，我們把它叫做無理數。下面看幾個例子：

例 1 2.101001000100001……是一個無理數。

我們看這個數的組成規律，它的小數部分最初是兩個 1 間有 1 個零，其次是兩個 1 間有兩個零，再次是 3 個零，4 個零……，這樣一直寫下去，不是循環小數，而是無限不循環小數，所以是一個無理數。

例 2 面積是兩個單位的正方形，如果用 x 表示正方形邊的長度，那末，現在研究 x 究竟是那一種數？下面給以說明：

第一 x 不能是整數，因為沒有一個整數平方後能得到 2。

第二 x 不能是分數。假設 x 等於最簡分數 $\frac{p}{q}$ （如果不是

最簡分数可以約簡), 那末, $x^2 = (\frac{p}{q})^2 = \frac{p^2}{q^2}$, 这也是一个最簡分数, 而最簡分数不能等于整数 2, 所以 x 不能是分数。

因此, 这个正方形边的量数不能用任何一个有理数来表示, 而是一个无理数。事实上, 面积等于 2 的正方形是存在的, 下面是它的几何作法 (如图 1—4)。

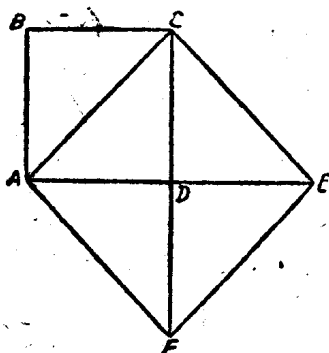


图 1—4

設 $ABCD$ 正方形的各边长是 1, 那末它的面积就等于 1, 如果把它的一条对角线 AC 当作一条边作一个新的正方形 $ACEF$, 則面积就等于原正方形的 2 倍, 也就是等于 2, 这就說明, 面积等于 2 的正方形是存在的。既 $x^2 = 2$, 我們用符号 $\sqrt{2}$ 表示 x , 把 x 叫做 2 的平方根。由开平方得出它的前几位小数是:

$$\sqrt{2} = 1.4142 \dots$$

而它的平方等于 2。

一般的, 如果一个正数 x 的平方等于 b , 就說 x 是 b 的平方根, 而用符号 $\sqrt{b}$ 表示, 也就是:

$$\text{当 } x^2 = b, \text{ 且 } x > 0 \text{ 时, 則 } x = \sqrt{b}.$$

例 3 $\sqrt{3}$ 是一个无理数。

$\sqrt{3}$ 是这样一个数, 它的平方等于 3, 我們把它写成小数的形式: 首先 $1^2 = 1$, $2^2 = 4$, 所以 $1 < \sqrt{3} < 2$, 这就是說 $\sqrt{3}$ 的整数部分是 1。其次 $(1.7)^2 = 2.89$, $(1.8)^2 = 3.24$, 故: $1.7 < \sqrt{3} < 1.8$, 这就是說 $\sqrt{3}$ 的第一位小数碼是 7。再次, $(1.73)^2 = 2.993$, $(1.74)^2 = 3.028$ 故: $1.73 < \sqrt{3} < 1.74$, 这就是說

$\sqrt{3}$ 的第二位小数碼是 3，如此下去，我們算出： $\sqrt{3} = 1.732$ ……，这是一个无限不循环小数。

一般的，我們可以証明：如果对于整数 a 來說，沒有一个整数的平方等于 a ，那末， $\sqrt{a}$ 一定是无理数。例如： $\sqrt{5}$ 、 $\sqrt{6}$ 、 $\sqrt{7}$ 都是无理数。

例 4 在 0.001 与 0.002 之間写出五个无理数：

0.00101001000100001……；

0.00121221222122221……；

0.00131221222122221……；

0.00141221222122221……；

0.00151221222122221……。

通过这个例子可以看出，无理数是无限多的。

由于无理数是无限不循环小数，故不能把它的小数位数全写出来。但是，我們可以确定它的任意位数上的数字，例如， $\sqrt{3}$ 的第四位小数，虽然沒有写出来，但是应用例 3 給出的方法，我們可以算出第四位小数是 0，第五位小数是 5……。

在应用上，常取无理数的近似值。例如：

(1) $\sqrt{3} = 1.73205$ ……

准确到 0.1 的不足近似值是 1.7，过剩近似值是 1.8；

准确到 0.01 的不足近似值是 1.73，过剩近似值是 1.74；

准确到 0.001 的不足近似值是 1.732，过剩近似值是 1.733。

(2) $\pi = 3.14159265$ ……

准确到 0.001 的不足近似值是 3.141，过剩近似值是 3.142；

准确到 0.0001 的不足近似值是 3.1415，过剩近似值是 3.1416。

(3) 2.1010010001……

准确到 0.000001 的不足近似值是 2.101001，过剩近似值是 2.101002。

一个无理数的准确值，永远大于它的不足近似值，小于它的

过剩近似值。

§ 3 实 数

有理数和无理数统称为实数。我们用下表表示出来：

实数	有理数	$\left\{ \begin{array}{l} \text{整数 (正整数、0、负整数)} \\ \text{分数 (正分数、负分数)} \end{array} \right\}$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{有限小数或} \\ \text{无限循环小数} \end{array} \right\}$
	无理数	无限不循环小数。	

和有理数一样，一个正实数就有一个和它相反的负实数，例如，和3相反的负实数是“-3”，和 π 相反的负实数是“- π ”，和 $\sqrt{2}$ 相反的负实数是“- $\sqrt{2}$ ”。

实数绝对值的定义也有理数一样，正数的绝对值是它本身，负数的绝对值是和它相反的正数，零的绝对值还是零，例如： $|\pi| = \pi$ ， $|- \pi| = \pi$ 。

在初中我们已讲过数轴的概念，在一条有方向的直线上任取一点0作为原点，取定长度单位后，每一个有理数均可用这条直线（数轴）上的点来表示。表示有理数的点叫做有理点。但是，并不是数轴上所有的点都是有理点。

例如：在图1-5中，以长度单位作边的正方形的对角线 a ，

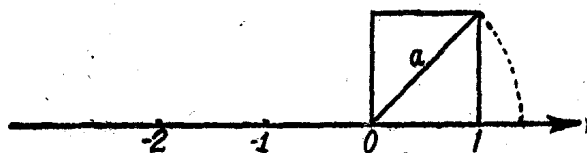


图 1-5

在数轴上表示出的点就不是有理点。我们知道， a 的量数是 $\sqrt{2}$ ，是无理数。

和有理数的情形一样，每一个无理数都可以用数轴上的点来表示，表示无理数的点叫做无理点。

把有理数扩充成实数以后，数轴上每一点就有一个实数和它对应，反过来，每一个实数也有数轴上的一个点和它对应，换句话说，实数和数轴上的点是一一对应的。

和有理数的情形一样，实数在数轴上表示出以后，两个点重合时，表示这两个实数相等，两个点不重合，那末，左面的点表示的数比右面的点表示的数小，由此可知：

(1) 正实数大于零，负实数小于零，正实数大于负实数。

(2) 两个正实数比较大小，先比整数部分，整数部分大的数大。如果整数部分相同，就比小数部分，如果第一位小数不同，那末，第一位小数大的数大。如果第一位小数相同，就比第二位小数，如此类推。

(3) 负实数比较大小，看它们的绝对值，绝对值大的数小。

例 1 比较 $\sqrt{2}$ 与 1.4 的大小：

$$\sqrt{2} = 1.414\cdots$$

$\sqrt{2}$ 与 1.4 的整数部分。第一位小数都相同，1.4 的第二位小数是零，而 $\sqrt{2}$ 的第二位小数是 1， $1 > 0$ ，故 $\sqrt{2} > 1.4$

例 2 比较 π 与 $\frac{355}{113}$ 的大小：

$$\pi = 3.1415926\cdots, \quad \frac{355}{113} = 3.1415929\cdots$$

π 的第七位小数以前各位的数与 $\frac{355}{113}$ 的第七位小数以前各位的数都相同，而在第七位上 π 是 6， $\frac{355}{113}$ 是 9， $6 < 9$ ，所以 $\pi < \frac{355}{113}$ 。

$$\frac{355}{113}$$

§ 4 实数的运算

实数包括有理数和无理数两部分，而有理数是有限小数和无