研究生应用数学丛书

矩阵论及应用

刘 慧 袁文燕 姜冬青 编

化学工业出版社

研究生应用数学丛书

矩阵论及应用

刘慧　袁文燕　姜冬青　编

化学工业出版社

·北　京·

（京）新登字 039 号

图书在版编目（CIP）数据

矩阵论及应用/刘慧，袁文燕，姜冬青编．—北京：化学工业出版社，2003.7

（研究生应用数学丛书）

ISBN 7-5025-4638-3

Ⅰ．矩…　Ⅱ．①刘…②袁…③姜…　Ⅲ．矩阵-理论-研究生-教材　Ⅳ．O151.21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 058163 号

研究生应用数学丛书

矩阵论及应用

刘慧　袁文燕　姜冬青　编

责任编辑：任文斗

文字编辑：刘莉珺

责任校对：郑　捷

封面设计：蒋艳君

*

化学工业出版社出版发行

（北京市朝阳区惠新里 3 号　邮政编码 100029）

发行电话：（010）64982530

http://www.cip.com.cn

*

新华书店北京发行所经销

北京云浩印刷有限责任公司印刷

三河市延风装订厂装订

开本 787 毫米×960 毫米 1/16　印张 13¾　字数 241 千字

2003 年 9 月第 1 版　2003 年 9 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-4638-3/O・36

定　价：25.00 元

前　言

作为数学的一个分支，矩阵理论具有十分丰富的内容，它是学习数学与其他学科（例如数值分析、最优化理论、概率统计、运筹学、控制理论、力学、电学、信息科学、管理科学与工程）的基础，也是科学与工程计算的有力工具，特别是随着计算机的广泛应用，矩阵理论显得更为重要.

为了适应工科研究生学习与科研的需要，在编写本书时既对“线性代数”的一些必要的基本概念做了介绍，同时这本书也特别注意到了矩阵本身性质与计算方法的讲解.

在编写过程中针对读者感到困难的概念，辅助了大量的图形以帮助理解. 为了读者应用的需要，编者对书中大部分计算方法标注了用 MATLAB 编写的程序.

本书由刘慧做整体安排并编写了第 1、2、4 章，袁文燕编写了第 3、5、6 章，姜冬青完成了第 1、2、4 章的程序和部分图形.

本书得到北京化工大学“新世纪教学改革项目”及“研究生教育创新基金”的资助；在编写过程中研究生李小华、刘芳、于游洋和孙晓光参与了部分工作，编者在此表示感谢.

中国科学院数学与系统科学研究院王世坤研究员在百忙中审查了全书，特别表示感谢.

限于编者学识水平，书中难免存在不当之处，热忱欢迎读者指出批评指正.

编　者

2003 年 4 月于北京化工大学

内 容 提 要

本书系统地介绍了与工程技术密切相关的矩阵分析理论和应用，并且选择了一些实际例子来进一步帮助读者了解它的用途. 在一些可以使用计算机程序处理问题的地方，加入了利用 MATLAB 软件计算的过程，便于读者尽快地计算复杂问题. 本书还插入一些图形，帮助读者对概念的理解.

全书共分为 6 章，分别介绍了线性空间与线性变换、λ-矩阵与 Jordan 标准形、范数理论及其应用、矩阵分析与矩阵函数、矩阵分解和广义逆矩阵等内容.

本书适用于高等院校高年级学生和工科研究生使用，也可以作为有关专业教师和科研人员、工程技术人员的参考书.

目　　录

第 1 章

线性空间与线性变换

线性空间与线性变换是矩阵论中的两个极为重要的概念，$\mathbf{R}$（直线），$\mathbf{R}^2$（平面）和 $\mathbf{R}^n$（高维欧氏空间）等是线性空间中最常见的一些特例. 在这一章，将介绍线性空间与线性变换一般的概念、性质以及运算技巧. 同时，本章也会介绍它的一些简单、直接的应用.

1.1 线性空间

1.1.1 线性空间的定义

在这一节里，将研究与 $\mathbf{R}^2$，$\mathbf{R}^n$ 有相同算术性质的代数系统，这种系统叫做线性空间.

定义 1.1.1 设 $\boldsymbol{V}$ 是非空集合，$\boldsymbol{P}$ 是数域. 在 $\boldsymbol{V}$ 中定义了两种代数运算.

加法 就是给定了一个法则"+"，对于 $\boldsymbol{V}$ 中的任意两个元素 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，在 $\boldsymbol{V}$ 中都有惟一的元素 $\boldsymbol{\gamma}$ 与它们对应称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 的和，记为

$$\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$$

加法运算满足以下四条规则：

(1) $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$；

(2) $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$；

(3) $\boldsymbol{V}$ 中存在一个元素"$\mathbf{0}$"满足 $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$，其中 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$，称"$\mathbf{0}$"是 $\boldsymbol{V}$ 的零元素；

(4) 对任一 $\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$，存在 $-\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}$，使得 $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$，称 $-\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}$ 的负元素.

数乘 就是给定了一个法则，对 $\boldsymbol{V}$ 中任一元素 $\boldsymbol{\alpha}$ 和数域 $\boldsymbol{P}$ 中任一数 k，在 $\boldsymbol{V}$ 中都有惟一的元素 $\boldsymbol{\delta}$ 与它们对应称为 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 k 的数乘，记为 $\boldsymbol{\delta}=k\boldsymbol{\alpha}$.

数乘满足以下两条规则：

(5) $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$；

(6) $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.

数乘和加法运算满足以下两条相容性规则：

(7) $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$；

(8) $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.

对加法、数乘两种运算满足(1)～(8)条规则的非空集合 V，称为定义在数域 P 上的线性（向量）空间，V 中的元素称为向量.

例 1.1.1 线性代数中学过的几何空间的全部向量 $\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 组成的集合，对于通常向量加法与数乘形成的线性空间，一般记为 $\boldsymbol{P}^n$. 当 $\boldsymbol{P}$ 是复数域时，$\boldsymbol{V}$ 称为复线性（向量）空间，记为 $\mathbf{C}^n$；当 $\boldsymbol{P}$ 是实数域时，$\boldsymbol{V}$ 称为实线性（向量）空间，记为 $\mathbf{R}^n$. 它们的加法和数乘可以表示为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{pmatrix}\qquad k\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}kx_1\\kx_2\\\vdots\\kx_n\end{pmatrix}$$

由图形可以看到，当 $\boldsymbol{n}=2$ 时，$\mathbf{R}^2$ 是一个平面上向量组成的集合，对任意向量 $\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2$，$\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^2$ 和实数 $k\in\mathbf{R}$，有 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^2$，$k\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^2$.

在图 1.1.1 中，可以看到线性空间 $\mathbf{R}^2$ 中向量的加法和数乘的表示 .

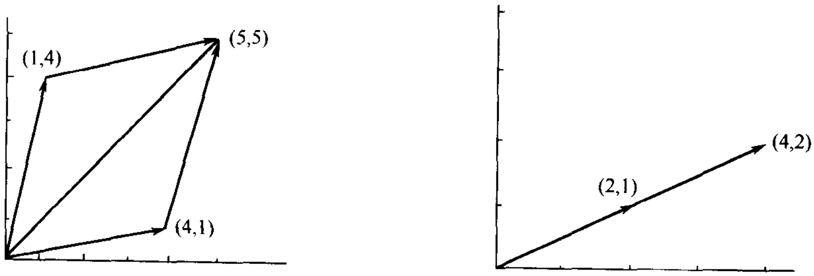

图 1.1.1

例 1.1.2 矩阵空间

$\mathbf{V}=\mathbf{R}^{m\times n}=\{\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}=(a_{ij})\quad a_{ij}\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)\}$

容易验证：$\mathbf{V}$ 对通常定义下矩阵加法和数乘运算构成实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间. 当 $n=1$ 时，$\mathbf{V}$ 就是例 1.1.1 中的线性空间.

例 1.1.3 多项式空间

次数$\leqslant n-1$ 的实系数多项式集合

$$\mathbf{P}_n[t]=\{p(t)\mid p(t)=\sum_{i=0}^{n-1}a_it^i\quad a_i\in\mathbf{R},\ t\in(-\infty,+\infty)\}$$

$\mathbf{P}_n[t]$对于通常定义下多项式的加法和数乘构成线性空间.

例 1.1.4　函数空间

定义在区间 $[a,b]$ 上的一切实函数集合

$$\mathbf{C}[a,b]=\{f(t)\mid f(t),t\in[a,\ b]\}$$

$\mathbf{C}[a,b]$ 对通常定义下函数的加法与数乘运算构成域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间.

例 1.1.5　n 阶线性齐次微分方程

$$L(y)=y^{(n)}(x)+a_{n-1}y^{(n-1)}(x)+\cdots+a_0y=0$$

的解的全体 $S=\{y(x)\mid L(y)=0\}$，对普通函数加法、数乘运算构成域 $\boldsymbol{P}$ 上的线性空间.

定理 1.1.1　线性空间 $\mathbf{V}$ 中有惟一的零向量，$\mathbf{V}$ 中任一向量也有惟一的负向量.

证明　(1) 证明零向量惟一性

设 $\mathbf{0}$，$\mathbf{0}^*$ 是 $\mathbf{V}$ 中的两个向量，考虑 $\mathbf{0}+\mathbf{0}^*$，由于 $\mathbf{0}$ 是零向量，由定义 $\mathbf{0}+\mathbf{0}^*=\mathbf{0}^*$，同理 $\mathbf{0}^*+\mathbf{0}=\mathbf{0}$，因为 $\mathbf{0}+\mathbf{0}^*=\mathbf{0}^*+\mathbf{0}$，所以 $\mathbf{0}=\mathbf{0}^*$.

(2) 负向量惟一性证明留给读者.　▌

1.1.2　基、坐标

在 $\mathbf{R}^n$ 中，曾定义过向量的相关性；在 $\mathbf{V}$ 中，同样也引进向量组线性相关的概念.

定义 1.1.2　设 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\ \boldsymbol{\alpha}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 是数域 $\boldsymbol{P}$ 上线性空间 $\mathbf{V}$ 中的非空子集合，方程

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_m\boldsymbol{\alpha}_m=\mathbf{0} \tag{1.1.1}$$

如果仅有平凡解 $k_1=k_2=\cdots=k_m=0$，称 S 是线性无关的；如果方程有非平凡解，则称 S 是线性相关的，向量组的线性相关性与数域 $\boldsymbol{P}$ 的选择有关.

对仅有一个向量的集合 $S=\{\boldsymbol{\alpha}\}$，$\boldsymbol{\alpha}\in\mathbf{V}$，令 $k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，如果 $\boldsymbol{\alpha}\neq\mathbf{0}$，只有 $k=0$，所以 $S=\{\boldsymbol{\alpha}\}$是线性无关的；如果 $\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$，$k\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 有非平凡解，所以 $S=\{\boldsymbol{\alpha}\}$线性相关.

例 1.1.6　考虑 $\mathbf{R}^{2\times2}$中向量的集合 $S=\{\boldsymbol{A}_1,\ \boldsymbol{A}_2,\ \boldsymbol{A}_3\}$

$$\boldsymbol{A}_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_2=\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}_3=\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}$$

的线性相关性.

解　设 $k_1\mathbf{A}_1+k_2\mathbf{A}_2+k_3\mathbf{A}_3=\mathbf{0}$，即

$$k_1\begin{pmatrix}1&1\\0&4\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0&3\\0&0\end{pmatrix}+k_3\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

得到方程组

$$\begin{cases} k_1 \quad\quad + k_3 = 0 \\ k_1 + 3k_2 \quad\quad = 0 \\ \quad\quad 2k_3 = 0 \\ 4k_1 \quad\quad = 0 \end{cases}$$

将上方程组写成矩阵形式 $\boldsymbol{AK}=\boldsymbol{0}$ (1.1.2)

其中 $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

因为 $\dim R(\boldsymbol{A})=3$，因此方程（1.1.2）只有平凡解 $k_1=k_2=k_3=0$，S 是线性无关的向量组.

例 1.1.7 考虑 $\mathbf{P}_3[t]$中的向量集合 $S=\{p_1, p_2, p_3\}$

$$p_1(t)=1+t, \qquad p_2(t)=2-t+3t^2, \qquad p_3(t)=2t-2t^2$$

的线性关系.

解 设 $k_1p_1(t)+k_2p_2(t)+k_3p_3(t)=0$

即 $$k_1(1+t)+k_2(2-t+3t^2)+k_3(2t-2t^2)=0$$

得到方程组 $$\boldsymbol{Ak}=\boldsymbol{0} \tag{1.1.3}$$

其中 $$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{k}=\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

$$\dim R(\boldsymbol{A})=2<3$$

方程（1.1.3）有非平凡解，S 是线性相关向量组.

用 MATLAB 求解方程组（1.1.3）.

```
%求解 AK=0
A=[1 2 0; 1 -1 2; 0 3 -2];
solve=null(A)
%**************结果************
solve=
[-0.7428  0.3714  0.5571]'
```

因为 $\boldsymbol{k}=(k_1, k_2, k_3)^{\mathrm{T}}=(-0.7428, 0.3714, 0.5571)^{\mathrm{T}}\neq 0$

所以向量 $\boldsymbol{p}_1$，$\boldsymbol{p}_2$，$\boldsymbol{p}_3$ 线性相关.

定义 1.1.3 设在数域 $\boldsymbol{P}$ 上的线性空间 $\mathbf{V}$ 中有非空子集

$$S=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$$

满足以下条件：

（1）S 是线性无关向量组；

（2）$\boldsymbol{V}$ 中任一向量都是 S 中向量的线性组合.

称 S 是 $\boldsymbol{V}$ 的一个基（底），$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 称为 $\boldsymbol{V}$ 的基向量，S 中向量的个数 n，称为线性空间 $\boldsymbol{V}$ 的维数，记为 $\dim\boldsymbol{V}=n$.

维数是 n 的线性空间 $\boldsymbol{V}$ 称为 n 维线性空间，记为 $\boldsymbol{V}_n$. 假如 $\boldsymbol{V}$ 中存在任意多个线性无关的向量时，称 $\boldsymbol{V}$ 为无限维线性空间.

如果没有特别说明，书中所涉及的线性空间均为有限维线性空间.

如果 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\boldsymbol{V}_n$ 的一个基，那么 $\boldsymbol{V}_n$ 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 可以表示成 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$，…，$\boldsymbol{\alpha}_n$ 的线性组合.

定义 1.1.3 描述的基在线性空间 $\boldsymbol{V}_n$ 中不是惟一的，例如在 $\mathbf{R}^3$ 中，$S_1=\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$，其中

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\tag{1.1.4}$$

和 $S_2=\{\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'\}$，其中

$$\boldsymbol{e}_1'=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{e}_2'=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{e}_3'=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\tag{1.1.5}$$

显然是 $\mathbf{R}^3$ 的两个基，这是因为

$$\det\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\neq 0\qquad \det\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\neq 0$$

所以 S_1，S_2 是两个线性无关向量组.

任给 $\mathbf{R}^3$ 中的一个向量 $\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_2+x_3\boldsymbol{e}_3$，在 S_1，S_2 下可以分别表示为

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix},\qquad \boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3')\begin{pmatrix}x_1-x_2\\x_2-x_3\\x_3\end{pmatrix}$$

定义 1.1.4　设 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}_n$ 的一个基（底），$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{V}_n$ 中的一个向量，而且

$$\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\qquad x_i\in\boldsymbol{P}\tag{1.1.6}$$

称 $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 是向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 在基 S 下的坐标，且 $\boldsymbol{x}\in\boldsymbol{P}^n$.

定理 1.1.2　在 n 维线性空间 $\boldsymbol{V}_n$ 中，任一向量在一个基下的坐标惟一.

证明 设 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是线性空间 $\boldsymbol{V}_n$ 的一个基，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{V}_n$ 中任一向量，在 S 下有两个坐标，即假设

$$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n \tag{1.1.7}$$

$$\boldsymbol{\alpha}=y_1\boldsymbol{\alpha}_1+y_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+y_n\boldsymbol{\alpha}_n \tag{1.1.8}$$

这样就有 $(x_1-y_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(x_2-y_2)\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+(x_n-y_n)\boldsymbol{\alpha}_n=\mathbf{0}$

由于 S 是线性无关的，所以

$$x_i=y_i \qquad i=1, 2, \cdots, n \quad \blacksquare$$

这说明，当线性空间 $\boldsymbol{V}_n$ 的基 S 取定后，$\boldsymbol{V}_n$ 中任一个向量的坐标是确定的，即假设 $S=\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$ 是 $\boldsymbol{V}_n$ 的一个基，$\boldsymbol{\alpha}=x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+x_n\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{V}_n$ 中的一个向量，就有 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{x}$ 之间的一一对应，因此当基确定以后，常常用坐标来代替向量，记 $\boldsymbol{\alpha}=(x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$.

定理 1.1.2 提示我们，当 $\boldsymbol{V}_n$ 中基（底）确定之后，在进行其中向量之间算术运算时，可以考虑对应的线性空间 $\boldsymbol{P}^n$ 中的算术运算就可以了.

定义 1.1.5 设 $\boldsymbol{V}_n$ 与 $\boldsymbol{V}_n^*$ 同为域 $\boldsymbol{P}$ 上的两个线性空间，若 $\boldsymbol{V}_n$ 与 $\boldsymbol{V}_n^*$ 的元素之间可以建立一一对应关系，即 $\boldsymbol{\alpha}\longleftrightarrow\boldsymbol{\alpha}^*$，$\boldsymbol{\alpha}\in\boldsymbol{V}_n$，$\boldsymbol{\alpha}^*\in\boldsymbol{V}_n^*$，且当 $\boldsymbol{\alpha}\longleftrightarrow\boldsymbol{\alpha}^*$，$\boldsymbol{\beta}\longleftrightarrow\boldsymbol{\beta}^*$，$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\in\boldsymbol{V}_n$，$\boldsymbol{\alpha}^*, \boldsymbol{\beta}^*\in\boldsymbol{V}_n^*$ 时，有

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\longleftrightarrow\boldsymbol{\alpha}^*+\boldsymbol{\beta}^*$$

$$k\boldsymbol{\alpha}\longleftrightarrow k\boldsymbol{\alpha}^*$$

称在数域 $\boldsymbol{P}$ 上的线性空间 $\boldsymbol{V}_n$ 与 $\boldsymbol{V}_n^*$ 是同构的，并且称这种对应关系是 $\boldsymbol{V}_n$ 与 $\boldsymbol{V}_n^*$ 的同构对应.

显然，数域 $\boldsymbol{P}$ 上的任何 n 维向量空间与 $\boldsymbol{P}^n$ 同构.

在了解了线性空间的基、坐标之后，观察常见到的几个线性空间以及它们的基.

例 1.1.8

(1) 在 $\mathbf{R}^n$ 中，$S=\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$，$(1\leqslant j\leqslant n)$，$\boldsymbol{e}_j$ 是第 j 个分量是 1，其余都是 0 的 n 元向量，是 $\mathbf{R}^n$ 的一个基. 当 $n=1, 2, 3$ 时的情况在图 1.1.2 中显示 .

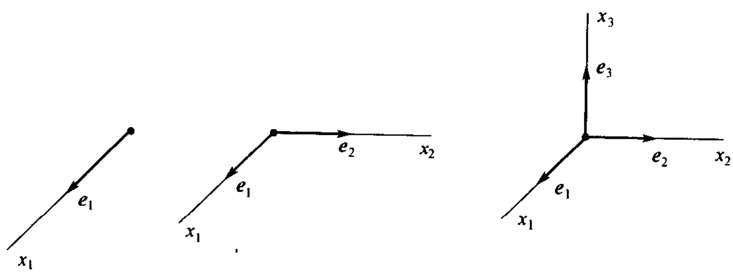

图 1.1.2

(2) $\mathbf{R}^{m\times n}$，$S=\{\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\cdots,\boldsymbol{E}_{mn}\}$，$\boldsymbol{E}_{ij}$ $(1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant j\leqslant n)$ 是第 i 行第 j 列是 1 其余元素都是 0 的矩阵，是 $\boldsymbol{R}^{m\times n}$的一个基.

(3) 在 $\mathbf{P}_n[t]$中，$S=\{1,\ t,\ \cdots,\ t^{n-1}\}$ 是 $\mathbf{P}_n[t]$ 的一个基.

例 1.1.9　验证 $S^*=\{1,\ t-a,\ \cdots,\ (t-a)^{n-1}\}$ 是多项式线性空间 $\mathbf{P}_n[t]$ 的一个基，并且把多项式 $p(t)=a_0+a_1t+\cdots+a_{n-1}t^{n-1}$表示成 S^* 的线性组合.

解　列方程

$$k_0 1+k_1(t-a)+\cdots+k_{n-1}(t-a)^{n-1}=0$$

整理可以得到方程组

$$\begin{cases} k_0-a_1k_1+a^2k_2+\cdots+(-1)^{n-1}a^{n-1}k_{n-1}=0 \\ \qquad k_1-2ak_2+\cdots+(-1)^{n-2}C_{n-1}^1k_{n-1}=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad k_{n-1}=0 \end{cases}$$

方程组只有平凡解，所以 S^* 线性无关.

将多项式 $p(t)$ 在 $t=a$ 处进行 Taylor 展开，计算到 $n-1$ 阶项.

$$p(t)=p(a)+p'(a)(t-a)+\cdots+\frac{p^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(t-a)^{n-1}$$

可以得到 $p(t)$ 在基 S^* 下的坐标

$$\boldsymbol{x}^*=\left(p(a),p'(a),\cdots,\frac{p^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\right)^{\mathrm{T}}$$

容易得到下列线性空间的维数是

$$\dim\mathbf{R}^n=n;\ \dim\mathbf{R}^{m\times n}=mn;\ \dim\mathbf{P}_{n-1}[t]=n$$

用 MATLAB 求 $p(t)$ 在基 S^* 下的坐标，其中取 $n=10$.

```
%多项式的泰勒展开
%并且把多项式表示成 S* 的线性组合.
syms a0 a1 a2 a3 a4 a5 a6 a7 a8 a9 a10 x
pt=[a10  a9  a8  a7  a6  a5  a4  a3  a2  a1  a0]
pt=poly2sym(pt,'t')
poly_taylor=taylor(pt,x)
%*************运行结果*************
pt=[a10, a9, a8, a7, a6, a5, a4, a3, a2, a1, a0]
pt=a10*t^10+t^9*a9+t^8*a8+t^7*a7+t^6*a6+t^5*a5+t^4*a4+
    t^3*a3+t^2*a2+t*a1+a0
poly_taylor=
```

```
a10*x^10+x^4*a4+a0+x^9*a9+x^7*a7+x^5*a5+x^3*a3+x^6*a6+x*
a1+x^2*a2+x^8*a8+(8*x^7*a8+6*x^5*a6+4*x^3*a4+9*x^8*a9+
2*x*a2+10*a10*x^9+7*x^6*a7+5*x^4*a5+3*x^2*a3+a1)*
(t-x)+(15*x^4*a6+a2+6*x^2*a4+36*x^7*a9+10*x^3*a5+45*a10
*x^8+21*x^5*a7+28*x^6*a8+3*x*a3)*(t-x)^2+(20*x^3*a6+4*x
*a4+120*a10*x^7+10*x^2*a5+56*x^5*a8+35*x^4*a7+84*
x^6*a9+a3)*(t-x)^3+(15*x^2*a6+210*a10*x^6+70*x^4*a8+a4+
126*x^5*a9+5*x*a5+35*x^3*a7)*(t-x)^4+(6*x*a6+56*x^3*a8+
252*a10*x^5+a5+126*x^4*a9+21*x^2*a7)*(t-x)^5
```

1.1.3 基变换与坐标变换

在例 1.1.9 中已经看到，在线性空间 $\mathbf{P}_n[t]$ 中，选择了两个基 S，S^*，$p(t)$在 S 与 S^* 下的坐标不同. 这说明在一个线性空间 $\mathbf{V}_n$ 中，基的选择不是惟一的，同样在不同基下，同一个向量的坐标不同. 下面就一般情况研究两个基之间的关系和一个向量在不同基下坐标之间的关系.

（1）基变换

$S=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}$和 $S^*=\{\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$ 是线性空间 $\mathbf{V}_n$ 的两个基，由于 $\boldsymbol{\beta}_j$（$1\leqslant j\leqslant n$）也是 $\mathbf{V}_n$ 中的向量，所以可以用 S 的线性组合表示. 设

$$\begin{cases}\boldsymbol{\beta}_1=p_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+p_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \boldsymbol{\beta}_2=p_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+p_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \boldsymbol{\beta}_n=p_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+p_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+p_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n\end{cases}\tag{1.1.9}$$

上式用矩阵形式可以写成

$$(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n)=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\boldsymbol{P}\tag{1.1.10}$$

$$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}P_{11}&P_{12}&\cdots&P_{1n}\\P_{21}&P_{22}&\cdots&P_{2n}\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots\\P_{n1}&P_{n2}&\cdots&P_{nn}\end{pmatrix}$$

式（1.1.9）称为 $\mathbf{V}_n$ 中两个基的变换公式. 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 称为从 S 到 S^* 的过渡矩阵. 由于 S 和 S^* 都是线性无关向量组，所以 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵即 $\det\boldsymbol{P}\neq0$，过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$ 的第 j 列是 $\boldsymbol{\beta}_j$（$1\leqslant j\leqslant n$）在 S 下的坐标向量.

例 1.1.10 求例 1.1.9 中，线性空间 $\mathbf{P}_{n-1}[t]$中的基 S 到 S^* 的过渡矩阵.