中等体育学校講义

# 数学

体育院校教材編审委員会
数学編选小組 编

中等体育学校讲义

# 数　学

体育院校教材編审委員会
数学編选小組　編

人民体育出版社

統一書号：7015·1138

中等体育学校講义

数　学

体育院校教材編审委員会
数学編选小組　編

*

人民体育出版社出版·北京體育館路·
（北京市書刊出版業營業許可証出字第049号）

北京崇文印刷厂印刷
新华書店北京发行所发行
全国新华書店經售

*

850×1168　1/32　286千字　印張 $11\frac{22}{32}$　插頁1

1961年7月第1版

1961年7月第1次印

印數：1－5,000

定　价〔8〕1.30元

# 編者的話

这本講义，是根据1960年8月中华人民共和国体育运动委員会教育司所审編的中等体育学校数学教学大綱(草案)，以原（工高等教育出版社出版的中等专业学校的代数、几何、三角教科書业、农林、財經性質专业适用）为基础，参考了九年一貫制数学試用課本而編选的。

本講义，包括代数、几何、三角的主要內容，增添了二次曲綫、排列組合、概率論初步、制图、測量等数学知識。整个講义內容建立成为一个以函数为綱，理論联系实际的新体系。在文字叙述方面，力求通俗易懂，例如习题尽量做到結合实际。

本講义，由赵津生、卢翠容、徐代树、郭玉虹、曹書㒷、刘新民六位教师，采取分工执笔，集体討論的办法編选的。由于时間仓促，編者水平有限，錯誤之处，在所难免，希望各地教师和讀者予以批評和指正。

体育院校教材編审委員会

数学編选小組

1961年4月

# 目 录

# 第一章　幂与方根

## 一　无理数

在我們研究各种事物和現象的时候，总要考虑到“量”的問题。

量的种类是很多的，如在我們日常生活和生产实际中，常遇到的长度、重量、体积、面积、温度、时間等等，它們都是量的不同形式的表现，或者說，它們是不同种类的量。量的表現虽然有不同的形式，但都具有一个共同的性質，就是可以用选定的同类量做单位，一个单位一个单位的来量。例如，我們选定一尺作单位，来量某一段布或某一条綫段的长，假如，量得的长是5尺、12尺；又如：选定以斤作单位，来量某一堆煤的重量是500斤，一挑谷物的重量是1000斤。那末，数5、12、500、1000都确切的表达了这些量的多少。

实际上，只有通过数才能确切的表达量的实际情况，才能比較量的多少、大小和說明量的变化。同时也只有把数和量結合起来，数才有它的实际意义。因此，要研究量与量之間的变化，量与量之間的关系的时候，都得通过数来做研究的工具。

在初中代数里，我們根据实际生活中存在着相反方向的量，曾經引进了負数来适应研究这些量的需要，把数的范围扩充到有理数，它包括一切正的或負的整数、分数和零。但仅有这些数还是不能滿足实际的需要，有些量往往不是都能用有理数来表示的。例如，在生产实际中度量一块場地的长度和寬度，或者一条渠道的深度，以及在体育运动中，要量投擲运动員投擲标枪或手榴弹

的距离，或跳高运动員所跳的高度等等，因此，有必要把数的范围再加以扩充。为了說明这个問題，先来研究綫段度量的問題。

## §1 綫段的度量

綫段度量的問題，就是用单位綫段来連續截取一条已知綫段，从而得到某一个数值来表示此綫段的大小。就是說我們要量某条綫段的长短，先要选取一个长度单位。在日常生活中，常用到的基本长度单位是米和尺。

这里我們规定：**用单位来量一个量所得到的数，叫这个量的数値，又叫量数。**

例如，有一段布，如果用尺来量，量5下正好量尽，那末，这段布的量数是5，而它的长度是5尺（如图1—1）。

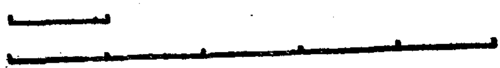

图 1—1

如果用米来量，那末，量一下有剩余，量两下又不够，这时，我們知道这段布的长度是一米多，但是，究竟是一米几呢？需要进一步用分米来量，也就是用1米的十分之一来量，这时，量得剩下的部分是6分米还有剩余，但不够7分米，这就是說，这段布的长度是1米6分米多，因为剩下的部分不足1分米，进一步就用分米的十分之一，也就是用厘米来量，量得剩下的部分是6厘米多不够7厘米，这就是說这段布的长度是1米6分米6厘米多，接着用厘米的十分之一，也就是用毫米来量，量得剩下的部分是6毫米多，不够7毫米，这样，这段布的长度是1米6分米6厘米6毫米多，接着还可以量下去；但在实际生活中，量到毫米以后就不再量下去，由于最后剩下的部分比半毫米还大，我們

可以四捨五入，得到这段布的长度为1米6分米6厘米7毫米，如果用小数表示，就是1.667米。我們說用米作为长度单位，这段布的量数是1.667。

一般的，在数学上度量綫段的长度，不一定要用米或尺来作长度单位。可以取定任意一条綫段，作为长度单位。例如，給出一条綫段$AB$，又給出一条綫段$CD$，可以用$CD$作为长度单位，来量一量$AB$的量数是多少（如图1—2）？

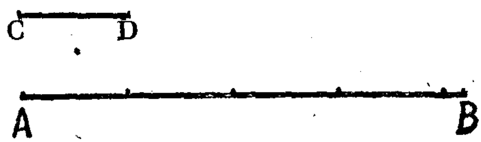


图 1—2

量的方法和上面一样，用$CD$来量$AB$，量4下有剩余，量5下又不够，我們知道，对长度单位$CD$来說，$AB$的量数，在4与5之間。为了得出准确的量数，进一步把$CD$分成10等份，取其一份来量剩下的部分，量两次正好量尽，这时，$AB$的量数是4.2。換句話說，$AB$含有4个$CD$和2个十分之一的$CD$。

由上面例子可以看出，用长度单位去度量綫段，如果量不尽有剩余，就把剩余部分用长度单位的十分之一去量，如果还量不尽，就把第二次剩余部分用长度单位的百分之一去量，这样……，繼續量下去，就可以得出綫段的量数。

取定一个长度单位后，可以量出任意一条綫段的量数。

有一条綫段$a$，如果用綫段$l$为长度单位(如图1—3)，我們

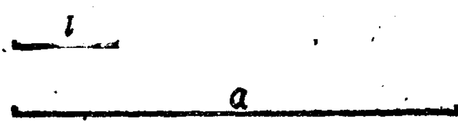


图 1—3

看一下綫段的量数可能是怎样的数：

1.如果第一次就能量尽，这时$a$的量数是整数，也就是說，$l$的整数倍等于$a$，或者說$a$含有整数个$l$。

2.如果第一次未能量尽，第二次恰好量尽，也就是說，第一次量后剩下的部分，用$l$的十分之一来量，恰好量尽，这时$a$的量数是小数，整数后有一位小数。

如果第二次未能量尽，而在第三次恰好量尽，也就是說，第二次量后剩下的部分，用$l$的百分之一量恰好量尽，这时$a$的量数还是小数，整数后有两位小数。

如果第三次未能量尽，而在第四次量尽，那末，$a$的量数还是小数，整数后有三位小数。照这样継續量下去，得出下面重要事实：

**取定长度单位后，任意一条綫段的量数或者是整数，或者是小数。**

在实际度量的过程中，由于工具和視覺的限制，在有限次后一般的都能量尽，也就是說，实际度量所得到的量数一般都是有限小数。但是，在理論上，的确存在永远量不尽的綫段，这时有两种情况出現，我們看下面的例子：

**例 1** 設綫段$l$的长是1米，綫段$a$的长是5尺，那末以$L$为长度单位，$a$的量数就不是有限小数，而是无限循环小数1.6666……（在本节开头利用四捨五入，得出$a$的近似量数是1.667）。

为什么不能是有限小数呢？可以这样想：$l$的长是3尺，$a$的长是5尺，如果有限次能量尽，那末应有3的有限小数倍等于5，换句話說，5除以3将得出有限小数，这是不可能，因为$5\div3=1.6666\cdots\cdots$是无限循环小数。

**例 2** 設綫段$l$是一个圓的直径，而綫段$a$的长度等于这个圓的周长，那末，以$l$为长度单位，$a$的量数就是圓周率。在初

中我們已經介紹过，它的近似值是3.1416，它的前几位小数是：

$$\pi=3.1415926535897\cdots\cdots。$$

$\pi$ 旣不是有限小数，也不是无限循环小数，而是无限不循环小数。

由上面的討論我們可以看到，綫段的量数有以下四种情況：

①量数是整数；

②量数是有限小数；

③量数是无限循环小数；

④量数是无限不循环小数。

整数、有限小数；无限循环小数都是有理数，而第四种情形的无限不循环小数，我們把它叫做无理数。

**无限不循环小数叫做无理数。**

这样，我們就得知：**取定长度单位后，任意一条綫段的量数是有理数，或者是无理数。**

## §2 无 理 数

前面由于綫段的度量，出現了一种以前未見过的数，就是无限不循环小数，我們把它叫做无理数。下面看几个例子：

**例 1** 2.101001000100001……是一个无理数。

我們看这个数的組成規律，它的小数部分最初是两个1間有1个零，其次是两个1間有两个零，再次是3个零，4个零……，这样一直写下去，不是循环小数，而是无限不循环小数，所以是一个无理数。

**例 2** 面积是两个单位的正方形，如果用 $x$ 表示正方形边的长度，那末，現在研究 $x$ 究竟是那一种数？下面給以說明：

第一 $x$ 不能是整数，因为沒有一个整数平方后能得到2。

第二 $x$ 不能是分数。假設 $x$ 等于最簡分数 $\frac{p}{q}$ （如果不是

最簡分数可以約簡），那末，$x^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$，这也是一个最簡分数，而最簡分数不能等于整数2，所以$x$不能是分数。

因此，这个正方形边的量数不能用任何一个有理数来表示，而是一个无理数。事实上，面积等于2的正方形是存在的，下面是它的几何作法（如图1—4）。

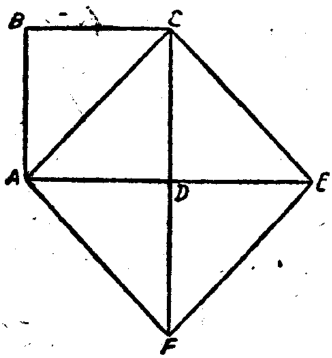

图 1—4

設$ABCD$正方形的各边长是1，那末它的面积就等于1，如果把它的对角綫$AC$当作一条边作一个新的正方形$ACEF$，則面积就等于原正方形的2倍，也就是等于2，这就說明，面积等于2的正方形是存在的。既$x^2=2$，我們用符号$\sqrt{2}$表示$x$，把$x$叫做2的平方根。由开平方得出它的前几位小数是：

$$\sqrt{2}=1.4142\cdots\cdots$$

而它的平方等于2。

一般的，如果一个正数$x$的平方等于$b$，就說$x$是$b$的平方根，而用符号$\sqrt{b}$表示，也就是：

当$x^2=b$，且$x>0$时，則$x=\sqrt{b}$。

**例3** $\sqrt{3}$是一个无理数。

$\sqrt{3}$是这样一个数，它的平方等于3，我們把它写成小数的形式：首先$1^2=1$，$2^2=4$，所以$1<\sqrt{3}<2$，这就是說$\sqrt{3}$的整数部分是1。其次$(1.7)^2=2.89$，$(1.8)^2=3.24$，故：$1.7<\sqrt{3}<1.8$，这就是說$\sqrt{3}$的第一位小数碼是7。再次，$(1.73)^2=2.993$，$(1.74)^2=3.028$ 故：$1.73<\sqrt{3}<1.74$，这就是說

$\sqrt{3}$的第二位小数碼是3，如此下去，我們算出：$\sqrt{3}=1.732$……，这是一个无限不循环小数。

一般的，我們可以証明：**如果对于整数$a$来說，沒有一个整数的平方等于$a$，那末，$\sqrt{a}$一定是无理数。**例如：$\sqrt{5}$、$\sqrt{6}$、$\sqrt{7}$都是无理数。

**例 4** 在0.001与0.002之間写出五个无理数：

0.00101001000100001……；

0.00121221222122221……；

0.00131221222122221……；

0.00141221222122221……；

0.00151221222122221……。

**通过这个例子可以看出，无理数是无限多的。**

由于无理数是无限不循环小数，故不能把它的小数位数全写出来。但是，我們可以确定它的任意位数上的数字，例如，$\sqrt{3}$的第四位小数，虽然沒有写出来，但是应用例3給出的方法，我們可以算出第四位小数是0，第五位小数是5……。

在应用上，常取无理数的近似值。例如：

(1) $\sqrt{3}=1.73205$……

准确到0.1的不足近似值是1.7，过剩近似值是1.8；

准确到0.01的不足近似值是1.73，过剩近似值是1.74；

准确到0.001的不足近似值是1.732，过剩近似值是1.733。

(2) $\pi=3.14159265$……

准确到0.001的不足近似值是3.141，过剩近似值是3.142；

准确到0.0001的不足近似值是3.1415，过剩近似值是3.1416。

(3) 2.1010010001……

准确到0.000001的不足近似值是2.101001，过剩近似值是2.101002。

一个无理数的准确值，永远大于它的不足近似值，小于它的

过剩近似值。

## §3 实　数

有理数和无理数統称为实数。我們用下表表示出来：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{整数（正整数、0、負整数）}\\ \text{分数（正分数、負分数）}\end{cases}\text{有限小数或无限循环小数}\\ \text{无理数：无限不循环小数。}\end{cases}$$

和有理数一样，一个正实数就有一个和它相反的負实数，例如，和3相反的負实数是“$-3$”，和$\pi$相反的負实数是“$-\pi$”，和$\sqrt{2}$相反的負实数是“$-\sqrt{2}$”。

实数絕对值的定义也和有理数一样，正数的絕对值是它本身，負数的絕对值是和它相反的正数，零的絕对值还是零，例如：$|\pi|=\pi$，$|-\pi|=\pi$。

在初中我們已經講过数軸的概念，在一条有方向的直綫上任取一点0作为原点，取定长度单位后，每一个有理数均可用这条直綫（数軸）上的点来表示。表示有理数的点叫做有理点。但是，并不是数軸上所有的点都是有理点。

例如：在图1—5中，以长度单位作边的正方形的对角綫$a$，

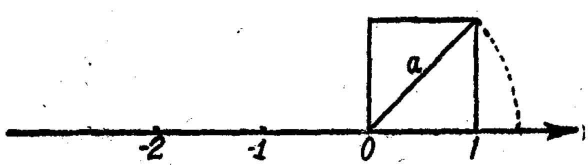


图 1—5

在数軸上表示出的点就不是有理点。我們知道，$a$的量数是$\sqrt{2}$，是无理数。

和有理数的情形一样，每一个无理数都可以用数軸上的点来表示，表示无理数的点叫做无理点。

把有理数扩充成实数以后，数軸上每一点就有一个实数和它对应，反过来，每一个实数也有数軸上的一个点和它对应，换句話說，实数和数軸上的点是一一对应的。

和有理数的情形一样，实数在数軸上表示出以后，两个点重合时，表示这两个实数相等，两个点不重合，那末，左面的点表示的数比右面的点表示的数小，由此可知：

（1）正实数大于零，负实数小于零，正实数大于负实数。

（2）两个正实数比較大小，先比整数部分，整数部分大的数大。如果整数部分相同，就比小数部分，如果第一位小数不同，那末，第一位小数大的数大。如果第一位小数相同，就比第二位小数，如此类推。

（3）负实数比較大小，看它們的絕对值，絕对值大的数小。

**例 1** 比較$\sqrt{2}$与1.4的大小：

$$\sqrt{2}=1.414\cdots\cdots$$

$\sqrt{2}$与1.4的整数部分。第一位小数都相同，1.4 的第二位小数是零，而$\sqrt{2}$的第二位小数是 1，$1>0$，故$\sqrt{2}>1.4$

**例 2** 比較$\pi$与$\frac{355}{113}$的大小：

$$\pi=3.1415926\cdots\cdots,\quad \frac{355}{113}=3.1415929\cdots\cdots$$

$\pi$ 的第七位小数以前各位的数与$\frac{355}{113}$的第七位小数以前各位的数都相同，而在第七位上$\pi$是 6，$\frac{355}{113}$是 9，$6<9$，所以 $\pi<\frac{355}{113}$.

## §4 实数的运算

实数包括有理数和无理数两部分，而有理数是有限小数和无