初中数学
专题复习八讲

《中小学数学》杂志 编委会 编

地质出版社

初中数学专题复习八讲

《中小学数学》杂志编委会　编

责任编辑：张瑚　陈仁

地质出版社出版

（北京西四）

河北省蔚县印刷厂印刷

（河北省蔚县城郝家巷 2 号）

新华书店北京发行所发行·各地新华书店经售

开本：$787\times1092\ ^{1}/_{32}$　印张：$8\ ^{1}/_{16}$　字数：178,000

1985年4月北京第一版·1985年4月蔚县第一次印刷

印数：1—151,585册　　定价：1.05元

统一书号：7038·新163

编 者 的 话

《中小学数学》是向小学和初中教师普及数学知识和帮助青年自学提高的一个科普刊物。从几年来收到的大批读者来信看，如何在分科复习的基础上进行专题复习是指导青年学习提高的一个重要环节，也是教师和学生都十分关切的一个问题，而目前大量出版的多是指导分科复习的辅导读物，很希望我们编辑部能从专题复习方面提供一些材料。

为满足广大读者的这种实际需要，编辑部组织了一批有教学实践经验的教师，着重针对初中数学的重点、难点，选择了几个专题，一个专题一个专题地把问题讲深讲透，汇集成册，即为《初中数学专题复习八讲》。

本书共包括“式的恒等变形”、“因式分解”、“证明相等、平行和垂直”、“列方程（组）解应用题”、“圆”、“圆幂定理及其应用”、“二次函数的表达式及其应用”、“怎样添加辅助线”八个专题。在每个专题中，首先，扼要地讲述内容要点及需要掌握的基本知识和概念、定理；接着通过一批典型例题和题例说明指出读者易忽略的问题和常犯的错误，然后是适量的练习题。读者可以通过实际训练进一步掌握有关知识和解题思路。书后附的六组综合练习则有助于读者熟悉初中代数和几何的重点内容和提高解决综合问题的能力。

《中小学数学》编委会

1985年4月

目　录

式的恒等变形

马　庆　忠

Ⅰ　内容提要

一、理解下列表中有关数与式的概念

1．实数分类表

$$
\text{实数}\begin{cases}
\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\\ \text{零}\\ \text{负有理数}\end{cases}\\
\text{无理数}\begin{cases}\text{负无理数}\\ \text{正无理数}\end{cases}
\end{cases}
$$

负有理数、负无理数——负实数

正有理数、正无理数——正实数

2．式的分类表

$$
\text{式}\begin{cases}
\text{代数式}\begin{cases}\text{有理式}\begin{cases}\text{整式}\begin{cases}\text{单项式}\\ \text{多项式}\end{cases}\\ \text{分式}\end{cases}\\ \text{无理式}\end{cases}\\
\text{初等超越式}\begin{cases}\text{对数式}\\ \text{三角式}\end{cases}
\end{cases}
$$

二、理解算术根及绝对值的意义

例如　$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & (a>0)\\ 0 & (a=0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$

三、理解同类项与同类根式的意义

1. 在多项式中，所含字母相同，并且相同字母的指数也分别相同的项，叫做同类项。

例如　$3x^2$、$4x^2$与$-x^2$是同类项，-3与7也是同类项。

2. 在几个最简根式中，如果被开方数都相同，根指数也都相同，这几个根式叫做同类根式。

例如　$2\sqrt{3}$、$\frac{1}{3}\sqrt{3}$、$-5\sqrt{3}$是同类根式。

四、掌握合并同类项、去括号、添括号（保证原式的值不变）的法则

例如　$(2x^2+xy+5y^2)-(x^2-2xy+3y^2)$

$=2x^2+xy+5y^2-x^2+2xy-3y^2$

$=x^2+3xy+2y^2$.

再如　$3a^2-5c^2-2b^2-2a^2-3b^2-c^2$

$=(3a^2-2a^2)-(2b^2+3b^2)-(5c^2+c^2)$

$=a^2-5b^2-6c^2$.

五、理解代数式与代数式的值的意义

1. 用运算符号把数或表示数的字母连结而成的式子，叫做代数式.

例如　$3x+2$，$\frac{5y-3}{y+2}$，$\sqrt{a+1}$，x，-2等。

2. 用数值代替代数式里的字母，计算后所得的结果，叫做代数式的值。

例如　当$x=-2$时，$3x-1=3(-2)-1=-6-1$

$=-7$.

六、掌握整式乘法（将积的形式化为和差的形式）与因式分解（将和差的形式化为积的形式）以及它们之间的关系

例如 $(a+b)(a-b)=a^2-b^2 \Longleftrightarrow a^2-b^2$
$$=(a+b)(a-b)$$
$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2 \Longleftrightarrow a^2\pm 2ab+b^2=(a\pm b)^2$$
$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3 \Longleftrightarrow a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$$
$$(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab \Longleftrightarrow x^2+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$
$$(mx+p)(nx+q)=mnx^2+(pn+qm)x+pq$$
$$\Longleftrightarrow mnx^2+(pn+qm)x+pq=(mx+p)(nx+q)$$

七、理解分式的意义与分式的基本性质

1. 除式中含有字母的有理式叫做分式。

例如 $\frac{1}{x}$，$\frac{x}{2x-y}$.

2. 分式的分子和分母都乘以（或除以）同一个不等于零的代数式，分式的值不变。这个性质叫做分式的基本性质。

例如 $\frac{b}{a}=\frac{b\times m}{a\times m}$；$\frac{b}{a}=\frac{b\div m}{a\div m}$（其中$m$是不为零的代数式）

八、理解根式的意义与根式的基本性质

1. 表示方根的代数式叫做根式。

例如 $\sqrt{5}$　$\sqrt[3]{-7}$，$\sqrt[4]{\frac{3}{5}}$，$\sqrt{x^2+2}$，$\sqrt[3]{5ay^2}$等.

2. 一个根式的被开方数如果是一个正数或者零的幂，那

么这个根式的根指数和被开方数的指数都乘以或者除以同一个正整数，根式的值不变。这个性质叫做根式的基本性质。

例如　当$a\geqslant0$时，$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$，$\sqrt[p]{a^{mp}}=a^m$。

这里m是正整数，n和p是大于1的整数。

II　范例

例1　计算：$2a-(a-b)-\left[\frac{1}{2}a-(a-0.75b)\right]+\frac{1}{2}b$。

解：$2a-(a-b)-\left[\frac{1}{2}a-(a-0.75b)\right]+\frac{1}{2}b$

$=2a-a+b-\frac{1}{2}a+(a-0.75b)+\frac{1}{2}b$

$=2a-a+b-\frac{1}{2}a+a-\frac{3}{4}b+\frac{1}{2}b$

$=\frac{3}{2}a+\frac{3}{4}b$。

说明　本题是整式的加减运算，要注意去括号法则的应用与合并同类项。

例2 计算：

(1)　$2abc(a-3b+2c)$；

(2)　$(x^3+3x-1)(0.2x^2-x-0.6)$；

(3)　$(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$。

解：　(1)　$2abc(a-3b+2c)$

$=2a^2bc-6ab^2c+4abc^2$；

(2)　$(x^3+3x-1)(0.2x^2-x-0.6)$

$=0.2x^5+0.6x^3-0.2x^2-x^4-3x^2+x-0.6x^3$

$-1.8x+0.6$

$=0.2x^5-x^4-3.2x^2-0.8x+0.6$；

(3) $\quad (a^4+b^4)(a^2+b^2)(a+b)(a-b)$

$=(a^4+b^4)(a^2+b^2)(a^2-b^2)$

$=(a^4+b^4)(a^4-b^4)$

$=a^8-b^8$。

说明 (1) 以上各小题都是整式乘法运算，要认真观察各题的特点，分别采用不同的动算法则或公式，进行合理的简捷运算。

(2) 积的展开也可以利用竖式进行，特别是项数多的算式，用竖式认算不易出错。

例3 展开下列各式：

(1) $(a+b+c)^2$； (2) $(x-2y+3z)(x+2y-3z)$。

解：(1) $(a+b+c)^2=[\ a+(b+c)\ ]^2$

$=a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$

$=a^2+2ab+2ac+b^2+2bc+c^2$

$=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$；

(2) $(x-2y+3z)(x+2y-3z)=[x-(2y-3z)]$

$[x+(2y-3y)]=x^2-(2y-3z)^2$

$=x^2-(4y^2-12yz+9z^2)$

$=x^2-4y^2-9y^2+12yz$。

说明 (1) 在解 (1)、(2) 两题中，要有置换思想，可令 $\quad b+c=t\longrightarrow(a+b+c)^2=(a+t)^2=a^2+2at+t^2$。

$t=b+c\longrightarrow \qquad =a^2+2a(b+c)+(b+c)^2$。

将 (2) 看成是x与$2y-3z$的和及差的积的形式。即 $(x-\text{口})(x+\text{口})$ 的形式。可令

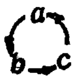
$2y-3z=t$，然后利用“遇公式，代进去”的顺口溜，代入公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$。

(2) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca\longleftarrow$

重要公式。

这个公式是通过基本公式展开计算的结果，其特点是在展开后的结果中除含有各项的平方外，其余各项是两个字母之积的2倍，而这两个字母是按着轮换顺序出现的。如下图所示：

$$ab \Longrightarrow bc \Longrightarrow ca$$



例4 计算：

(1) $[x^3-y^3-(x-y)^2]\div(x-y)$；

(2) $(2x^2-3x+4)^2-(2x^2-3x-4)^2$
$+(4x-1)(8x+7)$。

解： (1) $[x^3-y^3-(x-y)^2]\div(x-y)$

$=(x-y)[(x^2+xy+y^2)-(x-y)]\div(x-y)$

$=x^2+xy+y^2-x+y$；

(2) $(2x^2-3x+4)^2-(2x^2-3x-4)^2$
$+(4x-1)(8x+7)$

$=[(2x^2-3x+4)+(2x^2-3x-4)][(2x^2-$
$-3x+4)-(2x^2-3x-4)]+(4x+1)(8x+7)$

$=(4x^2-6x)(8)+(32x^2+20x-7)$

$=32x^2-48x+32x^2+20x-7$

$=64x^2-28x-7$.

说明 多项式除法，一般可用多项式除法的运算法则，列成竖式进行运算。但第（1）题利用因式分解法来解更为简捷。

第（2）题是整式混合运算，因前面两个括号符合平方

差公式，故用公式并结合乘法法则展开计算较为简便。

凡属多项式，在运算之前，要将多项式按照某一个字母降幂（或升幂）排列，这样才有利于运算。

例5 展开下列各式：

(1) $(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2$；

(2) $(a-b)^3(a+b)^3(a^2+b^2)^3$；

(3) $[(a+2b)^2-2ab][(a-2b)^2+2ab](a+2b)(a-2b)$。

解：(1) $(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)^2$

$=(x+1)(x^2-x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$=(x^3+1)[(x^2+1)^2-x^2]$

$=(x^3+1)(x^4+x^2+1)$

$=x^3(x^4+x^2+1)+(x^4+x^2+1)$

$=x^7+x^5+x^4+x^3+x^2+1$；

(2) $(a-b)^3(a+b)^3(a^2+b^2)^3$

$=[(a-b)(a+b)(a^2+b^2)]^3$

$=[(a^2-b^2)(a^2+b^2)]^3=(a^4-b^4)^3$

$=a^{12}-3a^8b^4+3a^4b^8-b^{12}$；

(3) $[(a+2b)^2-2ab][(a-2b)^2+2ab](a+2b)(a-2b)$

$=(a^2+4ab+4b^2-2ab)(a^2-4ab+4b^2+2ab)(a+2b)(a-2b)$

$=(a^2+2ab+4b^2)(a^2-2ab+4b^2)(a+2b)(a-2b)$

$=(a-2b)(a^2+2ab+4b^2)(a+2b)(a^2-2ab+4b^2)$

$=(a^3-8b^3)(a^3+8b^3)=a^6-64b^6$。

说明 在展开多项式的积的运算中，应注意以下几点：

(1) 多项式的整理，按降幂的顺序排列；

(2) 因式多而次数高的多项式的展开，要有置换的思想，把一个多项式看成是一个字母，来适应法则或公式。

(3) 利用公式展开时，要注意多项式的特点，有时要交换因式的顺序而进行组合。

例6 将下列各式分解因式：

(1) $x(2y-5)+2(5-2y)$；

(2) $25x^2+16y^2-40xy$；

(3) $18a^2b^2-8b^4c^2$；(4) $27ax^4-12ay^4$.

解： (1) $x(2y-5)+2(5-2y)$

$=x(2y-5)-2(2y-5)$

$=(2y-5)(x-2)$；

(2) $25x^2+16y^2-40xy$

$=(5x)^2-2(5x)(4y)+(4y)^2$

$=(5x-4y)^2$；

(3) $18a^2b^2-8b^4c^2$

$=2b^2(9a^2-4b^2c^2)$

$=2b^2\ [(3a)^2-(2bc)^2]$

$=2b^2(3a+2bc)(3a-2bc)$；

(4) $27ax^4-12ay^4$

$=3a(9x^4-4y^4)$

$=3a\ [(3x^2)^2-(2y^2)^2]$

$=3a(3x^2+2y^2)(3x^2-2y^2)$

$=3a(3x^2+2y^2)[(\sqrt{3}x)^2-(\sqrt{2}y)^2]$

$=3a(3x^2+2y^2)(\sqrt{3}x+\sqrt{2}y)$

$(\sqrt{3}x-\sqrt{2}y)$。

说明 以上各题是要求把一个多项式化为几个整式的积的形式。其解题的关键分别如下：

第(1)题，首先要掌握将$2(5-2y)$变形为$-2(2y-5)$的技巧，然后再分解因式。

第(2)题，先交换后两项，然后再代入公式。

第(3)题，先提取公因式，然后代入平方差公式分解因式。

例7 将下列各式分解因式：

(1) $9x^{n+3}-12x^{n+2}+4x^{n+1}$；

(2) $a^3+16+4a^2+4a$；

(3) $2x^4-17x^2+36$；

(4) $4bc+25a^2-4b^2-c^2$。

解：(1) $9x^{n+3}-12x^{n+2}+4x^{n+1}$

$=x^{n+1}(9x^2-12x+4)$

$=x^{n+1}\left[(3x)^2-2(3x)(2)+2^2\right]$

$=x^{n+1}(3x-2)^2$；

(2) $a^3+16+4a^2+4a$

$=a^3+4a^2+4a+16$

$=a^2(a+4)+4(a+4)$

$=(a+4)(a^2+4)$；

(3) $2x^4-17x^2+36$

$=2x^4-8x^2-9x^2+36$

$=2x^2(x^2-4)-9(x^2-4)$

$=(x^2-4)(2x^2-9)$

$=(x+2)(x-2)(\sqrt{2}x+3)(\sqrt{2}x-3)$；

(4) $4bc+25a^2-4b^2-c^2$

$=25a^2-(4b^2-4bc+c^2)$

$=(5a)^2-(2b-c)^2$

$$=(5a+2b-c)(5a-2b+c).$$

说明 第(1)题，是利用“公因式要提取”，“遇公式代进去”的顺口溜分解因式；

第(3)题，将“$-17x^2$”拆成$-8x^2$、$-9x^2$，是本题能分解因式的关键，即拆成系数顺次成比例，才能进行分解。本题所拆成的系数比例关系是：

$$2:(-8)=(-9):36.$$

例8 将下列各式在实数范围内分解因式：

(1) $2x^2-4x+1$； (2) $x^4-27x^2y^2+y^4$；

(3) $x^6(x-y+z)+y^6(y-x-z)$；

(4) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$.

解：(1) $2x^2-4x+1$

$$=2\left(x-\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$=(2x-2-\sqrt{2})\left(x-\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$\because \Delta=16-4\times2=8>0 \quad \therefore x=\frac{4\pm2\sqrt{2}}{4}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$$

(2) $x^4-27x^2y^2+y^4$

$$=x^4-2x^2y^2+y^4-25x^2y^2$$

$$=(x^2-y^2)^2-(5xy)^2$$

$$=(x^2+5xy-y^2)(x^2-5xy-y^2)$$

$$=\left(x+\frac{5+\sqrt{29}}{2}y\right)\left(x+\frac{5-\sqrt{29}}{2}y\right)$$

$$\left(x-\frac{5-\sqrt{29}}{2}y\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{29}}{5}y\right);$$

$$\because \Delta=(\pm5y)^2+4y^2=29y^2\geqslant0$$

$$\therefore x=\frac{\pm 5\pm\sqrt{29}}{2}y.$$

(3) $x^6(x-y+z)-y^6(y-x-z)$

$=x^6(x-y+z)-y^6(x-y+z)$

$=(x-y+z)(x^6-y^6)$

$=(x-y+z)\ [(x^3)^2-(y^3)^2]$

$=(x-y+z)(x^3+y^3)(x^3-y^3)$

$=(x-y+z)(x+y)(x-y)$

$(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$;

(4) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

$=(x+4)(x+1)(x+2)(x+3)+1$

$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$

$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24+1$

$=(x^2+5x)^2+2(x^2+5x)+5+5^2$

$=(x^2+5x+5)^2=\left(x+\frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)^2$

$\left(x+\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)^2.$

说明 (1) 凡属于二次三项式ax^2+bx+c在$\Delta\geqslant 0$时，经观察试验不能用十字相乘法分解的，都可以利用因式分解公式$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$进行分解.方法是：先用求根公式求根，然后将所得之根代入因式分解公式即得.

(2) 凡属于因式分解的问题，一定要注意在哪个数的范围内进行.

(3) 第(3)题，在分解出x^6-y^6之后，亦可变形为：

$x^6-y^6=(x^2)^3-(y^2)^3$

$=(x^2-y^2)(x^4+x^2y^2+y^4)$

$= (x-y)(x+y)(x^2-xy+y^2)(x^2+xy+y^2)$.

但将$x^4+x^2y^2+y^4$直接分解成两个二次三项式之积，就没有本例中之解法的思路好与解法易。在第(4)小题中将原式变成$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$后，由于括号中两个常数之和为偶数，故可设想：

$$x^2+5x+4=y-1, \qquad x^2+5x+6=y+1\ .$$

因此，原式$=(y-1)(y+1)+1=y^2-1+1=y^2$

$=(x^2+5x+5)^2=\cdots\cdots$，此法是比较简捷的。

当然本题也可以设想：

$$x^2+5x+4=y，\text{或}x^2+5x+6=y\ .$$

例9　计算：

(1) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2-4x+3}-\dfrac{x-3}{1-x^2}+\dfrac{2x+1}{6-2x}$；

(2) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)}$；

(3) $\dfrac{a^2-1}{a^4+a^2-2a}+\dfrac{2a^2+3a-2}{2a^3+a^2+3a-2}$；

(4) $\dfrac{x+6}{x+5}-\dfrac{x+8}{x+3}+\dfrac{x+7}{x+2}-\dfrac{x+1}{x}$.

解： (1) $\dfrac{x^2-x+1}{x^2-4x+3}-\dfrac{x-3}{1-x^2}+\dfrac{2x+1}{6-2x}$

$$=\frac{x^2-x+1}{(x-1)(x-3)}+\frac{x-3}{(x+1)(x-1)}-\frac{2x+1}{2(x-3)}$$

$$= \frac{2(x+1)(x^2-x+1)+2(x-3)^2-(2x+1)}{2(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{(x+1)(x-1)}{(x-3)}$$

$$= \frac{x^2-10x+21}{2(x-1)(x+1)(x-3)}$$

$$= \frac{(x-3)(x-7)}{2(x-1)(x+1)(x-3)} = \frac{x-7}{2x^2-2};$$

(2) $$\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-c)(b-a)}$$

$$+ \frac{c}{(c-a)(c-b)}$$

$$= \frac{a}{(a-b)(a-c)} - \frac{b}{(a-b)(b-c)}$$

$$+ \frac{c}{(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{a(b-c)-b(a-c)+c(a-b)}{(a-b)(b-c)(a-c)}$$

$$= \frac{ab-ac-ab+bc+ac-bc}{(a-b)(b-c)(a-c)} = 0;$$

(3) $$\frac{a^2-1}{a^4+a^2-2a} + \frac{2a^2+3a-2}{2a^3+a^2+3a-2}$$

$$= \frac{(a+1)(a-1)}{a(a-1)(a^2+a+2)} + \frac{(a+2)(2a-1)}{(2a-1)(a^2+a+2)}$$

$$= \frac{a+1}{a(a^2+a+2)} + \frac{a+2}{a^2+a+2}$$