

地基基础技术资料选编

华东地区建筑标准设计协作组办公室

1 9 7 9

地基基础技术资料选编

内容选自华东地区建筑标准设计协作组
勘察地基专业组成立大会交流资料。福建省
工业民用建筑设计院、同济大学结构所地基
基础研究室、上海市基础工程公司、上海工
业建筑设计院派同志参加编辑。

华东地区建筑标准设计协作组勘察地基专业组编

地基基础技术资料选编

*
华东地区建筑标准设计协作组 办公室
出版发行
上海汉口路一五一号

*
浦江印刷厂 印刷
浙江省 浦江县

*
一九七九年十二月出版

2.00
元

目 录

八面体应力浅说

同济大学结构所地基研究室 俞调梅 胡中雄..... (1)

软土地基的设计与施工(要点)

福建省工业民用建筑设计院 陈皓彬..... (29)

贮罐软土地基的稳定性和变形

浙江大学土木系土工学教研室 曾国熙 潘秋元..... (42)

上海华盛路高层住宅箱形基础测试研究报告

同济大学地基基础研究室 赵锡宏 上海市民用建筑设计院 方世敏 (63)

不埋板式基础

江苏省建筑设计院 葛颂华..... (88)

福建省桩基介绍

福建省第六建筑工程公司 林礼敦..... (102)

上海地区桩基设计情况介绍(提纲)

上海工业建筑设计院 许惟阳..... (114)

单桩动力抗压刚度

电力工业部华东电力设计院 童翊湘..... (128)

四万吨粮仓的沉降

上海工业建筑设计院 杨僧来..... (137)

硫磺胶泥浆锚法接桩新工艺

上海市基础工程公司 张华麟..... (146)

钻孔灌注桩混凝土取芯钻进技术总结

安徽省交通局公路勘测设计队 李永铎..... (155)

住宅地基穿孔纠倾

浙江省工业设计院 庄 皓..... (160)

易淤软土地基爆扩桩施工做法

浙江省建筑科学研究所 封光炳..... (170)

地下连续墙新工艺

上海市基础工程公司地下连续墙小组..... (185)

※※※※※※※※※※
※ 资料摘录 ※
※※※※※※※※※※

对静力压桩的几点看法..... (205)

潜水工程电钻钻孔灌注桩试桩资料..... (207)

八 面 体 应 力 浅 说

(八面体应力在土力学中的应用)

同济大学结构所地基研究室 俞调梅 胡中雄

按照八面体应力的概念来分析材料的应力与应变关系及强度条件,这可以较好地反映空间应力作用下的规律性。近年来在土力学研究中,有不少问题是通过八面体应力与应变来阐述的。下面介绍:一、基本知识,二、试验资料的整理和分析,三、八面体应力的不变量等三个问题。我们主观上希望能写成便于自学的参考资料;但因限于水平,难免有不够清楚或过于烦琐,以及错误之处,请读者批评指教。

一、八面体应力的基本知识

(一) 八面体及八面体应力的意义

考虑图 1(a)所示边长等于 2 的立方体;坐标原点 o 在立方体的中心点; x, y 及 z 轴与立方体的边平行,它们通过立方体的六个面的中心点(即 a, b, c, d, e, f 点);主应力 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ 分别与 x, y 及 z 轴平行。

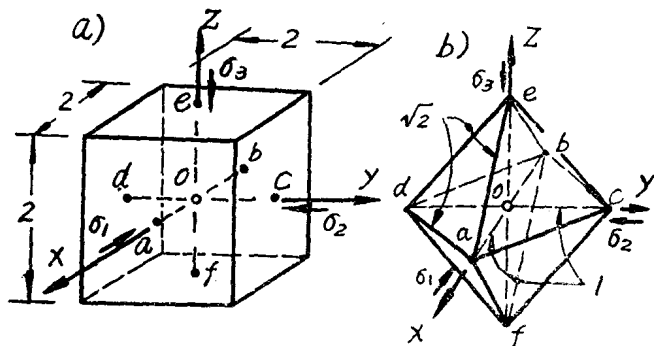


图 1 (a)立方体及主应力($\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$) (b)八面体

把图 1(a)所示立方体六个面的中心点(即 a, b, c, d, e, f 点)连结起来,就成为八面体,如图 1(b)所示。图中表示:从原点 o 到八面体的任意顶点的距离都等于 1 ($oa = ob = \dots = 1$);八面体的每条边的长度都等于 $\sqrt{2}$ ($ac = ae = \dots = \sqrt{2}$)。

八面体应力,就是八面体的任意一个面(后面,将把它称为等倾斜面)上的八面体法向应力(σ_o)及八面体剪应力(τ_o);还有相应的八面体法向应变(ϵ_o)及八面体剪应变(γ_o)。八面体应力(σ_o, τ_o)与应变(ϵ_o, γ_o)分别是三个主应力($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)的函数和三个主应变($\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$)的函数,能够综合地反映空间应力状态。

把八面体应力的概念应用于土工试验资料时,可以从 $\sigma_o \sim \epsilon_o$ 关系, $\tau_o \sim \gamma_o$ 关系来探讨应力~应变关系;可以从 $\tau_o \sim \sigma_o$ 关系来探讨强度规律。这与通常的土的强度理论中,以及三轴试验的曲线中不考虑中主应力(σ_2)的影响比较,是有所改进了。

(二) 八面体应力与应变的计算公式

前面说明了,八面体应力与应变,就是八面体的任意一个面(等倾斜面)上的八面体法向应力 σ_o 与应变 ϵ_o ,以及八面体剪应力 τ_o 与应变 γ_o 。为此,考虑图 1(b)

所示八面体的八分之一，即图2的四面体 $oace$ 。

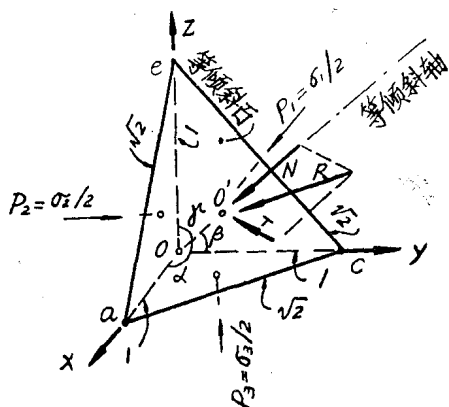


图2 八面体应力

不难证明，图2的倾面 ace 的法线 oo' 的方向余弦为：

$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

因此，可以把法线 oo' 称为等倾斜轴，把倾斜面 ace 称为等倾斜面。

图2的三个二等边直角三角形的边长都等于1，面积为：

$$\triangle oce = \triangle oea = \triangle oac = \frac{1}{2}$$

等倾斜面的等边三角形 ace 的边长等于 $\sqrt{2}$ ，面积为：

$$\triangle ace = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

因此，作用在三个二等边直角三角形 (oce , oea , oac) 上的力分别为三个主应力 (σ_1 , σ_2 , σ_3) 与面积 ($= \frac{1}{2}$) 相乘之积，即：

$$P_1 = \sigma_1/2, P_2 = \sigma_2/2, P_3 = \sigma_3/2;$$

这三个力在等倾斜轴 oo' 上的分力之和为：

$$N = P_1 \cos \alpha + P_2 \cos \beta + P_3 \cos \gamma,$$

而八面体法向应力为：

$$\sigma_o = \frac{N}{\text{面积} ace}$$

由此即可得八面体法向应力的公式：

$$\sigma_o = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad \dots\dots\dots (1)$$

也可以得相应的八面体法向应变的公式 (推导过程见后)：

$$\epsilon_o = \frac{1}{3} (\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) \quad \dots\dots\dots (2)$$

式中： ϵ_1 , ϵ_2 , ϵ_3 ——三个主应变，即三个主应力 (σ_1 , σ_2 , σ_3) 方向的应变：

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] \\ \epsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] \\ \epsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2A)$$

式中： E , μ ——分别为弹性模量及泊松比。

为了说明八面体剪应力 τ_o 的意义，考虑作用在等倾斜面内的等边三角形 ace 上的合力 R 为 P_1 、 P_2 及 P_3 的合力，即：

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}$$

R 也是作用在三角形 ace 上的法向力 N 与剪切力 T 的合力，即：

$$T = \sqrt{R^2 - N^2}$$

而八面体剪应力为：

$$\tau_o = T / \text{面积} ace$$

由此可得八面体剪应力的公式：

$$\tau_o = \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{3} \quad \dots\dots\dots (3)$$

或

$$\tau_o = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_1^2 + \tau_2^2 + \tau_3^2} \quad \dots\dots\dots (3A)$$

式中：

$$\left. \begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_2) \\ \tau_2 &= \frac{1}{2} (\sigma_2 - \sigma_3) \\ \tau_3 &= \frac{1}{2} (\sigma_3 - \sigma_1) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (3B)$$

称为主剪应力。主剪应力的意义将在后面的第(四)节及图4中说明。

相应的八面体剪应变的式是：

$$\gamma_o = \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} \quad (4)$$

式中： $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ ——见公式(2A)。

以上公式的推导，详见下面的第(三)及(五)节。以上公式没有考虑到 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ 不是主应力的情况(即当 $\tau_{xy} \neq 0, \tau_{yz} \neq 0, \tau_{zx} \neq 0$ 时)；关于这种情况，将在第三部分“关于八面体应力的不变量”讨论。

附带指出，在有些参考资料中，把八面体法向应力及应变(σ_o, ϵ_o)称为“平均(法向)应力”与“平均(法向)应变”，把八面体剪应力及应变(τ_o, γ_o)称为“平均剪应力”与“平均剪应变”。我们认为还是用“八面体”这一术语比较明确一些。

(三) 八面体应力的公式的推导

对于图3(a)的四面体 $oace$ ，也就是八面体的八分之一，首先考虑只有 σ_1 作用着($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)的情况。作用在三角形 oce 上的力($P_1 = \sigma_1/2$)与作用在等倾斜面 ace 上合力 R_1 平衡，即：

$$R_1 = P_1$$

R_1 可分解为法向力 N_1 及剪切力 T_1 ；作出剖面 $oao'o''$ ，如图3(b)所示，由此求得：

$$N_1 = P_1 \cdot \cos \alpha = (\sigma_1/2) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sigma_1}{2\sqrt{3}}$$

$$T_1 = P_1 \cdot \sin \alpha = (\sigma_1/2) \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sigma_1}{\sqrt{6}}$$

N_1 及 T_1 分别为等倾斜面 ace 内，由于主应力 σ_1 而形成的法向力及剪切力。注意，剪切力 T_1 通过 a 点及 o' 点，示于图3(c)。

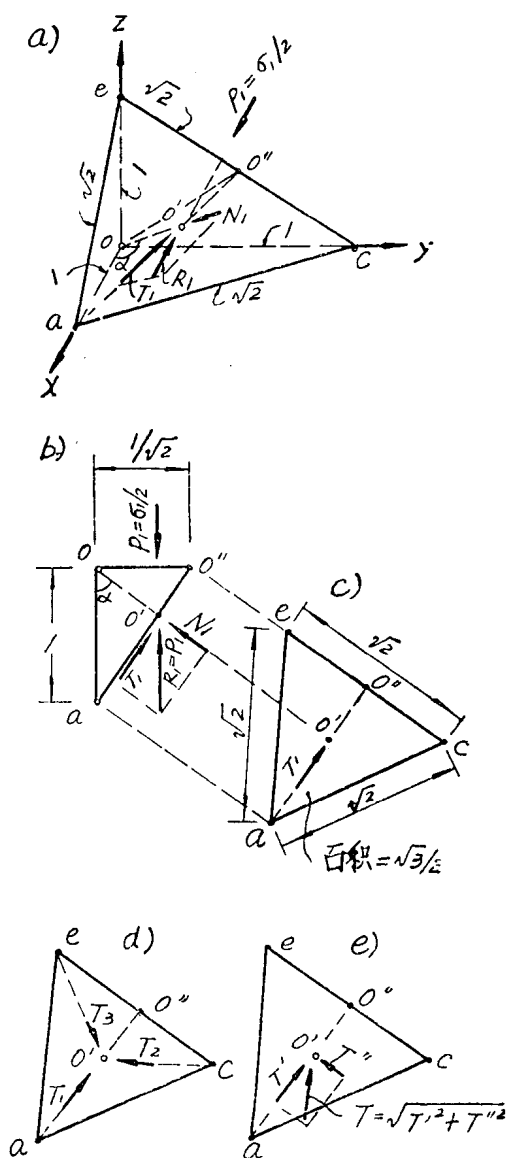


图3 八面体应力公式的推导

(a)八面体的八分之一 (b)剖面 $oao'o''$
(c)、(d)、(e)作用在 $\triangle ace$ 上的剪力

同样可以求得由于主应力 σ_2 而形成的法向力及剪切力分别为：

$$N_2 = \frac{\sigma_2}{2\sqrt{3}}, \quad T_2 = \frac{\sigma_2}{\sqrt{6}}$$

由于主应力 σ_3 而形成法向力及剪切力分别为：

$$N_3 = \frac{\sigma_3}{2\sqrt{3}}, \quad T_3 = \frac{\sigma_3}{\sqrt{6}}$$

T_1, T_2 , 及 T_3 分别通过三角形的三个顶点 (a, c, e), 它们互成 120° 角; 这示于图 3 (d)。为了求得这三个剪切力合力, 首先求得它们在 T_1 方向的分力之和, 即:

$$\begin{aligned} T' &= T_1 - (T_2 + T_3) \sin 30^\circ = \frac{\sigma_1}{\sqrt{6}} - \left(\frac{\sigma_2}{\sqrt{6}} + \frac{\sigma_3}{\sqrt{6}} \right) \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{6}} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right] \end{aligned}$$

以及它们在与 T_1 成直角的方向的分力之和, 即:

$$T'' = (T_2 - T_3) \cdot \cos 30^\circ = \left(\frac{\sigma_2}{\sqrt{6}} - \frac{\sigma_3}{\sqrt{6}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\sigma_2 - \sigma_3);$$

由此得

$$\begin{aligned} T &= \sqrt{(T')^2 + (T'')^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{6} \left[\sigma_1 - \frac{1}{2} (\sigma_2 + \sigma_3) \right]^2 + \frac{1}{8} (\sigma_2 - \sigma_3)^2} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{2\sigma_1^2 + 2\sigma_2^2 + 2\sigma_3^2 - 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_2\sigma_3 - 2\sigma_3\sigma_1} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \end{aligned}$$

因此, 八面体法向应力为:

$$\begin{aligned} \sigma_o &= \frac{1}{\text{面积}_{ace}} \cdot N \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}/2} \cdot (N_1 + N_2 + N_3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}/2} \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{3}} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \right] \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \dots\dots\dots (1) \end{aligned}$$

即求证公式 (1)。

八面体剪应力的公式为:

$$\begin{aligned} \tau_o &= \frac{1}{\text{面积}_{ace}} \cdot T \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}/2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

即求证的公式 (3)。

(四) 关于主剪应力的说明

前面说明了, 八面体剪应力的公式 (3) 也可以通过主剪应力 (τ_1, τ_2, τ_3) 来表达, 见公式 (3A) 及 (3B)。为了更好地理解主剪应力及主剪应力平面, 下面在图 4 中作简单的说明。

图 4 (a) 表示边长等于 2 的立方体, 以及与立方体的边平行的主应力 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) 及坐标轴 (x, y, z), 这与前面的图 1 (a) 相同。

图 4 (b1) 表示主剪应力 $\tau_1 = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$ 的作用平面。作四个平面与 oz 轴平行, 与 xoy 平面及 $yo z$ 平面成 45° 角, 并且通过立方

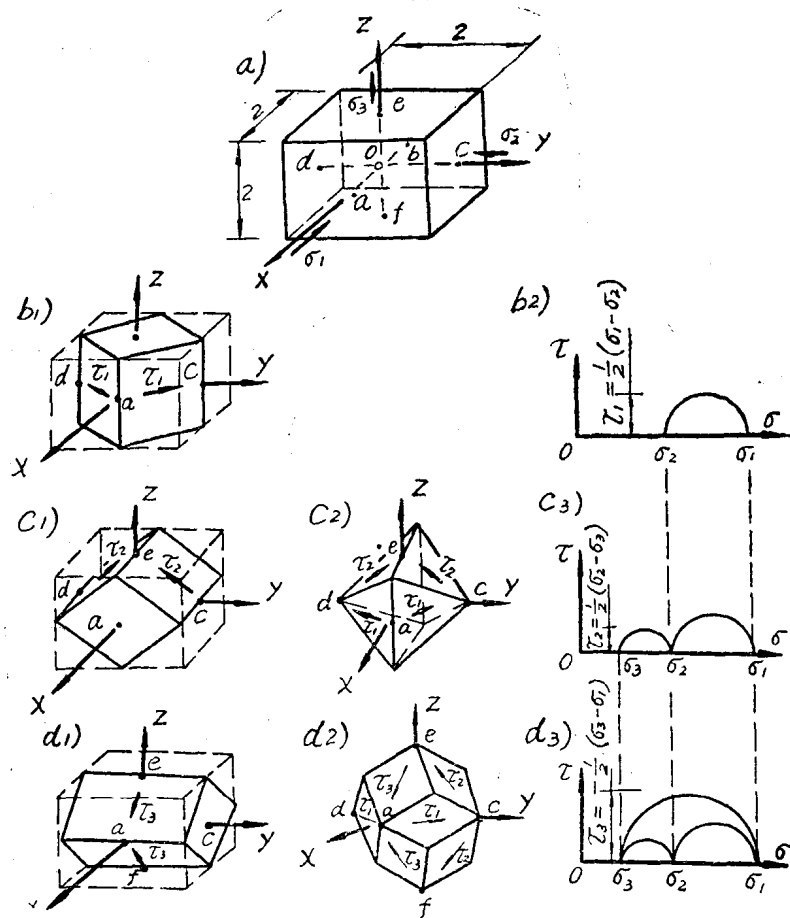


图4 关于主剪应力(τ_1, τ_2, τ_3)的说明

体的面的中心点 a, c, b, d ；这四个平面就是主剪应力 τ_1 的作用平面。相应的应力圆示于图 4 (b2)。

图 4 (c1) 表示主剪应力 τ_2 的作用平面；共有四个这样的平面，它们类似于图 4 (b1) 的 τ_1 平面。若对于图 4 (a) 的立方体按照图 4 (b1) 的 τ_1 平面作出四个剖面，并按照图 4 (c1) 的 τ_2 平面作出四个剖面，那末，就将得出图 4 (c2) 所示八面体，它的八个面就是 τ_1 和 τ_2 的作用平面。相应的应力圆示于图 4 (c3)。

图 4 (d1) 表示主剪应力 τ_3 的四个作用平面，这类似于前面的 τ_1 平面及 τ_2 平面。若对于那个立方体按照图 4 (b1) 的 τ_1 平面作出四个剖面，按照图 4 (c1) 的 τ_2 平面作出四个剖

面，并且按照图 4 (d1) 的 τ_3 平面作出四个剖面，那末，就得到图 4 (d2) 所示的十二面体，它的十二个面就是 τ_1, τ_2 及 τ_3 的作用平面。相应的应力圆示于图 4 (d3)。

附带指出，由于我们在前面规定了 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ，所以第三个主剪应力 τ_3 一般为负值 ($\tau_3 \leq 0$)。 τ_3 的作用方向实际上是与图 4 (d1) 及 (d2) 所示相反的方向。

(五) 八面体应变的公式的推导

首先考虑八面体法向应变 (ϵ_o) 的公式 (2)。这是从下列概念导得的：在三个主应力 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) 作用下的体积应变，就等于三个主应力相等并且等于八面体法向应力

($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$) 时的体积应变如图 1(a) 所示, 可知在三个主应力 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) 作用下的体积应变 (e_v) 为:

$$\begin{aligned} e_v &= e_1 + e_2 + e_3 = \\ &= \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \dots\dots\dots (a) \end{aligned}$$

式中: e_1, e_2, e_3 ——见前面的公式(2A)。若 $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0$, 就有:

$$e_1 = e_2 = e_3 = e_0$$

式中: e_0 ——待定的未知量。这时, 可参考式(a)写出:

$$e_v = 3e_0 = \frac{3(1-2\mu)}{E} \sigma_0 \dots\dots\dots (b)$$

从式(a)与式(b)相等的条件, 得到:

$$e_0 = \frac{1}{3} (e_1 + e_2 + e_3) \dots\dots\dots (2)$$

即求证的公式(2)。

其次, 要说明几个模量之间的关系。从式(b)可以写出八面体法向应力 (σ_0) 与体积应变 (e_v) 之比为:

$$\frac{\sigma_0}{e_v} = \frac{E}{3(1-2\mu)}$$

这就引出了体积弹性模量 (K) 的公式:

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)} \dots\dots\dots (5)$$

从式(b)也可以写出八面体法应力 (σ_0) 与应变 (e_0) 之比为:

$$\frac{\sigma_0}{e_0} = \frac{E}{1-2\mu}$$

这个比值称为八面体弹性模量, 即:

$$M_0 = \frac{E}{1-2\mu} \dots\dots\dots (6)$$

并且有:

$$M_0 = 3K \dots\dots\dots (6A)$$

再次, 将推导八面体剪应变的公式(4)。为此, 考虑剪切模量的定义:

$$G = \frac{\text{剪应力}}{\text{剪应变}},$$

由此可写出八面体剪应变 (γ_0) 的表达式:

$$\gamma_0 = \frac{\tau_0}{G},$$

把前面的公(3)代入上式, 即得:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \\ &= \frac{\frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{G} \end{aligned} \dots\dots\dots (c)$$

从前面的公式(2A), 得:

$$\begin{aligned} e_1 - e_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)] - \\ &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)] = \\ &= \frac{1+\mu}{E} (\sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned}$$

由此得:

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{E}{1+\mu} (e_1 - e_2) \dots\dots\dots (d)$$

同样, 可得到:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 - \sigma_3 &= \frac{E}{1+\mu} (e_2 - e_3) \\ \sigma_3 - \sigma_1 &= \frac{E}{1+\mu} (e_3 - e_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (e)$$

把式(d)及(e)代入式(c), 并引入剪切模量 G 的公式:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

简化后即得:

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2} \end{aligned} \dots\dots\dots (4)$$

即求证的公式(4)。

二、试验数据的整理和分析

(六) 无侧限抗压强度试验的曲线

先介绍一个最简单的例题,即无侧限抗压强度的曲线,见图5。图5(a)为按常规方法作出的轴向应力与轴向应变关系的曲线:虚线为荷重(P)除以试样开始时的截面积($F_0=12.57\text{cm}^2$)之商与轴向应变(ϵ_1)的关系,即(P/F_0) $\sim\epsilon_1$ 曲线;连续的曲线为轴向应力 $\sigma_1=\frac{P}{F_0}(1-\epsilon_1)$ 与轴向应变 ϵ_1 的关系曲线。例如,图5(a)的a点为 $P/F_0=0.41\text{kg/cm}^2$, $\epsilon_1=0.12$;因此 $\sigma_1=0.41(1-0.12)=0.37\text{kg/cm}^2$ 即b点。

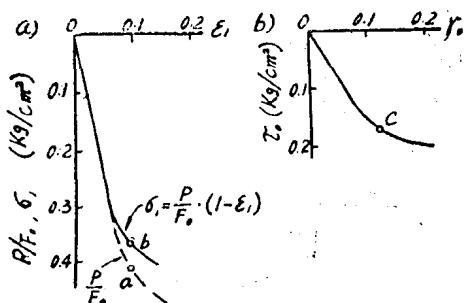


图5 无侧限抗压强度试验
(试验数据见水电部:《土工试验操作规程》, 1982, 第199页)

试样的三个主应力是: $\sigma_1>0$, $\sigma_2=\sigma_3=0$ 。因为可以假定饱和土的试样在试验过程中体积不变,亦即假定 $\mu=0.5$,所以三个主应变是: $\epsilon_1>0$, $\epsilon_2=\epsilon_3=-0.5\epsilon_1$ 。代入前面的公式(1)~(4),即得八面体法向应力及应变为:

$$\sigma_o = \frac{1}{3} \sigma_1, \quad \epsilon_o = 0$$

八面体剪应力及应变为:

$$\tau_o = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_1, \quad \gamma_o = \sqrt{2} \epsilon_1$$

把以上公式应用于图5(a)的曲线上的b点,即得:

$$\sigma_o = 0.12\text{kg/cm}^2, \quad \epsilon_o = 0$$

以及

$$\tau_o = 0.17\text{kg/cm}^2, \quad \gamma_o = 0.125$$

这就是图5(b)的曲线上的c点。

这里,因为八面体法向应力总是等于0,所以不能作出 $\sigma_o \sim \epsilon_o$ 关系曲线。

以上概念也可应用于其它应力条件下的试验,例如三轴压缩与伸长试验等等。但不能应用于直接剪力试验、固结试验,因为应力情况不是明确知道的。

(七) 三轴试验资料的整理

—— $\bar{\sigma}_x \sim \sqrt{2} \bar{\sigma}_r$ 曲线

这里介绍的是三轴压缩与伸长试验的轴向应力与周围应力的 $\sqrt{2}$ 倍的关系曲线。这通常是按有效应力作出的应力途径,即图6(c)所示的 $\bar{\sigma}_x \sim \sqrt{2} \bar{\sigma}_r$ 曲线,也叫Rendulic作图法。这种作图法只适用于三轴压缩及伸长试验,把压缩及伸长条件下的破坏包线汇总在一起。这并不属于八面体应力的范畴,但可以联系到八面体应力来探讨和理解,见后面的第(十)节。

在图6(a)中说明了强度包络面的意义。图中表示破坏时的有效应力分量 $\bar{\sigma}_x$, $\bar{\sigma}_y$, $\bar{\sigma}_z$ 的矢量以及矢径 OP ,把许许多多的表示极限应力的P点联结起来,就成为强度包络面。

图6(b)表示的三轴试验属于轴对称的空间应力状态,周围应力为: $\bar{\sigma}_r = \bar{\sigma}_x = \bar{\sigma}_y$ 。考虑图中的一个平面 $oeo'o''$,它通过 $\bar{\sigma}_x$ 轴,并且与 $\bar{\sigma}_x$ 及 $\bar{\sigma}_r$ 轴成 45° 角这也就是通过 $\bar{\sigma}_r$ 轴并且通过等倾斜轴 oo' (亦即图中虚线所示

立方体的对角线)的平面。三轴压缩及伸长试验的应力途径可以方便地表示在这个平面中。

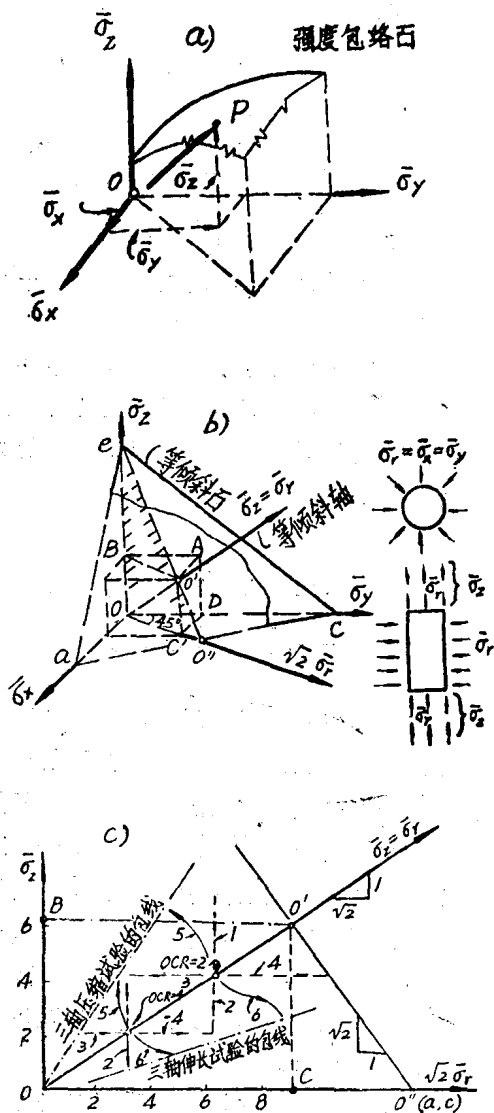


图6 三轴压缩及伸长的 $\sigma_z \sim \sqrt{2} \sigma_r$ 曲线, Rendulic作法

(参考Henkel:《饱和重粘土的抗剪强度》
见《粘性土抗剪强度译文集》1965年)

以上说的这个平面示于图6(c), 图中表示 $\sqrt{2} \sigma_r$ 及 σ_z 轴线, oo' 线即 $\sigma_z = \sigma_r$ 线, 以及与 oo' 线成直角的 $o'o''$ 线。意注, $o'o''$ 线就是图6(b)的 $eo'o''$ 线, 也就是等倾斜面 ace 的投影。

在图6(c)中, 也表示超压密比为不同值($OCR=2$, $OCR=4$)的饱和重塑粘土试样在不同条件下的应力途径, 即:

1, 2——为排水剪的压缩及伸长试验, 分别为增加及减小 σ_z 值达到破坏;

3, 4——同上条件下, 分别为减小及增加 σ_r 值达到破坏;

5, 6——为不排水剪的压缩及伸长试验 (取 $\sigma_z = \sigma_r - u$)。

从图6(c)可以看出, 三轴压缩及伸长试验的包线都接近于直线, 它们都不通过原点0, 包线不通过原点, 是因为试样是超压密的。

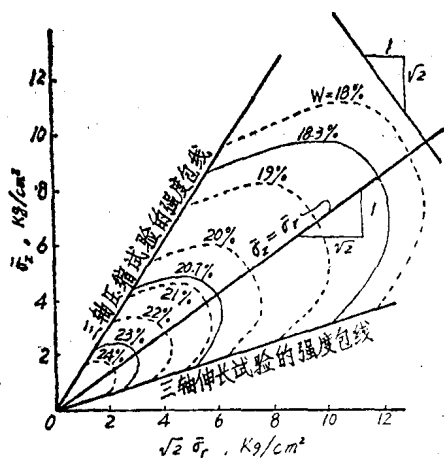


图7 三轴压缩及伸长的 $\sigma_z \sim \sqrt{2} \sigma_r$ 曲线
——从排水剪试验曲线得出的含水量等值线
——不排水剪试验的有效应力途径
——正常压密的饱和重粘土 (参考Henkel, 见图6的说明)

图7表示正常压密($OCR=1$)的饱和重塑粘土的强度包线。包线是通过原点0的, 这与图6(c)的包线不同。图中也表示由排水剪以及由不排水剪得出含水量等值线 (或者, 也可以是孔隙比等值线) 是一组互相平行的曲线, 并且与 $\sigma_z = \sigma_r$ 线正交。这就说明了, 对于饱和粘土来说, 破坏时的按有效应力的强度包线, 以及有效应力与含水量的关系 (或者也可以是有效应力与孔隙比的关系), 都是惟一性的关系。这里, “惟一

性”的意义，就是说这种关系并不因为试验时采用了排水剪或不排水剪而有所不同。

关于 $\sigma_x \sim \sqrt{2} \sigma_v$ 曲线的特性，还要在后面的第(十)节的图17中加以讨论。

(八) 当主应力之和为常量时，在等倾斜面上表示空间应力状态的作图法

在八面体的等倾斜面上表示空间应力状态，就是把一系列的主应力之和等于常量的主应力($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$)数值，表示在等倾斜面内的一个等边三角形坐标系统中，由此作出强度包线及探讨强度规律。在这一节里，将讨论等边三角形坐标系统的应用及其原理，以及讨论有关强度规律的题问。

首先说明等边三角形坐标系统的原理。图8表示在等边三角形 ace 内，从任意点(P)到三角形的边(ce, ea, ac)的垂直距离(h_1, h_2, h_3)之和等于常量，这在平面几何学中是不难证明的。因此，若三个变量之和为常量时，就可以根据这个原理，在等边三角形坐标系统中表示这三个变量。

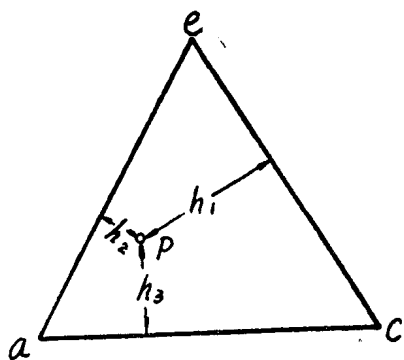


图8 等边三角形内任意点(P)到三条边的垂线之和($h_1 + h_2 + h_3$)为常量

关于等边三角形坐标系统在土力学中的应用，有一个例子就是图9所示砾质土分类图。这里，三个粒组(砾、砂粒、粉粒加粘粒)含量之和为常量，等于100%。图中也表示“砾”的含量百分率的一系列等值线

(即0, 20, 40, 60, 80, 100%线)以及“砂粒”与“粉粒加粘粒”的百分率等值线。图9的应用，就是根据粒径级配确定土的分类名称。例如：砾、砂粒、粉粒加粘粒的含量分别为56, 35及9%，就可以在相应的边上作出 aP , bP 及 cP 线，相交于 P 点，由此确定土的分类名称为“砾石”。

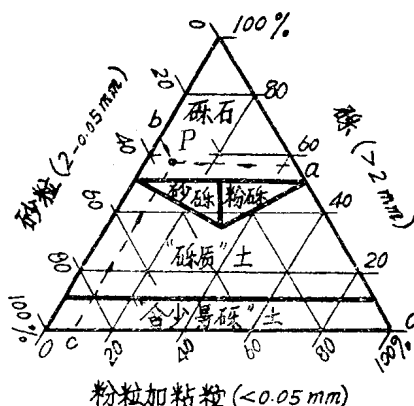


图9 砾质土分类

(水电部《土工试验操作规程》：1962，8页)

下面，将说明怎样在等倾斜面中表示空间应力状态。先在图10中说明作图法，然后说明作图的原理。

图10(a)——考虑主应力($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$)。这里，不再象前面的图1及2中用($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$)的符号，是因为我们假定主应力($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$)的任意一个都可以是最大、最小或中主应力。并且规定主应力之和即八面体法向应力的三倍，等于常量($\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_o$)。这样，就可以在图中作出主应力 σ_x 的一系列等值线(即 $\sigma_x = 0, 0.5\sigma_o, \sigma_o, 1.5\sigma_o, 2\sigma_o, 2.5\sigma_o, 3\sigma_o$ 的等值线)，以及主应力 σ_y 与 σ_z 的同样的等值线。若给出的主应力为 $\sigma_x = 1.9\sigma_o$, $\sigma_y = 0.7\sigma_o$, $\sigma_z = 0.4\sigma_o$ ，那末，就在图中所示三角形的 ea 边上的 i 点(表示 $\sigma_x = 1.9\sigma_o$)作 iP 线与 ce 线平行，同样作出 jP 与 kP 线，这三条线相交于 P 点， P 点就表示给定的空间应力状态。若从等边三角形的中心点(o')作一线到 P 点，那末 $o'P$ 就按

某一比例尺表示相应的八面体剪应力 (τ_o)，因此在图上注明了 $\overline{o'P} = k\tau_o$ 。这个比例尺示于图10(c)。

后面，还要在图13及14以及这以后的图中，说明有关强度包线与强度规律的问题。这就是说，若有破坏时的三个主应力的一系列数据，且主应力之和为常量，但主应力之比为不同比值时，就可以把这些数据表示在

同一等边三角形坐标图内，由此求作强度包线及探讨强度规律。

图10(b)——这与图10(a)基本上相同。为了作出表示给定空间应力状态的 P 点，作出与 ce 线成直角的 Pl 线 ($Pl = \sigma_x = 1.9\sigma_o$) 以及类似的 Pm 与 Pn 线。这个 P 点的位置与图10(a)相同。 $\overline{o'P}$ 也是按同前述的比例尺表示八面体剪应力 (τ_o)。

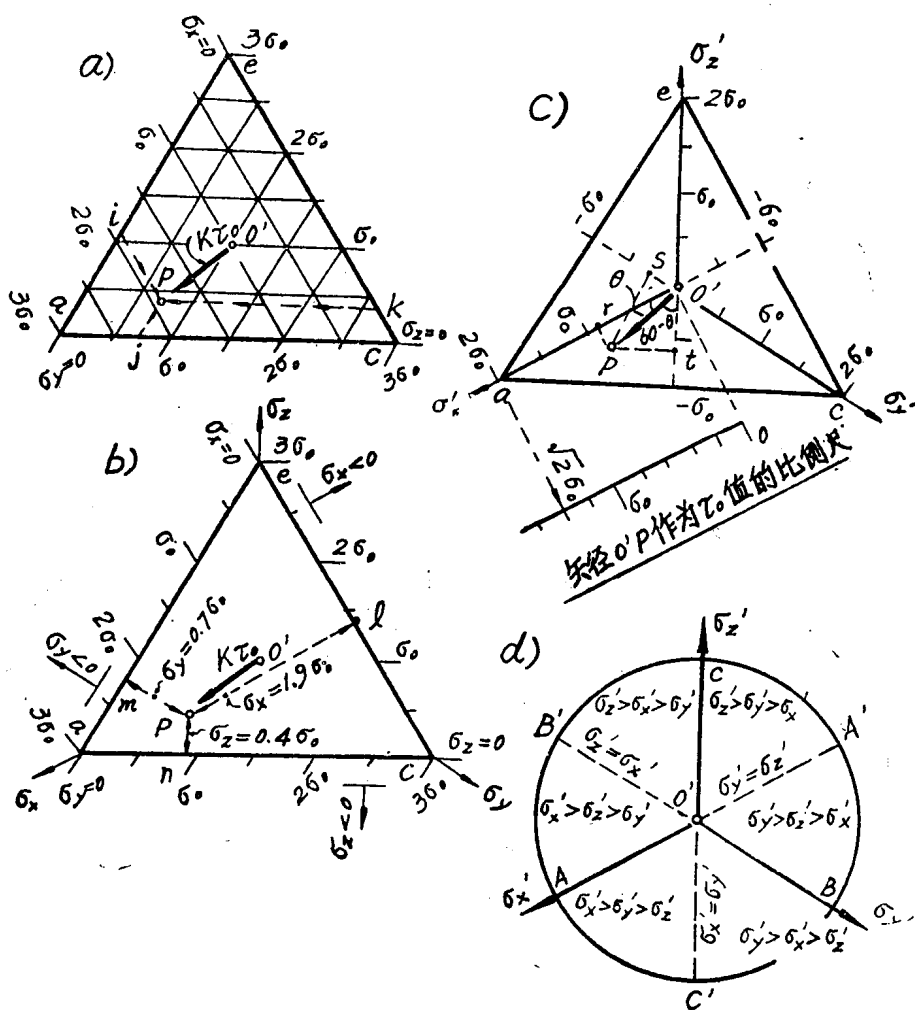


图10 当主应力之和为常量时 ($\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_o$) 等倾斜面上表示主应力 ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) 及八面体剪应力 (τ_o)

(a)~(c)——作图法, (b)——应力图的特性

图10(c)——这里，引入了偏应力(即主应力减去八面体应力之差)，即：

$\sigma_x' = \sigma_x - \sigma_0$, $\sigma_y' = \sigma_y - \sigma_0$, $\sigma_z' = \sigma_z - \sigma_0$;
因此，偏应力之和等于零($\sigma_x' + \sigma_y' + \sigma_z' = 0$)。为了作出表示给定空间应力状态的P点，在 σ_x' 轴上作出r点(表示 $o'r = \sigma_x' = \sigma_x - \sigma_0 = 1.9\sigma_0 - \sigma_0 = 0.9\sigma_0$)并作rP线与 σ_x' 轴成直角，同样在 σ_y' 轴上作出s点($\sigma_y' = \sigma_y - \sigma_0 = -0.3\sigma_0$)及sP线，以及在 σ_z' 轴上作出t点($\sigma_z' = \sigma_z - \sigma_0 = -0.6\sigma_0$)及tP线，这三条线就相交于P点。 $\overline{o'P}$ 即按同前述的比例尺表示相应的八面体剪应力(τ_0)。这个比例尺示于图下。

图10(d)——这是为了说明等倾斜面上的等边三角形坐标的应力图的两个特性，懂得这两个特性对于应力图的应用是有帮助的。在图中可以看到，在 σ_x' 轴上，亦即 $AO'A'$ 线上，注明了 $\sigma_y' = \sigma_z'$ ，这就是说，若表示给定应力状态的某一点(例如前面讲到的P点)落在这条轴线上，那就满足 $\sigma_y' = \sigma_z'$ 的条件。图中把整个圆分成六个相等的区，即 $o'A'C$ ， $o'CB'$ ，……，它们的顶角都是 60° 。在 $o'A'C$ 区内注明了： $\sigma_x' > \sigma_y' > \sigma_z'$ ，这就是说，若表示给定应力状态的某一点(例如前面讲到的P点)落在这个 60° 范围内(但可以在弧 $A'C$ 以外，因为圆的半径是随便画的)，那末，就满足 $\sigma_x' > \sigma_y' > \sigma_z'$ 的条件。这两个特性是不难理解的，只要按照图10(a)~(c)的方法作出不同应力情况下的P点，就可以理解清楚了。

在图10(d)中，如果把偏应力改写成主应力(即把 σ_x' ， σ_y' ， σ_z' 分别改写成 σ_x ， σ_y ， σ_z)，仍然是适用的。

关于图10中阐述的作图法，还要从理论上来说明两个问题：怎样理解图10(a)的主应力(σ_x ， σ_y ， σ_z)等值线？图10(c)的矢径 τ_0 的比例尺的依据是什么？

首先在图11中的说明主应力等值线的问题。

图11(a)表示主应力(σ_x ， σ_y ， σ_z)，

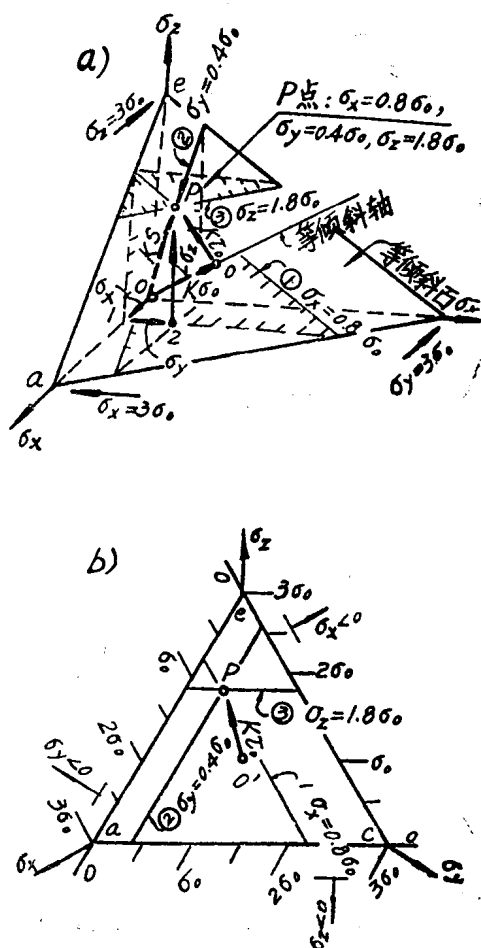


图11 关于主应力等值线的解释
(参考前面的图10)

并规定主应力之和即八面体法向应力的3倍为常量。即：

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_0 = \text{常量}$$

在三个轴(σ_x ， σ_y ， σ_z)上，取：

$$oa = oc = oe = 3\sigma_0$$

并作出ace平面，这就成为八面体的一个面，即等倾斜面。根据立体解析几何，可知等倾斜面ace的公式是：

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\sigma_0$$

图中也表示：

在等倾斜轴上的 $\overline{oo'} = k \cdot \sigma_0$ 。(这里，系数k的意义是，矢径 oo' 以某种比例尺表示八面体法向应力 σ_0)；

从原点 o 到等倾斜面上的任意点 P 的矢量, $\overline{oP} = kS$, 这等于三个矢量 ($0-1=\sigma_x$, $1-2=\sigma_y$, $2-P=\sigma_z$) 的和。这里, 系数 k 的意义同前, S ——等倾斜面上的总应力;

在等倾斜面上矢量 $\overline{o'P} = k\tau_o$, 即八面体剪应力 τ_o 乘以系数 k , 这就等于矢量 (ks) 与矢量 ($k\sigma_o$) 的差。

关于这三个矢量 ($k\sigma_o$, ks , $k\tau_o$) 以及 k 值, 将在后面的图12中作出解释。

为了便于说明问题, 取图11(a)的 P 点的坐标为: $\sigma_x = 0.8\sigma_o$, $\sigma_y = 0.4\sigma_o$, $\sigma_z = 1.8\sigma_o$; 通过 P 点作三个平面①、②及③分别与 σ_x , σ_y 及 σ_z 成直角, 这三个平面的公式是:

$$\sigma_x = 0.8\sigma, \sigma_y = 0.4\sigma_o, \sigma_z = 1.8\sigma_o,$$

以上三个公式同时也就是三个平面与等倾斜面相交的直线的公式。

图11(b)是等倾斜面 ace 的图, 其中也作出了三个平面①、②及③与等倾斜面相交的直线, 即主应力 (σ_x, σ_y 及 σ_z) 的等值线。

这就说明了图10(a)所示等倾斜面上的主应力等值线意义。

关于图10(c)所示八面体剪应力 τ_o (即矢径 $o'P$ 的比例尺的问题, 要从图10(a), (b) 及 (c) 的 a 点的应力状态来予以说明。图中表示 a 点的主应力为: $\sigma_x = 3\sigma_o$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$ 。偏应力为: $\sigma_x' = 2\sigma_o$, $\sigma_y' = \sigma_z' = -\sigma_o$ 。从公式(3)得:

$$\begin{aligned} \tau_o &= \\ &= \frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}}{3} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{(3\sigma_o - 0)^2 + (0 - 0)^2 + (0 - 3\sigma_o)^2}}{3}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \sigma_o;$$

这就说明了, 图10(c)的矢径 $o'a$ 表示八面体剪应力等于 $\sqrt{2} \cdot \sigma_o$ 。这就是图中给出的“矢径 $o'P$ 作为 τ_o 值的比例尺”的依据。要按照这个比例尺来量测矢径 $o'P$ 的长度, 即得 τ_o 值。或者, 也可以按图10(c)的偏应力的比例尺来量测矢径 $o'P$ 的长度, 再除以 $\sqrt{2}$, 即得 τ_o 值。

关于图10(c)所示八面体剪应力 τ_o (即矢径 $o'P$) 的比例尺的问题, 已经从特殊条件 (即 $\sigma_x = 3\sigma_o$, $\sigma_y = \sigma_z = 0$ 的条件, 亦即图中的 a 点) 来说明了。这也可以从一般的条件 (即图中的 P 点) 来予以说明。在图10(c)中, 令 $\angle ro'P = \theta$, $\angle to'P = 60^\circ - \theta$, 就可以写出:

$$\left. \begin{aligned} \overline{o'P} &= \frac{\overline{o'r}}{\cos \theta}, \\ \overline{o'P} &= \frac{\overline{o't}}{\cos (60^\circ - \theta)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (f)$$

从式(f)联解, 简化后得:

$$\operatorname{tg} \theta = \left(2 \frac{\overline{o't}}{\overline{o'r}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

由此可求得:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\cos \theta} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{\overline{o't}^2 - \overline{o't} \cdot \overline{o'r} + \overline{o'r}^2}}{\overline{o'r}} \end{aligned}$$

另外, 从图10(c)得到:

$$\begin{aligned}\overline{o'r} &= \sigma_x' \\ &= \sigma_x - \sigma_0 \\ &= \sigma_x - \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}, \\ \overline{o'r} &= \frac{1}{3} (2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z); \dots\dots\dots (h)\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}\overline{o't} &= -\sigma_x' \\ &= \sigma_0 - \sigma_x \\ &= \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} - \sigma_x, \\ \overline{o't} &= \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y - 2\sigma_z) \dots\dots\dots (i).\end{aligned}$$

从式 (g), (h) 及 (i) 以及式 (f) 的第一式, 可得 (推导过程从略):

$$\begin{aligned}\overline{o'P} &= \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \\ &\cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2} \\ &\dots\dots\dots (j)\end{aligned}$$

这里, 我们注意到, 按式 (j) 的矢径 $\overline{o'P}$ 的长度, 就等于按公式 (3) 的八面体剪应力:

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \\ &= \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}}{3} \\ &\dots\dots\dots (3)\end{aligned}$$

的 $\sqrt{2}$ 倍。

这就说明了, 图 10 (c) 下面的“矢径 $\overline{o'P}$ 作为 τ_0 值的比例尺”, 对于一般性的条件也是适用的。

关于应力矢量的另一个问题, 就图 11 (a) 的三个矢量 ($k\sigma_0$, kS , $k\tau_0$) 的系数 k 等于多少的问题, 这将在图 12 中作出解释。图 12 (a) 表示这三个矢量。图 12 (b) 表示, 当 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \sigma_0$ 时, 即可求得矢量 $\overline{oo'}$ 为:

$$\overline{oo'} = \sigma_x \cdot \cos \alpha + \sigma_y \cdot \cos \beta + \sigma_z \cdot \cos \gamma$$

$$= 3 \cdot \sigma_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \sigma_0.$$

这就是说, 如果按照主应力轴 ($\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$) 的比例尺来量测矢量 $\overline{oo'}$, 则得到的数值为八面体法向应力 σ_0 的 $\sqrt{3}$ 倍。或者, 也可以说, 前面所说的系数 $k = \sqrt{3}$ 。

从图 12 (c) 很容易看出矢量 $\overline{oP}$ 为:

$$\overline{oP} = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}$$

若在图 12 (a) 中, 令: 面积 $oce = oea = oac = A'$, 面积 $ace = A$, 因此 $A'/A = \cos \alpha = \cos \beta = \cos \gamma = 1/\sqrt{3}$ 。那末, ace 面上的总应力为:

$$\begin{aligned}S &= \frac{\sqrt{(\sigma_x \cdot A')^2 + (\sigma_y \cdot A')^2 + (\sigma_z \cdot A')^2}}{A} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}\end{aligned}$$

因此, 得:

$$\overline{oP} = \sqrt{3} \cdot S$$

同样, 在图 12 (a) 中, 可写出:

$$\begin{aligned}\overline{o'P} &= \sqrt{\overline{oP}^2 - \overline{oo'}^2} \\ &= \sqrt{(k \cdot S)^2 - (k \cdot \sigma_0)^2} \\ &= k \cdot \sqrt{S^2 - \sigma_0^2}\end{aligned}$$

$$\text{式中: } k = \sqrt{3}; \quad S = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2};$$

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z);$$

简化后, 即得:

$$\begin{aligned}\overline{o'P} &= \\ &= \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2}}{\sqrt{3}}\end{aligned}$$

在公式 (3) 中令 $\sigma_1 = \sigma_x$, $\sigma_2 = \sigma_y$, $\sigma_3 = \sigma_z$, 并把该式代入上式, 简化后即得: