高等学校教材

线性代数

朱金寿 主编

武汉理工大学出版社
WUTP Wuhan University of Technology Press

高等学校教材

线性代数

主　编　朱金寿
副主编　吴华安　欧卓玲　何　朗

武汉理工大学出版社
·武汉·

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/朱金寿主编.—武汉:武汉理工大学出版社,2003.8
ISBN 7-5629-1986-0

Ⅰ.线… Ⅱ.朱… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2
中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第107078号

【内容提要】

本书是根据1995年国家教委批准的高等工业学校“线性代数”课程教学基本要求编写的。

本书内容主要包括:行列式、矩阵运算、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵与二次型、线性空间与线性变换。第7章介绍多项式的基本理论,供需要的学生学习。最后一章介绍线性代数中的典型例题与基本解题方法,可作为教师上习题课参考,也可供要求较高的学生或要考研究生的读者选学。书末附有练习和习题的参考答案。

本书可作为各类高等工科院校本、专科各相关专业教材或教学参考书,也可作为网络教育与成人继续教育的教学用书,还可作为工程技术人员的自学教材。

出版发行:武汉理工大学出版社(武汉市武昌珞狮路122号　邮政编码:430070)
经 销 者:各地新华书店
印 刷 者:安陆市鼎鑫印务有限责任公司
开　　本:787×960　1/16
印　　张:17.75
字　　数:341千字
版　　次:2003年8月第1版
印　　次:2003年8月第1次印刷
书　　号:ISBN 7-5629-1986-0/O·74
印　　数:1～10 000册
定　　价:23.00元

前　言

根据1995年国家教委批准的高等工业学校“线性代数”课程教学基本要求的精神，我们积多年在大学讲授本课程的实践经验，在授课讲义的基础上改编成这本适用于不同教学要求的院校和专业的线性代数教材。

本书介绍了线性代数课程教学的基本内容和基本计算方法。为了便于读者自学、容易入门，我们以理论与实例相结合的方式，采用从具体到抽象的编写手法，力求做到语言精练、准确，内容深入浅出、通俗易懂。书中每节都配备了适量的例题和习题，并力求例题和习题新颖、典型、具有代表性和实用性，以便读者理解和掌握基本概念。为了提高读者分析和解决问题的能力，本书还配备了很多线性代数的应用实例。书末附有练习与习题的参考答案。

本书第7章介绍了一元多项式的基本理论和知识，供需要的专业选用。本书的最后还介绍了线性代数的典型例题和基本解题方法，是对前面基本内容的补充和综合应用，供教师上习题课参考及选用，也可供要求较高的读者选读。我们建议读者全读或选读，这样一定受益非浅。

本书由武汉大学叶明训教授主审，参加审稿的还有吴传生教授、周树民教授、肖新平教授、童恒庆教授、王卫华副教授，他们都认真审阅了全部书稿并提出不少宝贵意见和建议；在本书的编写过程中，曾祥金教授、张小柔教授、卫加宁教授给予了大力支持和热情帮助，提出了很多建设性的意见，对本书的编写作出很大的贡献。在此特向他们表示衷心感谢。

武汉理工大学出版社对本书的编审、出版给予了热情的支持和帮助，在此一并致谢。

由于时间仓促，水平有限，书中难免有不妥之处，恳请各位同行和广大读者在使用后提出意见，以便进行修改完善。

编　者

2003年6月

目　　录

1 行列式

行列式是线性代数中最基本的概念之一，它在数学的许多分支及其他学科中都有着广泛的应用．本章我们主要讨论以下两个问题：

(1) 行列式的定义、性质和计算；

(2) 克莱姆法则．

1.1 行列式的定义

1.1.1 二、三阶行列式的概念

行列式的概念是由解方程组的问题引出的，我们就从解方程组开始，对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases} \tag{1.1}$$

用高斯消元法得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$$

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = b_2a_{11} - b_1a_{21}$$

当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，易知方程组(1.1)的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \qquad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

但上面的公式不便于记忆，于是引进记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1.2}$$

它表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称公式(1.2)为**二阶行列式**，它含有两行两列(横排

称为**行**，竖排称为**列**），a_{11}、a_{12}、a_{21}、a_{22}称为行列式的**元素**（或简称为**元**），元素a_{ij}的第一个下标表示它所在的行，称为**行标**；第二个下标表示它所在的列，称为**列标**．例如a_{21}表示行列式中第二行第一列的元素．

若记：

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-b_2a_{12}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=b_2a_{11}-b_1a_{21}$$

则方程组(1.1)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

其中，$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$是由方程组(1.1)的系数按原来的顺序所成的行列式，称为方程组的**系数行列式**，$D_i(i=1,2)$是将D中第i列元素a_{1i}、a_{2i}分别用常数b_1、b_2代替所得的二阶行列式．

类似地，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1.3}$$

记三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1.4}$$

当$D\neq 0$时，方程组(1.3)有惟一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D} \tag{1.5}$$

其中$D_i(i=1,2,3)$是将其系数行列式D的第i列换成方程组右边的常数项所成的行列式．

上述解的公式明显地表出方程组的解与其系数及常数项的关系，便于记忆与使用．

【例 1.1】 求解方程组

$$\begin{cases} 2x_1-x_2-x_3=4 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=11 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11 \end{cases}$$

【解】 由公式(1.4)可得

$$D=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ 3 & 4 & -2\\ 3 & -2 & 4\end{vmatrix}=2\times4\times4+(-1)\times(-2)\times3+(-1)\times3\times(-2)-2\times(-2)\times(-2)-(-1)\times3\times4-(-1)\times4\times3=60$$

$$D_1=\begin{vmatrix}4 & -1 & -1\\ 11 & 4 & -2\\ 11 & -2 & 4\end{vmatrix}=180,\quad D_2=\begin{vmatrix}2 & 4 & -1\\ 3 & 11 & -2\\ 3 & 11 & 4\end{vmatrix}=60$$

$$D_3=\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 3 & 4 & 11\\ 3 & -2 & 11\end{vmatrix}=60$$

由公式(1.5)得所求解

$$x_1=\frac{D_1}{D}=3,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=1,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=1$$

【例 1.2】 解方程

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & x\\ 4 & 9 & x^2\end{vmatrix}=0$$

【解】 方程左端的三阶行列式

$$\begin{aligned}D&=3x^2+4x+18-9x-2x^2-12\\&=x^2-5x+6\end{aligned}$$

由 $x^2-5x+6=0$，得 $x=2$，$x=3$.

1.1.2 排列及其逆序数

有了二、三阶行列式的定义，我们自然会想到怎样把它们推广到 n 阶行列式，并利用它来求解 n 元线性方程组.

为此，我们先分析一下三阶行列式(1.4)的结构：

(1) 它是 6 项(刚好是 1,2,3 的全排列个数)的代数和；

(2) 它的每一项都恰好是三个元素的乘积，且这三个元素位于不同的行和不同的列；

(3) 每项带有正号或负号.

决定每项正负符号的规律是什么呢？

如果将式(1.4)中每项三个元素的行标都按 1,2,3 排列，则带正号和负号的

项的列标所成的排列分别为

$$123 \qquad 231 \qquad 312 \tag{1.6}$$

$$132 \qquad 213 \qquad 321 \tag{1.7}$$

为了找出(1.6)、(1.7)两组排列的区别，我们先引入排列及逆序数的概念.

我们知道，n 个不同元素全部取出的一个排列称为n 个不同元素的一个**全排列**，排列的个数为

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!$$

当n 个元素为自然数$1\sim n$ 时，对于两个自然数，如果大的排在小的前面，就称这两个自然数间有一个**逆序**，一个排列中所有逆序的总和称为这个排列的**逆序数**.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**，逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

下面介绍求逆序数的方法，设

$$j_1 j_2 \cdots j_n$$

为n 个自然数$1,2,\cdots,n$ 的一个排列，考虑元素$j_i(i=1,2,\cdots,n)$，如果比j_i 大且排在 j_i 前面的元素有 τ_i 个，称 j_i 的逆序数为τ_i，全体元素的逆序数的总和

$$\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n$$

即是这个排列的**逆序数**，记为$\tau(j_1 j_2\cdots j_n)$，简记为τ，即

$$\tau=\tau_1+\tau_2+\cdots+\tau_n$$

【例 1.3】 求排列 43521 的逆序数.

【解】 在排列 43521 中，

4 排在首位，逆序数为 0；

3 的前面比 3 大的数有一个：4，故逆序数为 1；

5 是最大的数，故逆序数为 0；

2 的前面比 2 大的数有三个：4、3、5，故逆序数为 3；

1 的前面比 1 大的数有四个：4、3、5、2，故逆序数为 4.

于是这个排列的逆序数为

$$\tau=0+1+0+3+4=8$$

故排列 43521 是一个偶排列.如果把其中任意两个元素互换一下位置，而其他元素不动，不难算出所得到的排列是一个奇排列，这种作新排列的方法称为一个**对换**.

例如，将偶排列 43521 的前两个元素作一次对换，得到一个新排列 34521，其逆序数为 7，即为奇排列. 一般地有：

一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

因为$\tau(123)=0$，$\tau(231)=2$，$\tau(312)=2$，则(1.6)组都是偶排列；

又因为$\tau(132)=1$，$\tau(213)=1$，$\tau(321)=3$，即(1.7)组都是奇排列.

由此可知，三阶行列式中每项正负号由其列标所成排列的奇、偶性决定，即此排列为奇排列时，取负号，是偶排列时，取正号.

于是三阶行列式的一般项可记为

$$(-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

当 $j_1j_2j_3$ 取123的所有排列时，便得到三阶行列式(1.4)的全部6项，所以三阶行列式可写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)}a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}$$

其中 $\sum$ 表示对123的所有排列 $j_1j_2j_3$ 求和.

显然二阶行列式也有类似的表达式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1j_2)}a_{1j_1}a_{2j_2}$$

由此，我们引入 n 阶行列式的定义.

定义 由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 排成 n 行 n 列，两边各加一竖直线组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 **n 阶行列式**，它表示所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

的代数和，各项的符号由排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的**逆序数**决定. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时取正号，$j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时取负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.8}$$

其中 $\sum$ 表示对 $1,2,\cdots,n$ 的所有排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和，$\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 为 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数. a_{ij} 称为行列式的**元素**. 行列式定义式(1.8)可简记为 $|a_{ij}|_n$.

当 $n=1$ 时，规定 $|a|=a$，注意此时不要与数的绝对值符号混淆.

下面根据定义计算两类最简单(含零较多)也是最重要的行列式.

【例1.4】 证明 n 阶**对角行列式**(其中对角线上的元素是 λ_i，未写出的元素均为0)

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

【证】 第一式是显然的，下面只证第二式.

若记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$，则依行列式的定义有

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\tau[n(n-1)\cdots 21]}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\tau[n(n-1)\cdots 21]}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

而 $\tau[n(n-1)\cdots 21] = 1+2+\cdots+(n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$，故第二式成立. □

为了方便起见，一般称 n 阶行列式从左上角到右下角的对角线为**主对角线**；从右上角到左下角的对角线为**次对角线**. 如果主对角线以下(上)的元素均为零，则行列式称为**上(下)三角行列式**.

【例 1.5】 证明上三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

【证】 由于当 $j<i$ 时，$a_{ij}=0$，故

$$D = \sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

中可能不为零的项中元素 a_{ij_i}，其下标应有 $j_i \geqslant i$，即 $j_1\geqslant 1, j_2\geqslant 2, \cdots, j_n\geqslant n$，由此可得 $j_n=n, j_{n-1}=n-1, \cdots, j_1=1$，所以

$$D = (-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$ □

在上面 n 阶行列式的定义中，每项各元素的行标是按自然次序排列的，实际上我们可以交换乘积中元素的次序，使每项各个元素的列标按自然次序排列，而

行标为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$，从而有类似定义

$$D=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_1 1}a_{p_2 2}\cdots a_{p_n n} \tag{1.9}$$

1.2 行列式的性质

直接用行列式的定义计算行列式，在一般情况下是较繁琐的，因此，我们要从定义推导出行列式的一些性质，以便简化行列式的计算．

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称行列式 D' 为行列式 D 的**转置行列式**．

性质 1 行列式与其转置行列式相等．

【证】 记

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

即 $b_{ji}=a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，由式(1.9)及式(1.8)得

$$\begin{aligned} D' &= \sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}b_{j_1 1}b_{j_2 2}\cdots b_{j_n n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \end{aligned}$$

故

$$D'=D$$ □

性质 1 表明，在行列式中行与列的地位是相同的，因此，凡是行列式对行成立的性质，对列也同样成立，反之亦然．

性质 2 互换行列式的两行(列)，行列式变号．

【证】　设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是将行列式 $D=|a_{ij}|_n$ 的第 k 行与第 s 行互换得到的，即当 $i\neq k,s$ 时，$b_{ij}=a_{ij}$；当 $i=k,s$ 时，$b_{kj}=a_{sj}$，$b_{sj}=a_{kj}$，于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_s\cdots j_n)}b_{1j_1}\cdots b_{kj_k}\cdots b_{sj_s}\cdots b_{nj_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_s\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{sj_k}\cdots a_{kj_s}\cdots a_{nj_n} \\ &= -\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_s\cdots j_k\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{kj_s}\cdots a_{sj_k}\cdots a_{nj_n} \\ &= -D \end{aligned}$$

其中第三步利用了对换改变排列奇偶性的结论．　□

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示第 i 列，互换 i、j 两行，记为 $r_i\leftrightarrow r_j$；互换 i、j 两列记为 $c_i\leftrightarrow c_j$.

性质3　用数 k 乘行列式的某一行（列）的每个元素，等于用数 k 乘此行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

【证】　由行列式的定义，有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} &= \sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= k\sum(-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

□

推论1 行列式某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论2 若行列式中有两行(列)的对应元素成比例,则此行列式为零.

第 i 行(列)乘以 k,记为 $k\times r_i$(或 $k\times c_i$);第 i 行(列)提出公因子 k,记为 $r_i\div k$(或 $c_i\div k$).

性质4 若行列式的某一行(列)的元素皆为两数之和,则此行列式等于两个行列式的和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

推论 若行列式的某一行(列)的元素皆为 m 个数的和,则此行列式等于 m 个行列式之和.

利用性质4及性质3的推论,可得

性质5 用数 k 乘行列式的某一行(列)的所有元素加到另一行(列)的对应元素上去,行列式的值不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{i1}+ka_{j1} & a_{i2}+ka_{j2} & \cdots & a_{in}+ka_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上,记为 r_i+kr_j;以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上,记为 c_i+kc_j.

以上未证明的性质及推论留给读者自己证明.

利用这些性质可以简化行列式的计算,下面以例题介绍如何利用行列式的性质化行列式为三角行列式,然后进行计算.

【例 1.6】　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

【解】

$$D\xlongequal[①]{c_1\leftrightarrow c_3}-\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ -1 & 7 & -3 & 4 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_4-r_1\\ ②}]{\substack{r_2+r_1\\ r_3-2r_1}}-\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_2]{r_3-2r_2}\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=1\times1\times(-3)\times3=-9$$

注意:(1) 请读者思考第①步为什么作变换“$c_1\leftrightarrow c_3$”?

(2) 第②步是三个运算的一个省略写法,运算次序为从上到下,这种次序一般不能颠倒,这是由于后一次运算是作用在前一次运算结果上的缘故.

(3) 还要注意运算r_i+r_j与r_j+r_i的区别,并且记号r_i+kr_j不能写作kr_j+r_i.

【例 1.7】　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & b+c & c+d \\ a & 2a+b & 3b+c & 4c+d \\ a & 3a+b & 6b+c & 8c+d \end{vmatrix}$$

【解】　从第 4 行开始,后行减前行

$$D\xlongequal[r_2-r_1]{\substack{r_4-r_3\\ r_3-r_2}}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & a & 2b & 3c \\ 0 & a & 3b & 4c \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & b & 2c \\ 0 & 0 & b & c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & b & 2c \\ 0 & 0 & 0 & -c \end{vmatrix}=-a^2bc$$

【例 1.8】 计算行列式 $D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$.

【解】 这个行列式的特点是每行(列)元素之和均相等,由行列式的性质,把第 2、3、…、n 列都加到第 1 列上,行列式不变,得

$$D_n=\begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & b & a & \cdots & b \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \\ a+(n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1\div[a+(n-1)b]}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ 1 & b & a & \cdots & b \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_3-r_1\\ \cdots \\ r_n-r_1}]{r_2-r_1}[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$=[a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

【例 1.9】 设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & & & \\ \vdots & & \vdots & & \boldsymbol{O} & \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & & & \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

$$D_1=|a_{ij}|_k=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$$