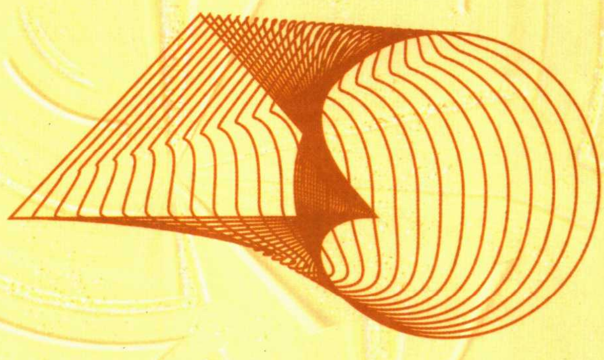
高职高专系列教材辅导书

高等数学学习指导

（一）

● 魏 莹 主编



华中科技大学出版社
HUAZHONG UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS
E-mail: hustpp@wuhan.cngb.com

高等数学学习指导

（一）

高职高专系列教材辅导书

高等数学学习指导

（一）

魏　莹　主编
安志鹏　主审

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导(一)/魏莹　主编
武汉:华中科技大学出版社， 2001年9月
ISBN 7-5609-2252-9

Ⅰ. 高…
Ⅱ. 魏
Ⅲ. 高等数学-高等学校-教学参考资料
Ⅳ. O13

高等数学学习指导(一)　　**魏　莹　主编**

责任编辑:徐正达　　封面设计:刘　卉
责任校对:张兴田　　责任监印:张正林

出版发行:华中科技大学出版社
　　武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87545012

录　排:武汉皇荣文化发展有限责任公司照排室
印　刷:京山县印刷厂

开本:787×1092　1/16　　印张:9.5　　字数:217 000
版次:2001年9月第1版　　印次:2002年7月第2次印刷　　印数:10 001—13 000
ISBN 7-5609-2552-9/O·237　　定价:13.80元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

内容提要

本书是为了帮助高职、高专学生解决学习“一元微积分”的困难而编写的．全书紧扣大纲，共分六章，包括一元微积分和微分方程．每章按基本要求、内容精述、疑难解答、范例选讲、自我检查题五部分编写，自我检查题附有参考答案．为配合教学，还配备了单元自测题和期末综合测试题．

本书立足课本，着重揭示教材内容的内在联系，详细介绍解题思路，同时着眼提高，尽可能给出较多的分析方法和解题技巧，便于学生自学，开阔学习思路，提高解题能力，纠正常见错误．本书可作为高职、高专学生学习的辅导书，也可作为专升本的应试指导书，还可作为工科大学生、成人高校学生学习及教师教学的参考书．

前　言

高等数学是理工科与财经类专业的必修课，其重要性是众所周知的．为了帮助学生加强对数学基础知识的理解与基本技能的训练，为了提高和培养学生的自学能力、解题能力和应用能力，我们编写了这本书．

本书紧扣大纲，系统性强．全书共分六章，包括一元微积分及微分方程的主要内容，每章从基本要求、内容精述、疑难解答、范例选讲及自我检查题五个方面提供指导．"基本要求"与"内容精讲"可使读者了解大纲内容，系统复习本章内容；"疑难解答"以问答形式对本章常见的、易模糊的概念作综合分析、解答，揭示内在联系，纠正易犯错误；"范例选讲"是对本章常见题型归类后进行分析、讲解，归纳解题技巧，其选例循序渐进，略有提高；"自我检查题"中有60%采用标准化题型，并附有参考答案．为配合教学，本书还配备了单元自测题和期末综合测试题，供师生参考．

本书针对性强，适用面广，由浅入深，便于自学，适合工科、财经类各专业的高职、高专学生使用，是专升本学生应试的指导书，也可供教师教学参考．

本书由魏莹主编并定稿，副主编是李颖颖．

参加本书初稿编写的有山军（第二章）、李颖颖（第四章）、耿协春（第五章及附录）、魏莹（第一、三、六章）．

本书由安志鹏主审，副主审是张克新、黄玉昌，陈义文、黄长琴也参加了本书的审稿．

编写本书得到了黄冈职业技术学院、武汉理工大学工业职业技术学院、孝感职业技术学院、长江职业技术学院、武汉职业技术学院等院校领导的关心和支持，在此我们表示衷心的感谢．

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中不当之处在所难免，恳请读者指正．

编者

2001年7月

目　录

第一章　函数、极限与连续 …… (1)
一、基本要求 …… (1)
二、内容精述 …… (1)
(一)函数的概念 …… (1)
(二)函数的极限 …… (2)
(三)函数的连续性 …… (4)
三、疑难解答 …… (6)
四、范例选讲 …… (9)
(一)函数的概念及性质 …… (9)
(二)复合函数 …… (10)
(三)建立函数关系 …… (11)
(四)求极限 …… (12)
(五)无穷小的比较 …… (15)
(六)函数的连续性与间断点 …… (16)
(七)闭区间上连续函数性质的应用 …… (18)
五、自我检查题 …… (19)
【参考答案】 …… (22)

第二章　导数与微分 …… (23)
一、基本要求 …… (23)
二、内容精述 …… (23)
(一)导数的概念 …… (23)
(二)导数的运算 …… (24)
(三)高阶导数 …… (25)
(四)函数的微分 …… (25)
三、疑难解答 …… (26)
四、范例选讲 …… (29)
(一)导数的定义 …… (29)
(二)导数的运算法则 …… (31)
(三)隐函数的导数,由参数方程所确定的函数的导数 …… (33)
(四)高阶导数 …… (35)
(五)函数的微分 …… (36)
五、自我检查题 …… (37)
【参考答案】 …… (40)

第三章 导数的应用 …… (42)
一、基本要求 …… (42)
二、内容精述 …… (42)
(一)中值定理 …… (42)
(二)泰勒公式 …… (43)
(三)罗必达法则 …… (43)
(四)利用导数研究函数的性态 …… (44)
(五)导数在经济学中的应用 …… (45)
三、疑难解答 …… (46)
四、范例选讲 …… (49)
(一)关于中值定理 …… (49)
(二)不等式的证明 …… (50)
(三)泰勒公式 …… (51)
(四)利用罗必达法则求极限 …… (53)
(五)函数的单调区间与极值 …… (55)
(六)最大值、最小值的应用题 …… (57)
(七)曲线的凹凸与拐点 …… (59)
(八)导数在经济中的应用举例 …… (60)
五、自我检查题 …… (61)
【参考答案】 …… (64)
六、自测题(第一、二、三章) …… (65)
【参考答案】 …… (67)

第四章 不定积分 …… (68)
一、基本要求 …… (68)
二、内容精述 …… (68)
(一)不定积分的概念 …… (68)
(二)不定积分的计算 …… (68)
(三)几种特殊类型函数的不定积分 …… (69)
三、疑难解答 …… (70)
四、范例选讲 …… (75)
(一)不定积分的概念及其几何意义 …… (75)
(二)直接积分法 …… (75)
(三)第一类换元积分法(凑微分法) …… (76)
(四)第二类换元积分法 …… (77)
(五)分部积分法 …… (79)
(六)有理函数的积分 …… (80)
(七)三角函数有理式的积分 …… (82)

(八)简单无理函数的积分 ………………………………………………………… (83)
五、自我检查题 ………………………………………………………… (84)
【参考答案】………………………………………………………… (85)

第五章　定积分及其应用 ………………………………………………………… (87)
一、基本要求 ………………………………………………………… (87)
二、内容精述 ………………………………………………………… (87)
(一)定积分的概念 ………………………………………………………… (87)
(二)定积分的性质 ………………………………………………………… (88)
(三)定积分的计算 ………………………………………………………… (88)
(四)广义积分 ………………………………………………………… (89)
(五)定积分的应用 ………………………………………………………… (89)
三、疑难解答 ………………………………………………………… (89)
四、范例选讲 ………………………………………………………… (95)
(一)定积分的概念与性质 ………………………………………………………… (95)
(二)定积分的计算 ………………………………………………………… (96)
(三)有关变上限积分的问题 ………………………………………………………… (102)
(四)定积分的近似计算 ………………………………………………………… (103)
(五)定积分的应用 ………………………………………………………… (105)
五、自我检查题………………………………………………………… (110)
【参考答案】 ………………………………………………………… (114)
六、自测题(第四、五章) ………………………………………………………… (114)
【参考答案】 ………………………………………………………… (116)

第六章　微分方程 ………………………………………………………… (117)
一、基本要求………………………………………………………… (117)
二、内容精述………………………………………………………… (117)
(一)微分方程的基本概念 ………………………………………………………… (117)
(二)一阶微分方程 ………………………………………………………… (117)
(三)二阶常系数线性微分方程………………………………………………………… (118)
三、疑难解答………………………………………………………… (120)
四、范例选讲………………………………………………………… (122)
(一)微分方程的概念 ………………………………………………………… (122)
(二)可分离变量的微分方程 ………………………………………………………… (122)
(三)一阶线性微分方程 ………………………………………………………… (125)
(四)用微分方程解应用问题 ………………………………………………………… (126)
(五)可降阶的微分方程 ………………………………………………………… (127)
(六)二阶常系数线性微分方程………………………………………………………… (128)

(七)杂题 …………………………………………………………………………………… (131)
五、自我检查题 ……………………………………………………………………………… (132)
【参考答案】 ……………………………………………………………………………… (135)
六、自测题(第六章) ………………………………………………………………………… (136)
【参考答案】 ……………………………………………………………………………… (137)

附录 ……………………………………………………………………………………… (138)
综合测试题(一) …………………………………………………………………………… (138)
综合测试题(二) …………………………………………………………………………… (139)
综合测试题(三) …………………………………………………………………………… (140)
【参考答案】 ……………………………………………………………………………… (142)

第一章　函数、极限与连续

函数是高等数学研究的主要对象，极限是研究变量的重要工具，而连续性是函数的一个重要属性. 因此，函数、极限与连续是高等数学中最重要、最基本的概念，是高等数学的理论基础.

一、基本要求

（1）理解函数的概念，了解函数的四种特性，掌握基本初等函数的性质及图形，会分析复合函数的复合过程，了解分段函数的意义，会建立简单应用问题的函数关系式.

（2）理解极限的描述性定义，了解极限的性质，掌握极限的四则运算法则及两个重要极限，了解无穷递缩等比数列的求和公式.

（3）理解无穷大、无穷小的概念及它们之间的关系，了解无穷小的性质、无穷小的比较，会用等价无穷小求极限.

（4）理解函数连续性的概念，会判断函数间断点的类型，了解初等函数的连续性，知道闭区间上连续函数的性质.

二、内容精述

（一）函数的概念

1. 函数的定义

设 x 和 y 是两个变量，D 是一个数集. 如果对于 D 中的每一个数 x，按照某个对应法则 f，y 都有确定的值和它对应，那么 y 就叫做定义在数集 D 上的 x 的函数，记作 $y=f(x)$. x 叫做自变量，y 叫做因变量，数集 D 叫做函数的定义域，函数值的集合 $W=\{y|y=f(x),\ x\in D\}$ 叫做函数的值域.

2. 函数的定义域的确定

用解析式表示的函数，其定义域是使解析式有意义的一切自变量取值所构成的实数集. 例如：

（1）分式中，使分母不等于零的全体实数；

（2）偶次根式中，使被开方数非负的全体实数；

（3）对数式中，使真数大于零、底数大于零且不等于 1 的全体实数；

（4）三角函数及反三角函数式中，要符合三角函数、反三角函数的定义域；

（5）分段函数的定义域是各个段的定义域的并集.

在实际问题中出现的函数，其定义域是根据问题的实际意义确定的，通常它是由解析式所表示的函数的定义域的子集.

3. 函数的性质

（1）有界性　如果存在数 $M>0$，使得对 I 内任一 x，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界.

（2）单调性　对任意的 x_1、$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，

如果 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加；

如果 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调减少.

(3) 奇偶性　设 I 是关于原点对称的区间，对 I 内任意 x，

如果 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；

如果 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

(4) 周期性　对于函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，如果存在常数 $T\neq 0$，对任意 $x\in D$，只要 $x+T\in D$，都有 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，T 是 $f(x)$ 的一个周期. $f(x)$ 的周期通常是指的最小正周期.

4. 复合函数、初等函数

(1) 基本初等函数

常函数 $y=c$　(c 为常数)；

幂函数 $y=x^{\mu}$　(μ 为常数)；

指数函数 $y=a^x$　($a>0,a\neq 1,a$ 为常数)；

对数函数 $y=\log_a x$　($a>0,a\neq 1,a$ 为常数)；

三角函数 $y=\sin x,y=\cos x,y=\tan x,y=\cot x,y=\sec x,y=\csc x$；

反三角函数 $y=\arcsin x,y=\arccos x,y=\arctan x,y=\operatorname{arccot} x$.

(2) 复合函数　如果 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，而 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的值全部或部分在 $f(u)$ 的定义域内，那么 y 通过 u 的联系也是 x 的函数，我们称这个函数是由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，简称复合函数，记作 $y=f[\varphi(x)]$，其中 u 叫做中间变量.

(3) 初等函数　由基本初等函数经过有限次的四则运算与有限次的复合步骤构成、并且可以用一个式子表示的函数叫做初等函数.

(二) 函数的极限

1. 邻域

设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta>0$，则点 a 的 δ 邻域为

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\},\quad 即\quad U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta).$$

其中，a 是邻域中心，δ 是邻域半径.

点 a 的去心的 δ 邻域为

$$U(\hat{a},\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\},\quad 即\quad U(\hat{a},\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

当 δ 很小时，它们表示点 a 附近所有点的集合(后者除掉 a).

2. 函数的极限

(1) 当 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限

1° 定义　设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，如果当 x 无限接近于定值 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个确定的常数 A，那么 A 就叫做函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\quad 或\quad x\to x_0 时，f(x)\to A.$$

这里，$x\to x_0$ 包括 x 从大于 x_0 的方向趋近于 x_0(记作 $x\to x_0^+$)和 x 从小于 x_0 的方向趋近于 x_0(记作 $x\to x_0^-$).

2° 左、右极限　当 $x\to x_0^-$(或 $x\to x_0^+$)时，函数 $f(x)$ 无限接近于一个定数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左(右)极限，左极限记作

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A\quad 或\quad f(x_0-0)=A,$$

右极限记作

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A \quad 或 \quad f(x_0+0)=A,$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A.$$

3° 极限的"局部保号性"

i)如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，且$A>0$(或$A<0$)，则在$x_0$的某去心邻域内，$f(x)>0$(或$f(x)<0$).

ii)如果在x_0的某去心邻域内$f(x)\geqslant 0$(或$f(x)\leqslant 0$)，且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).

(2) $x\to\infty$时，函数$f(x)$的极限

定义　设函数$f(x)$在$|x|>M$时有定义，如果当$|x|$无限增大时，函数$f(x)$无限接近于一个确定的常数A，那么A就叫做函数$f(x)$当$x\to\infty$时的极限，记作$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$或当$x\to\infty$时，$f(x)\to A$.

这里，$x\to\infty$包括$x\to+\infty$(x取正数而绝对值无限增大)和$x\to-\infty$(x取负数而绝对值无限增大).

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

(3) 数列的极限

1° 定义　如果当n无限增大时，数列x_n无限接近于一个确定的常数A，那么A就叫做数列x_n的极限，或称数列x_n收敛于A，记作$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$，或当$n\to\infty$时，$x_n\to A$.

这里，$n\to\infty$是指n取正整数而绝对值无限增大，因此数列极限是函数极限的一种特例.

2° 性质

i)如果数列x_n收敛，那么数列x_n一定有界.

ii)单调有界数列必有极限.

3° 无穷递缩等比数列的和

无穷递缩等比数列$a,aq,aq^2,\cdots,aq^{n-1},\cdots$　($|q|<1$)的和$S=\dfrac{a}{1-q}$.

(4) 极限的运算法则

设下列极限是在自变量的同一变化过程中的极限，如果$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$　(A、B为常数)，则

i) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

ii) $\lim[f(x)g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

iii) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$　($B\neq 0$).

(5) 两个重要极限

1° $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

2° $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$　或　$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

3. 无穷小与无穷大

(1) 无穷小的定义　如果$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=0$，则称函数$f(x)$是当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷小量，简称无穷小.

无穷小量一般都是变量，且与自变量的变化过程有关，0是一个特殊的无穷小量.

(2) 函数极限与无穷小的关系

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=A \Longleftrightarrow f(x)=A+\alpha\,(\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha=0).$$

(3) 无穷小的性质

1° 常量与无穷小的乘积仍是无穷小；

2° 有界函数与无穷小的乘积仍是无穷小；

3° 有限个无穷小的和、差、积仍是无穷小.

(4) 无穷大的定义　如果当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$ 的绝对值无限增大，则称函数 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大量，简称无穷大，记作 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$.

(5) 无穷大与无穷小的关系　在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 是无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷小；反之，如果 $f(x)$ 是无穷小，且 $f(x)\neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 是无穷大.

(6) 无穷小的比较

1° 设 α 和 β 都是自变量的同一变化过程中的无穷小，在这个变化过程中，如果

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\begin{cases}0, & \text{则称 } \beta \text{ 是较 } \alpha \text{ 高阶的无穷小，记作 } \beta=o(\alpha);\\ \infty, & \text{则称 } \beta \text{ 是较 } \alpha \text{ 低阶的无穷小；}\\ c\quad(c\neq 0), & \text{则称 } \beta \text{ 是与 } \alpha \text{ 同阶的无穷小；}\\ 1, & \text{则称 } \beta \text{ 是与 } \alpha \text{ 等价的无穷小，记作 } \beta\sim\alpha.\end{cases}$$

2° 推广　如果 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c\quad(c\neq 0)$，则称 β 是 α 的 k 阶无穷小.

3° 等价无穷小的重要性质　如果 $\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

(7) 常用的极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & m=n,\\ 0, & m>n,\\ \infty, & m<n.\end{cases}$$

(三) 函数的连续性

1. 函数的增量

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义，$x_0+\Delta x$ 在此邻域内，则称

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

为函数 $f(x)$ 在点 x_0 处对应于 Δx 的增量(改变量). Δx 叫做自变量的增量. Δx 可正可负.

2. 函数的连续性

(1) 定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

从几何上看，如果 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续，则曲线 $y=f(x)$ 在 x_0 处不断开.

(2) 用增量定义函数的连续性　如果令 $\Delta x=x-x_0$，则

$$\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0).$$

$$x\to x_0,\quad \text{即}\quad \Delta x\to 0,$$

$$f(x)\to f(x_0),\quad \text{即}\quad \Delta y\to 0.$$

于是极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$可写成$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,函数 $y=f(x)$在点 x_0 连续可叙述成:

设函数 $y=f(x)$在点 x_0 的某邻域内有定义,如果$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$,则称函数 $y=f(x)$在点 x_0 处连续.

这表明,如果 $y=f(x)$在点 x_0 处连续,则当自变量 x 在 x_0 处变化微小时($\Delta x\to 0$),相应的函数 y 的变化也必然是微小的($\Delta y\to 0$).

(3) 函数在区间上的连续性　如果函数 $y=f(x)$在(a,b)内每一点都连续,则称函数 $y=f(x)$在(a,b)内连续.

如果函数 $y=f(x)$在(a,b)内连续,且在点 a 处右连续($f(a+0)=f(a)$),在点 b 处左连续($f(b-0)=f(b)$),则称函数 $y=f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续.

3. 函数的间断点及其分类

(1) 间断点　若函数 $y=f(x)$有下列三种情形之一:

1° 在 x_0 处无定义;

2° $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在;

3° 虽然 $f(x_0)$及$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$都存在,但$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$,则函数 $y=f(x)$在点 x_0 处不连续,点 x_0 称为函数 $f(x)$的不连续点或间断点.

(2) 间断点的分类

$$\text{间断点}\begin{cases}\begin{array}{l}\text{第一类间断点}\\ f(x_0-0),f(x_0+0)\text{均存在}\end{array}\begin{cases}\text{跳跃间断点 } f(x_0-0)\neq f(x_0+0),\\ \text{可去间断点 } f(x_0-0)=f(x_0+0);\end{cases}\\ \begin{array}{l}\text{第二类间断点}\\ \text{(非第一类间断点)}\end{array}\begin{cases}\text{无穷间断点 } \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty,\\ \text{振荡间断点.}\end{cases}\end{cases}$$

4. 初等函数的连续性

(1) 如果函数 $f(x)$与 $g(x)$在 x_0 处连续,则 $f(x)\pm g(x)$、$f(x)g(x)$、$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x_0)\neq 0)$在点 x_0 处也是连续的.

该结论可推广到有限个函数的情形,对于商,要求分母不为零.

(2) 在某区间内单调连续的函数,其反函数在对应的区间上也单调连续.

(3) 设有两个函数 $y=f(u)$和 $u=\varphi(x)$,如果 $u=\varphi(x)$在点 x_0 处连续,函数 $y=f(u)$在点 $u_0=\varphi(x_0)$处连续,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$在点 x_0 处也连续.

(4) 基本初等函数在其定义域内是连续的.

(5) 一切初等函数在其定义区间内是连续的.

“定义区间”就是包含在定义域内的区间.

5. 闭区间上连续函数的性质

(1) 最大值、最小值定理　闭区间上连续的函数,在该区间上至少取得最大值、最小值各一次.

(2) 介值定理　如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,则它在$[a,b]$上一定能取到介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何一个中间值 C $(m<C<M)$.

即对任意实数 C $(m<C<M)$,至少存在一点 $\xi\in[a,b]$,使 $f(\xi)=C$.

推论(零点定理)　如果函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)f(b)<0$,那么至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=0$.

三、疑难解答

1. "函数 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 与 $y=x$ 的定义域、值域都相同，所以这两个函数就相同."这种说法对吗？

答　错. 正确的说法应为：因为函数 $y=\sqrt[3]{x^3}$ 与 $y=x$ 的定义域、对应法则都相同，所以这两个函数相同.

函数的两要素是定义域和对应法则，而值域是由前两者确定的，即如果两个函数的定义域和对应法则相同，它们的值域必然相同. 反之，如果两个函数的定义域和值域相同，它们的对应关系不一定相同，例如 $y=x$ 与 $y=x+1$，其定义域均为 $\mathbf{R}$，值域也为 $\mathbf{R}$，但它们的对应法则显然不同，因此它们不是同一个函数.

2. "分段函数一定不是初等函数."这种说法对吗？

答　错. 分段函数是在自变量的不同变化范围内，对应法则用不同式子来表示的函数. 由于通常要用几个式子表示一个函数，所以分段函数一般不是初等函数. 但也有例外，例如

$$y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0 \end{cases}$$

可以写成 $y=\sqrt{x^2}$，而 $y=\sqrt{x^2}$ 是由 $y=\sqrt{u}$ 和 $u=x^2$ 复合而成的，所以这个分段函数是一个初等函数.

3. 学习函数的性质时，要注意什么？

答　函数的性质有单调性、奇偶性、有界性与周期性.

在学习函数的单调性时应注意，单调性往往是在某个区间上考虑，而不一定是在整个定义域上考虑的. 例如函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 内单调减少，在 $(0,+\infty)$ 内单调增加，但在整个定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内却不单调. 当然也有在整个定义域内单调的函数，例如 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调减少.

在学习函数的奇偶性时，应注意以下几点：①奇(偶)函数的定义域是关于原点对称的数集；②奇函数的图形关于原点对称，偶函数的图形关于 y 轴对称；③两个奇函数之和(差)仍为奇函数，两个偶函数之和(差)仍为偶函数，两个奇函数(或两个偶函数)之积是偶函数，一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

函数的有界性也是与区间有关的. 例如 $y=\frac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内有界，但在 $(0,1)$ 内无界. 在有界性定义中，$|f(x)|\leqslant M$ 中的 M 不是唯一的，例如 $|\sin x|\leqslant 1$，这里 1 扮演 M 的角色，若写成"$|\sin x|<2$，所以 $\sin x$ 有界"，这样说也是对的. 另外，$|f(x)|\leqslant M$ 中的绝对值符号不能丢，如果说"$f(x)<M$，则 $f(x)$ 有界"就错了，例如函数 $y=-\sqrt{x^2+1}$，尽管 $y<0$，但当 $x\to\infty$ 时，$y\to-\infty$，所以 $y=-\sqrt{x^2+1}$ 无界. 从直观上讲，函数 $f(x)$ 有界，就是其图形 $y=f(x)$ 位于 $y=M$ 与 $y=-M$ 这两条平行线之间的带形区域内.

对于周期函数，绝大多数周期函数都存在最小正周期. 例如 $y=\sin x$、$y=\cos x$ 的周期是 2π，$y=\tan x$、$y=\cot x$ 的周期是 π，$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{|\omega|}$. 但也存在没有最小正周期的周期函数，例如狄利克雷(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases} 1, & x\text{ 为有理数}, \\ 0, & x\text{ 为无理数}. \end{cases}$$

任意正有理数 r 都是它的周期. 事实上，当 x 为有理数时，$D(x\pm r)=D(x)=1$，当 x 为无理数

时 $D(x\pm r)=D(x)=0$，而有理数无最小正有理数.

4. 学习复合函数应掌握些什么？任何两个函数都能复合成复合函数吗？试举例说明.

答 一方面，学习复合函数应会将两个或多个函数复合成复合函数. 例如，由 $y=\mathrm{e}^{1+u}$、$u=\sin v$、$v=\sqrt{x}$ 可构成复合函数 $y=\mathrm{e}^{1+\sin\sqrt{x}}$. 注意，并不是任何两个函数都可构成复合函数的，例如由 $y=\sqrt{u}$，$u=-2^x$ 就不能构成复合函数. 这是因为 $u=-2^x<0$，而 $y=\sqrt{u}$ 要求 $u\geqslant 0$. 一般地，当 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集不是空集时，两个函数才能构成复合函数.

另一方面，对于一个复合函数，要会分析它的复合过程，分析方法是“由外向里，层层分析”，每一步得到的函数都应当是某个中间变量或自变量的基本初等函数，或基本初等函数的和、差、积、商. 例如函数 $y=\ln^2\dfrac{x+1}{x-1}$ 应看成是由 $y=u^2$、$u=\ln v$ 与 $v=\dfrac{x+1}{x-1}$ 复合而成. 通过复合函数的分解，可将一个较复杂的函数分解成几个简单函数（基本初等函数或其和、差、积、商）来研究.

5. 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义、$f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在与 $f(x)$ 在 x_0 处连续，三者有何关系？

答 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义，是指 $f(x_0)$ 存在，与 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 是否存在无关. 例如函数

$$f(x)=\begin{cases}x-1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ x+1, & x>0\end{cases}$$

在 $x=0$ 处有定义，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 不存在.

函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时极限存在，要求 $f(x)$ 在点 x_0 的左、右近旁（点 x_0 的去心邻域）内有定义，但 $f(x)$ 在点 x_0 处可以没有定义，例如函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$，$\lim\limits_{x\to 1}f(x)=2$，但 $f(x)$ 在点 $x=1$ 处无定义.

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，须同时满足三条：①$f(x)$ 在点 x_0 处有定义，即 $f(x_0)$ 存在；②$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在；③$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

6. 使用极限的四则运算法则时应注意什么？

答 使用极限的四则运算法则时应注意以下几点：

(1) 这些法则只有在参与运算的每个函数或数列的极限都存在时才能使用. 例如

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\sin x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\sin x=0.$$

这种做法是错误的. 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 不存在，不能用乘法法则. 正确的做法应为：当 $x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}$ 是无穷小量，$\sin x$ 是有界函数，利用有界函数与无穷小量的乘积仍为无穷小量这一性质可得 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\sin x=0$.

又如求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3^n}{2^n-3^n}$ 时，因为分子、分母的极限都不存在，因此不能直接使用商的极限运算法则，但是分子、分母同时除以 3^n 后极限存在，就可以使用商的极限运算法则了.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-1}=\frac{0+1}{0-1}=-1.$$