

51.221
255

分式与比例

中国数学会上海分会
中学数学研究委员会編

新 知 識 出 版 社

83

5

分 式 与 比 例

中國數學會上海分會
中學數學研究委員會編

新 知 識 出 版 社

一九五七年·上海

分 式 与 比 例

中國数学会上海分会
中学数学研究委员会編

新 知 識 出 版 社 出 版

(上海湖南路9号)

上海市書刊出版業營業許可証出015号

上海國光印刷厂印刷 新華書店上海發行所总經售

*

开本: 787×1092 1/32 印张: 1 7/8 字数: 41,000

1957年3月第1版 1957年3月第1次印刷

印数: 1-80,000本

統一書号: 18076·69

定 价: (7) 0.18 元

序 言

本会为了帮助教师学习苏联先进教学经验，积极提高教学质量，并根据当前中学教学实际需要，决定编写一套有关初高中数学各科包括算术、代数、几何、三角的教学参考读物，陆续出版，以便中学数学教师进一步研究和了解教材，从而更好地掌握教材的目的性。同时，这套小册子也可供初高中学生作为课外补充读物。我们希望通过这套小册子的出版，能促进数学界同志对中学数学教材的研究，并促进教学经验的交流。

“分式与比例”这本小册子是根据“中学数学教学大纲”（修订草案）中“分式”及“比例和比例关系”两部分编写的。首先以算术中分数的意义、性质及运算为基础，导出分式的意义性质及运算，再从整式的恒等变换，导出有理式的恒等变换，并突出恒等变换的目的性。其次就算术中比例的基础上引伸出比例理论及其变化关系，为学习函数打下基础；并说明比例式是由恒等变换过渡到方程的道理。

本会在编写本册前，曾拟就编写计划，经编辑组讨论确定编写提纲。然后由黄公安、夏守岱两同志提供材料，由范际平同志执笔写成初稿。再经程其襄、杨荣祥、黄公安、夏守岱诸同志校订，最后由范际平同志作了修正。虽然这样，但由于我们水平有限，缺点是难免的，希望数学界同志予以批评和指正。

中国数学会上海分会中学数学研究委员会

1936年11月

目 錄

一	分式的意义及其基本性質.....	1
二	約分与通分.....	6
三	分式加减法.....	16
四	分式乘除法.....	24
五	比例的意义及其主要性質.....	34
六	比例式的变化.....	39
七	比例关系.....	52

一 分式的意义及其基本性質

1. 分式的意义

整式 A 除以整式 B , 寫做 $\frac{A}{B}$, 这种形式叫做分式。 A 叫做分子, B 叫做分母。例如: $\frac{a-2}{b-3}$, $\frac{3x-1}{x^2-x-2}$, $\frac{2y^2+y-6}{y+2}$ 等都是分式。在除法里面, 我們已經曉得零是不能做分母的, 所以使分母为零的数值是不能允許的。如: $\frac{a-2}{b-3}$ 中 b 不能为 3, $\frac{3x-1}{x^2-x-2}$ 中 x 不能为 -1 或 2 , $\frac{2y^2+y-6}{y+2}$ 中 y 不能为 -2 。在分式中, 我們應該特別注意文字的允許值(使代数式有意义的文字的一切数值叫做这文字的允許值), 像 $\frac{a-2}{b-3}$ 中, 文字 b 的允許值是除了 3 以外的一切数值, 而 a 的允許值是一切数值; $\frac{3x-1}{x^2-x-2}$ 中, 文字 x 的允許值是除了 -1 及 2 以外的一切数值; $\frac{2y^2+y-6}{y+2}$ 中, 文字 y 的允許值是除了 -2 以外的一切数值。在这里所謂“一切数值”当然是指一切有理数值。

讓我們來看分式 $\frac{a-2}{b-3}$ 的数值, 例如:

$$a=8, \quad b=5, \quad \frac{a-2}{b-3} \text{ 的值} = \frac{6}{2} = 3;$$

$$a=4, \quad b=6, \quad \frac{a-2}{b-3} \text{ 的值} = \frac{2}{3};$$

$$a=1, \quad b=4, \quad \frac{a-2}{b-3} \text{ 的值 } = \frac{-1}{1} = -1;$$

$$a=5, \quad b=1, \quad \frac{a-2}{b-3} \text{ 的值 } = \frac{3}{-2} = -\frac{3}{2};$$

$$a=2, \quad b=-2, \quad \frac{a-2}{b-3} \text{ 的值 } = \frac{0}{-5} = 0.$$

所以分式与分数虽然非常类似（都是分子除以分母的商），但分数的值是固定不动的，而分式的值可为整数、分数、正数、负数，也可以为零。即分式包括分数，分数是分式的特例。吉西略夫著的“代数”课本中所谓分式与分数的区别即指此点。

吉西略夫著的“代数”中，因为多项式的次数讲得很迟，所以分式像分数一样可分为真分式与假分式，教材中不谈及。目前中学数学教学大纲，把部分分式早已删去，中学生并没有区别分式为真分式抑为假分式的必要。至于带分式因为代数中加号不能省去，没有述及的必要。

2. 分式的基本性质

分式运算的总枢纽是分式的基本性质：分式的分子分母，如同乘（或除）以其值不等于零的整式，分式的值不变。

在学习除法的时候，曾说过被除数与除数同乘（或除）以异于零的数其商不变，很自然，这个性质也应当适合于分数，也就是说，分数的分子与分母同乘（或除）以不等于零的数其值不变。但由于算术中讨论的数都是正数，所以分子分母以及所乘（或除）的数都是正数的情况，就不必再论证了。吉西略夫著的“代数”中用 $a = -\frac{2}{3}$, $b = \frac{7}{5}$, $c = -\frac{4}{9}$ 来推证是很必要的。

$$\text{因为 } \frac{a}{b} = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}} = -\frac{2}{3} \times \frac{5}{7} = -\frac{10}{21},$$

$$\begin{aligned}\frac{ac}{bc} &= \frac{\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{4}{9}\right)}{7\left(-\frac{4}{9}\right)} = \frac{\frac{8}{27}}{-\frac{28}{45}} = \frac{8}{27} \times \left(-\frac{45}{28}\right) \\ &= \frac{2(-5)}{3 \times 7} = -\frac{10}{21};\end{aligned}$$

所以 $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

我們可先用負整數驗證，更容易被同學接受。

例如 $a = -3$, $b = -7$, $c = -5$.

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{-3}{-7} = \frac{3}{7}, \quad \frac{ac}{bc} = \frac{(-3)(-5)}{(-7)(-5)} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7};$$

$$\therefore \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}.$$

我們曉得這個性質不是說，分式的分子分母如同乘（或除）以其值不等于零的整式，形狀不變，而是說它的數值不變。

這個基本性質用式子表示如下：

$$\frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}.$$

$\frac{A}{B}$ 表示任何分式，而 C 表示任何不等于零的整式。

我們如果曉得等式的性質，可以論證如下：

$\frac{A}{B}$ 是表示 A 除以 B 的商（ B 的值不為零）。

設它的商是 x ，即 $\frac{A}{B} = x$ ，

則 $A = Bx$ 。

兩邊同乘以 C ($C \neq 0$)，得 $AC = (BC)x$ 。

$$\because B \neq 0, C \neq 0, \therefore BC \neq 0.$$

那就表明, x 的值如果乘以不等于零的值 BC , 便应当等于 AC 的值.

$$\text{再按除法定义得} \quad x = \frac{AC}{BC}.$$

$$\text{即} \quad \frac{A}{B} = \frac{AC}{BC}.$$

如果分式 $\frac{x-1}{x-2}$ 的分子分母同乘以 $x-3$, 则分式 $\frac{x-1}{x-2}$ 变换为 $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-3)}$. 要注意在 $x \neq 2, x \neq 3$ 的限制下 $\frac{x-1}{x-2} = \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-3)}$. 那就是說兩個分式 $\frac{x-1}{x-2}, \frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-3)}$

除了 $x \neq 2$ 这一限制外, 还要加上 $x \neq 3$ 的限制, 它們才相等. 我們不能認為 $x=3$ 可以使得分式 $\frac{x-1}{x-2}$ 有意义而忽略 $x \neq 3$ 这个

限制. 尤其当分式 $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-3)}$ 分子分母同除以 $x-3$, 变换

为分式 $\frac{x-1}{x-2}$ 而 $x=3$ 已經可以使分母不等于零而忽略 $x \neq 3$ 这

个限制. 要曉得分式 $\frac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-3)}$ 的分子分母同除以 $x-3$, 是

在 $x \neq 3$ 的限制下才能变换为 $\frac{x-1}{x-2}$ 的. 所以在講到分式的基本

性質时, 一定要強調所乘或所除的式子, 其值不能为零.

如果分子或分母是含有分数系数的整式, 我們可用分式的基本性質化为整数系数的分式.

$$\text{例一} \quad \frac{\frac{3}{7}x}{y} = \frac{\frac{3}{7}x \times 7}{7y} = \frac{3x}{7y}.$$

$$\text{例二} \quad \frac{\frac{4}{9}m}{\frac{3}{5}n} = \frac{\frac{4}{9}m \times 9 \times 5}{\frac{3}{5}n \times 9 \times 5} = \frac{20m}{27n}.$$

$$\begin{aligned} \text{例三} \quad \frac{2\frac{1}{8}(a+b)}{4\frac{1}{4}} &= \frac{\frac{17}{8}(a+b)}{\frac{17}{4}} = \frac{\frac{17}{8}(a+b) \times \frac{8}{17}}{\frac{17}{4} \times \frac{8}{17}} \\ &= \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

根据这个性質，我們知道分子、分母、分式的符号，可以任意

变更其中的两个，其值不变，即 $\frac{A}{B} = \frac{-A}{-B} = -\frac{A}{-B} = -\frac{-A}{B}$ 。

$$\text{例如} \quad \frac{a+b-c}{a-b+c} = \frac{c-a-b}{b-c-a} = -\frac{c-a-b}{a-b+c} = -\frac{a+b-c}{b-c-a}.$$

$$\text{又如} \quad \frac{(a-b)(c-d)}{(e-f)(g-h)} = \frac{(b-a)(c-d)}{(e-f)(h-g)} = -\frac{(b-a)(d-c)}{(f-e)(g-h)}.$$

二 約分与通分

一个分式的分子分母中若有公因式，我們用分子分母的最高公因式除分子分母，使变换成分子与分母互質的分式，这种变换的方法叫做約分。所得的分式叫做既約分式或最簡分式。

例如
$$\frac{16a^2b^2c}{16a^2b^2-8a^2bc} = \frac{16a^2b^2c}{8a^2b(2b-c)}.$$

由于分子分母的最高公因式是 $8a^2b$ ，按分式的基本性質分子分母同除以 $8a^2b$ ，則

$$\frac{16a^2b^2c}{16a^2b^2-8a^2bc} = \frac{16a^2b^2c}{8a^2b(2b-c)} = \frac{\frac{16a^2b^2c}{8a^2b}}{\frac{8a^2b(2b-c)}{8a^2b}} = \frac{2bc}{2b-c}.$$

在这个分式中，各文字的值必須受 $a \neq 0$ ， $b \neq 0$ ， $2b-c \neq 0$ 的限制。

讓我們在它的文字允許值中求分式 $\frac{16a^2b^2c}{16a^2b^2-8a^2bc}$ 的值。

設 $a=2$ ， $b=3$ ， $c=1$ 。它的值

$$\begin{aligned} &= \frac{16 \times 2^2 \times 3^2 \times 1}{16 \times 2^2 \times 3^2 - 8 \times 2^2 \times 3 \times 1} = \frac{576}{576-96} \\ &= \frac{576}{480} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}. \end{aligned}$$

如將 $a=2$ ， $b=3$ ， $c=1$ 代入变换后的既約分式中，它的值

$$= \frac{2 \times 3 \times 1}{2 \times 3 - 1} = \frac{6}{5} = 1\frac{1}{5}.$$

可見兩者所得的數值相等。很明顯地代入既約分式中求分數的數值，比較簡便得多。這也是約分的主要目的。明確了這個目的，是會引起學生學習積極性的。但令 $a=3$, $b=0$, $c=2$ ，求分式 $\frac{16a^2b^2c}{16a^2b^2-8a^2bc}$ 的數值；我們如果不加考慮，也代入變換後的

既約分式中，就得到 $\frac{2 \times 0 \times 2}{2 \times 0 - 2} = \frac{0}{-2} = 0$ ，從而認為原分式的數值也是零，那就錯了。因為在原分式中所代入的數值是要受 $b \neq 0$ 的限制的，所以我們應該說當 $a=3$, $b=0$, $c=2$ 時，原分式沒有意義，而不能說它的數值是“0”。

又如我們從等式 $y(x-2)=x^2-4$ 中求 y 的數值。很自然地 y 可以直接用除法得出來，即

$$y = \frac{x^2-4}{x-2} = x+2.$$

那末，無論 x 是什麼數值， y 都可以得到完全確定的數值。

例如 $x=0$, $y=2$; $x=1$, $y=3$; $x=-1$, $y=1$ 。

但如 $x=2$ ，我們就把 $2+2=4$ 當做 y 的數值，便不恰當了。

事實上当 $x=2$ 的時候，我們的等式形成

$$y(2-2)=2^2-4$$

即 $0 \times y = 0$ ，它不僅當 $y=4$ 時成立，而且 y 為任何數值時都成立。因此這個問題的正確答案應該是：

當 $x \neq 2$ 時， $y = x+2$ 。

當 $x=2$ 時， y 可以等於任意一個數。那就是說由 $\frac{x^2-4}{x-2}$ 變換為 $x+2$ 要受 $x \neq 2$ 的限制，當 $x=2$ 時，我們不能從 $y=x+2$ 求得 y 的數值。

我們曉得，約分運算首先要將分子分母分解因式，再消去它的最高公因式，或者逐步消去它的公因式。

$$3^2 - x^2 = (3-x)(3+x)$$

$$\begin{aligned}\text{例一} \quad & -\frac{9-x^2}{x^2-7x+12} = -\frac{(3-x)(3+x)}{(x-3)(x-4)} \\ & = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-4)} = \frac{x+3}{x-4}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{例二} \quad & \frac{x^4-3x^2y^2+2y^4}{x^4-y^4} = \frac{x^4-x^2y^2-2x^2y^2+2y^4}{x^4-y^4} \\ & = \frac{(x^4-x^2y^2)-(2x^2y^2-2y^4)}{x^4-y^4} \\ & = \frac{x^2(x^2-y^2)-2y^2(x^2-y^2)}{x^4-y^4} \\ & = \frac{(x^2-y^2)(x^2-2y^2)}{(x^2+y^2)(x^2-y^2)} = \frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

这个例子表示在約分运算中，因式分解步骤不一定要强調分到不能再分为止。当这个例子的分子分解成 $(x^2-y^2)(x^2-2y^2)$ 时，很明顯地分母中有因式 x^2-y^2 ，所以分子中的因式 x^2-y^2 不必要再分解为 $(x+y)(x-y)$ 。

$$\begin{aligned}\text{例三} \quad & \frac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)} \\ & = \frac{abx^2+aby^2+a^2xy+b^2xy}{abx^2-aby^2+a^2xy-b^2xy} \\ & = \frac{(abx^2+a^2xy)+(aby^2+b^2xy)}{(abx^2+a^2xy)-(aby^2+b^2xy)} \\ & = \frac{ax(bx+ay)+by(bx+ay)}{ax(bx+ay)-by(bx+ay)} \\ & = \frac{(bx+ay)(ax+by)}{(bx+ay)(ax-by)} = \frac{ax+by}{ax-by}.\end{aligned}$$

学生容易把这个例子錯誤地等于 $\frac{x^3+y^2+a^2+b^3}{x^2-y^2+a^2-b^2}$ 。

約分运算中常犯的錯誤尚有：

$$(i) \quad \frac{a^2-ab}{ab(a-b)} \text{ 錯等于 } \frac{a^2}{a-b};$$

$$(ii) \quad \frac{a^2-3}{b^2-3} \text{ 錯等于 } \frac{a^2}{b^2};$$

$$(iii) \quad \frac{a^2}{b^2} \text{ 錯等于 } \frac{a}{b};$$

$$(iv) \quad \frac{a^2}{a^2(a-b)} \text{ 錯等于 } 0;$$

$$(v) \quad \frac{a+b}{a^2+b^2} \text{ 錯等于 } \frac{1+1}{a+b} \text{ 即等于 } \frac{2}{a+b};$$

$$(vi) \quad \frac{x^2+y^2}{x^3+y^3} \text{ 錯等于 } x+y;$$

造成这些錯誤的原因都是由于对約分的基本概念不明确。如果教师在講約分的时候，結合分数的基本性質來講，使学生徹底了解約分的意义，这种錯誤就可以避免。

下面再举几个較难的例题，借此可以巩固因式分解，使得运算达到熟練的地步。

$$\begin{aligned} \text{例一} \quad & \frac{(x^6-y^6)(x-y)}{(x^3-y^3)(x^4-y^4)} = \frac{[(x^3)^2-(y^3)^2](x-y)}{(x^3-y^3)(x^4-y^4)} \\ &= \frac{(x^3+y^3)(x^3-y^3)(x-y)}{(x^3-y^3)(x^2+y^2)(x^2-y^2)} \\ &= \frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)(x-y)}{(x^2+y^2)(x+y)(x-y)} = \frac{x^2-xy+y^2}{x^2+y^2}. \end{aligned}$$

例二 化簡 $\frac{(x-2)(x+2)(x+5)(x+9)+180}{(x+1)(x+3)(x+4)(x+6)-280}$

〔解〕 分子 $= [(x-2)(x+9)][(x+2)(x+5)] + 180$
 $= [(x^2+7x)-18][(x^2+7x)+10] + 180$
 $= (x^2+7x)^2 - 8(x^2+7x)$
 $= (x^2+7x)(x^2+7x-8)$
 $= x(x+7)(x^2+7x-8)$

分母 $= [(x+1)(x+6)][(x+3)(x+4)] - 280$
 $= (x^2+7x+6)(x^2+7x+12) - 280$
 $= (x^2+7x)^2 + 18(x^2+7x) - 208$
 $= (x^2+7x-8)(x^2+7x+26)$

$\therefore \frac{(x-2)(x+2)(x+5)(x+9)+180}{(x+1)(x+3)(x+4)(x+6)-280}$
 $= \frac{x(x+7)(x^2+7x-8)}{(x^2+7x-8)(x^2+7x+26)} = \frac{x(x+7)}{x^2+7x+26}$

例三 化簡 $\frac{(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc}{(a+b)(a+c)}$

〔解〕 分子 $= [a+(b+c)][a(b+c)+bc] - abc$
 $= (b+c)a^2 + abc + (b+c)^2a + bc(b+c) - abc$
 $= (b+c)[a^2 + (b+c)a + bc]$
 $= (b+c)(a+b)(a+c)$

$\therefore \frac{(a+b+c)(bc+ca+ab)-abc}{(a+b)(a+c)} = \frac{(b+c)(a+b)(a+c)}{(a+b)(a+c)}$
 $= b+c$

例四 化簡 $\frac{(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)}{(xy+1)^2-(x+y)^2}$

〔解〕 分子 $= (xy-1)^2 + (x+y)^2 - 2xy(x+y)$

$$\begin{aligned}
& -2(x+y)+4xy \\
& =x^2y^2-2xy+1+x^2+2xy+y^2-2x^2y \\
& \quad -2xy^2-2x-2y+4xy \\
& =x^2(y^2-2y+1)+(y^2-2y+1)-2x(y^2-2y+1) \\
& =(y^2-2y+1)(x^2-2x+1) \\
& =(y-1)^2(x-1)^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{分母} & = (xy+1+x+y)(xy+1-x-y) \\
& = [x(y+1)+(y+1)][x(y-1)-(y-1)] \\
& = (y+1)(x+1)(y-1)(x-1).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \frac{(xy-1)^2+(x+y-2)(x+y-2xy)}{(xy+1)^2-(x+y)^2} \\
= \frac{(y-1)^2(x-1)^2}{(y+1)(x+1)(y-1)(x-1)} = \frac{(x-1)(y-1)}{(x+1)(y+1)}.
\end{aligned}$$

例五 化簡 $\frac{x^3-x^2-13x+4}{2x^4+7x^3+5x^2+11x-4}$

〔解〕 本例宜用輾轉相除法來求分子分母的最高公因式。

$$\begin{array}{r|l}
x-4 & \begin{array}{r} x^3-x^2-13x+4 \\ x^3+3x^2-x \\ \hline -4x^2-12x+4 \\ -4x^2-12x+4 \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{r} 2x^4+7x^3+5x^2+11x-4 \\ 2x^4-2x^3-26x^2+8x \\ \hline 9x^3+31x^2+3x-4 \\ 9x^3-9x^2-117x+36 \\ \hline 40x^2+120x-40 \\ 40x^2+120x-40 \\ \hline x^2+3x-1 \end{array} & 2x+9
\end{array}$$

得最高公因式 $= x^2+3x-1$.

又因 $\frac{x^3-x^2-13x+4}{x^2+3x-1} = x-4,$

$$\frac{2x^4+7x^3+5x^2+11x-4}{x^2+3x-1} = 2x^2+x+4,$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{x^3-x^2-13x+4}{2x^4+7x^3+5x^2+11x-4} &= \frac{(x^2+3x-1)(x-4)}{(x^2+3x-1)(2x^2+x+4)} \\ &= \frac{x-4}{2x^2+x+4}. \end{aligned}$$

例六 化簡 $\frac{x^5+5x^4+4x^3-x-1}{x^6+2x^5-7x^4+4x^3-x^2+2x-1}$.

〔解〕 如上例用輾轉相除法先求分子分母的最高公因式，

$$\begin{array}{r|l} x+1 & \begin{array}{r} x^5+5x^4+4x^3-x-1 \\ x^5+4x^4 \quad -x \\ \hline x^4+4x^3 \quad -1 \\ x^4+4x^3 \quad -1 \\ \hline 0 \end{array} \\ & \begin{array}{r} x^6+2x^5-7x^4+4x^3-x^2+2x-1 \\ x^6+5x^5+4x^4 \quad -x^2-x \\ \hline -3x^5-11x^4+4x^3+3x-1 \\ -3x^5-15x^4-12x^3+3x+3 \\ \hline 4x^4+16x^3-4 \\ x^4+4x^3 \quad -1 \end{array} \end{array}$$

得最高公因式 $= x^4+4x^3-1$.

$$\text{又因 } \frac{x^5+5x^4+4x^3-x-1}{x^4+4x^3-1} = x+1,$$

$$\frac{x^6+2x^5-7x^4+4x^3-x^2+2x-1}{x^4+4x^3-1} = x^2-2x+1.$$

$$\begin{aligned} \text{故 } \frac{x^5+5x^4+4x^3-x-1}{x^6+2x^5-7x^4+4x^3-x^2+2x-1} &= \frac{(x^4+4x^3-1)(x+1)}{(x^4+4x^3-1)(x^2-2x+1)} = \frac{x+1}{x^2-2x+1}. \end{aligned}$$

从上面我們看到約分后在計算分式数值时是很方便的。但不能認為一个分式化为最簡分式后，在計算上一定是最方便的。