

Jingji

经济新学科讲义

Xinxuekejiangyi

数理经济学导论

Introduction to Mathematical Economics

伍超标 编著

中国统计出版社
China Statistics Press



1200321724

经济新学科讲义

数理经济学导论

Introduction to Mathematical Economics

伍超标 编著

中国统计出版社
China Statistics Press



(京)新登字 041 号

图书在版编目(CIP)数据

数理经济学导论/伍超编著.

—北京:中国统计出版社,2002.12

ISBN 7-5037-3957-6

I. 数… II. 伍… III. 数理经济学 IV. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 086618 号

数理经济学导论

责任编辑/杨映霜

装帧设计/刘国宁 张建民

出版发行/中国统计出版社

通信地址/北京市西城区月坛南街 75 号 邮政编码/100826

办公地址/北京市丰台区西三环南路甲 6 号

电 话/(010)63459084 63266601 22500(发行部)

印 刷/科伦克印务有限公司

经 销/新华书店

开 本/87×1092mm 1/16

字 数/410 千字

印 张/27.25

印 数/1—3000 册

版 别/2002 年 12 月第 1 版

版 次/2002 年 12 月北京第 1 次印刷

书 号/ISBN 7-5037-3957-6/F·1519

定 价/46.00 元

中国统计版图书,版权所有,侵权必究。

中国统计版图书,如有印装错误,本社发行部负责调换。

经济新学科讲义 编辑委员会

顾问 (按姓氏笔画排名)

厉以宁 吴敬琏 胡代光 高鸿业 黄达

编辑委员会

主任 邱晓华

副主任 谢鸿光 袁卫

委员 (按姓氏笔画排名)

尹翔硕	方福前	王诚	王吉利	王志伟
左大培	白暴力	刘文析	刘科	江晓娟
严建辉	余永定	张军	张维迎	李子奈
邱晓华	陈广汉	冼国鸣	周立勤	周茂莱
林毅夫	武超标	钟守洋	唐任伍	袁卫
梁小民	黄卫平	舒元	曾五一	林毅夫
谢鸿光	魏杰			

经济新学科讲义 编辑部

主任：刘国宁

副主任：杨映霜

成员：吕军 徐颖 张建明

序

自经济学理论创立以来，它就与人们的经济生活有着密不可分的关系。正如萨缪尔森所说：“经济学本质上是一门发展的科学，它的变化反映了社会经济趋势的变化。”在历史进入21世纪的今天，随着经济生活翻天覆地的变化，经济学的发展也有了新的飞跃。如果我们仔细阅读一下经济学史，那么，我们将会看到，经过2000多年的发展，经济学已经从当时的一棵小苗长成了现在的参天大树，并且，在这棵参天大树上，它的每一枝每一叶都是那么的生机勃勃，值得我们仔细地研究和应用。

正如经济的发展导致了社会分工的细化一样，经济学也随着社会经济的发展而出现了学科的细化分科，事实上，这种细化的分科在上一世纪就开始了。我们清楚地记得，自工业革命开始，人类进入了一个崭新的时代，并且，在我们可以上天入地的同时，经济学也进入了繁荣发展的新时期。在此基础上，计算机的快速发展，全球经济一体化以及全球信息化的到来，经济学更出现了空前的发展和学科分科的进一步细化，进而使一批经济学新学科得以产生。这些经济新学科的出现，是经济发展的必然，也是经济生活的需要。

作为经济学领域里的新生事物，这些新的经济学分科有着一些共同点：首先是它们更贴近我们的社会

经济生活,因为它就是为了解决经济生活里的某一领域或者某一具体问题而产生的。其次是它们具有更强的可操作性,并可以直接应用到具体的经济问题中。第三是它们更强调量化的管理,把更多的现代应用数学知识用于其中。鉴于这样的特点,可以断定,这些新的经济学科将会给人们的社会经济生活带来更新的理念和思想,它们将在社会经济生活中起着越来越重要的作用。但是,由于它们的出现还是近期的新鲜事,所以,这些新的经济学科无论是在国外还是在国内,都还不为大众所熟悉,尤其是在国内更是这样,这些经济学的新生事物基本上还局限于学术高层里,它们大都还是博士生们的研究和讨论课题,也可以说目前它们还高高地呆在我国经济学领域的象牙塔里,还没有用一种比较低的姿态与广大的民众见面。我想,在信息流通可以用秒来计算的今天,这不能不说是一件让人感到遗憾的事。不过,这种遗憾很快将由于中国统计出版社组织编写出版的《经济新学科讲义》丛书而成为历史的片段。

编写和出版《经济新学科讲义》,是中国统计出版社对我国经济学发展的重大贡献,也体现了他们与众不同的眼光。在我们的社会还存在有人“一切向钱看”的今天,他们这种以社会效益作为出发点的出版观念值得称赞。正因如此,这套丛书的编写也得到了我国众多的经济学专家学者的鼎力支持。在这套丛书中,我们高兴地看到,我国新老经济学专家学者因为这套丛书的出版而汇集一堂,他们为了让这些经济学的新兴学科从象牙塔里走出来以贴近普通民众和读者而辛勤写作。我相信,这些专家学者在这里所奉献的每一本图书,都凝聚着他们的智慧和汗水,是他们对这一领域多年研究的成果结晶。

我衷心地为这套丛书的出版感到高兴,并相信广大的读者也如同我一样会感到高兴。有人说,得到好书,就如同得到了良师益友,现在,这样一套让人开卷有益的图书展示在我们眼前,真的是读书人的福气。斯为序。

邱晓华
2002年10月于北京

前 言

数理经济学 (mathematical economics) 是一门有近二百年历史的边缘综合性交叉学科。由于历史的原因,直到 20 世纪 80 年代还被贯以“西方资产阶级经济学”的分支学科的名声。故在我国的学术界,数理经济学长期没有得到充分的重视,尤其是在学科交叉性方面,以致形成数学工作者从事数理经济学研究抽象化与纯数学化,而熟悉数学的经济理论研究者寥寥无几的局面。19 世纪的一些大师级人物说过这样的话:经济学要成为真正的科学,必须要成为一门数学的科学。经济学的数学化是经济学学科发展的大趋势。为适应这一趋势,培养一大批既懂经济又懂数学的复合型人才,对我国的经济学理论与实践及经济改革开放,有着极其重要而深远的历史与现实意义。

在最近的 20 年里,我国的一些著名学者出版过多种版本的数理经济学的著作教科书,如杨小凯与茅以軫合著的《数理经济学基础》(1985)、潘吉勋的《数理经济学原理》(1989)、潘介人的《数理经济》(1989)、李子江的《数理经济——一般经济均衡理论与方法》(1995)、肖柳青的《数理经济学》(1998)与张金水的《数理经济学——理论与应用》(1998)等。毋庸置疑,这些著作在推动我国经济学的数学化进程方面功不可没,但从教学对象的角度,似乎仍有不少可改进之处。作为教科书,在使用过程中,我们总觉得这些著述要么就是过于数学化以致令非数学专业的学生望而却步,要么就是应用性太强,不知从何学起?不知要准备那些数学基础知识?我们觉得,国内目前缺少如美籍华人蒋中一所著的《数理经济学的基本方法》那样的比较适合于非数学专业本科生学习的教材。适逢《数理经济学导论》入选“经济新科学讲义”出版计划,作者本人才有志于编著一本既适合我国数学类、经济类与管理类高年级本科生或研究生学习,又适合从事经济学理论与应用的研究工作者自学与使用的教科书或手册。由于多年来所接受的多层次、多学科的高等教育,以及近 30 年来所形成的自学及学习风格,还有近 20 年多层次的教学经验,使我有信心编著好这本讲义。

就编著的内容,本书本着这样的宗旨:既要反映数理经济学近二百年来的发展的基本全貌,又要体现其学科发展的新趋势,又要拥有广大的读者群。因此,本书分五篇,以概述及矩阵代数开篇,以均衡分析、

比较静态学、最优化问题反映数理经济学经典的内容,以动态分析体现数理经济学的发展趋势。为了体现数理经济学的学科交叉性,本书每一章都强调数学的工具性与经济学的对象性,强调运用数学工具解决经济学与管理学的基本问题。书中所使用的数学程度要高于非数学专业的高等数学,浓缩了矩阵论、高等微积分与常微分方程等几门数学专业的本科课程的精华。这种编排,可使数学专业的学生看到本学科的有用性,提高数学应用能力;可使学过高等数学的非数学专业的学生知道经济学的发展还需要那些数学?这对培养学科交叉性复合人才是很有用的。

本书配备了大量的例题与习题,其数量起码超过 1000 道。习题的编排有别于许多教科书的方式,采取的是穿插于相关的节、目中的方式,而不是集中在每章的最后,每章的最后是习题答案。本人认为,这种方式更利于读者自学。在习题的编排方面,作者本人极度推崇著名的中科院院士陈希孺教授的做法,就是多编习题、多做习题。他在《高等数理统计学》的序言中,这样写到:“如果通过一个基础课的学习,只是记住了若干概念,背了几个定理,而未能在这方面有所长进,那就真是‘入宝山而空返’了。技巧的熟练固非一日之功,但取法乎上,仅得乎中,必须在开始学基础课时就设定一个高目标。日后进入研究工作,克服难点的能力如何,相当一部分就取决于在这方面修为的深浅了。同时,经验表明,在打基础的阶段因忽视习题而导致素质上的缺陷,在日后不易弥补,或事倍功半。”这段话是很富哲理性的。

本书的大部分内容,曾在本校经济学院与管理学院为本科生与研究生开设的“数理经济学”课程上讲授过。书稿排版出来后,班上一些学生参与了订正工作,并提出了宝贵的修改意见,藉此深表感谢!

本书的撰写工作,得到了国家自然科学基金重点项目(项目批准号: 19831020)、国家教育部高等学校骨干教师资助计划、暨南大学教材出版基金等资助,得到了中国统计出版社在出版上的关心与大力支持。作者对此表示衷心的感谢。由于作者水平有限,错误之处在所难免,恳请读者和专家不吝赐教。

作者谨识

2002 年 7 月于

暨南大学统计学系

目 录

第 I 篇 概述与矩阵代数基础	1
第一章 数理经济学概述	2
§1.1 数理经济学的产生和发展	3
§1.2 数理经济学的研究方法 with 基本问题	6
§1.3 与宏微观经济学等经济学分支的比较	7
§1.4 经济模型	8
§1.5 本书的计划	11
第二章 矩阵论基础	12
§2.1 矩阵乘法、逆及其经济学应用	12
2.1.1 矩阵的涵义	12
2.1.2 矩阵乘法与分块	13
2.1.3 矩阵的逆	16
2.1.4 投入产出分析	18
§2.2 矩阵的初等变换及其应用	22
2.2.1 矩阵的初等变换	22
2.2.2 应用 I: 矩阵求秩	25
2.2.3 应用 II: 矩阵求逆	26
2.2.4 应用 III: 矩阵方程及线性方程组求解	27
2.2.5 经济学应用: 套利投资组合与状态价格	30
§2.3 矩阵特征值与矩阵函数	32
2.3.1 矩阵特征值的定义及其相关概念	33
2.3.2 矩阵相似与对角化	34
2.3.3 Hamilton–Cayley 定理与最小多项式	37
2.3.4 特征矩阵 $\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}$ 的标准型与初等因子	39
2.3.5 Jordan 标准型与矩阵函数	41
§2.4 实二次型	48
2.4.1 二次型的化简	49
2.4.2 二次型的定性	52
习题答案	54

第 II 篇 均衡分析	63
第三章 市场均衡模型	64
§3.1 商品市场均衡	64
3.1.1 局部市场均衡	65
3.1.2 一般市场均衡	66
§3.2 收入决定模型	69
§3.3 IS—LM 模型	70
习题答案	72
第 III 篇 比较静态学	73
第四章 边际与弹性分析	74
§4.1 全微分与全导数	74
§4.2 边际、弹性与增长率	76
§4.3 成本函数及相关的概念	80
习题答案	82
第五章 比较静态分析	84
§5.1 Jacobi 矩阵与 Jacobi 行列式	84
§5.2 隐函数(组)求导	89
5.2.1 隐函数定理	90
5.2.2 隐函数组定理	93
§5.3 比较静态导数的应用	96
5.3.1 显式内生变量的情形	97
5.3.2 隐式内生变量的情形: 一般 函数模型的比较静态分析	100
习题答案	103
第 IV 篇 最优化问题	105
第六章 无约束的最优化问题	106
§6.1 一元函数极值	106
§6.2 多元函数极值	108
§6.3 凸分析概要: 函数的凹凸性与凸集	112
6.3.1 函数的凹凸性	112
6.3.2 凸集	118
§6.4 经济与管理中的应用: 利润最大化	120
6.4.1 单变量极值: 利润最大化	120
6.4.2 多变量极值: 多产品厂商问题	122

6.4.3 多变量极值: 价格歧视	124
6.4.4 厂商的投入决策	125
6.4.5 最优化的比较静态分析	127
§6.5 生产函数与技术进步	129
6.5.1 函数的齐次性	130
6.5.2 生产函数	131
6.5.3 技术进步及其偏倚	138
习题答案	142
第七章 具有约束方程的最优化	146
§7.1 Lagrange 乘数法	146
§7.2 凸分析概要: 拟凸性	151
§7.3 效用最大化与需求函数	155
7.3.1 效用函数	155
7.3.2 效用的替代与商品交换	159
7.3.3 需求函数与间接效用函数	161
7.3.4 需求函数的性质	165
§7.4 成本函数	170
7.4.1 成本最小化与成本函数	170
7.4.2 成本函数的性质	173
§7.5 利润最大化的经济优化问题与市场均衡	175
7.5.1 产出最大化	175
7.5.2 产品供给函数与要素需求函数	177
7.5.3 市场均衡问题	179
§7.6 比较静态分析	182
习题答案	184
第 V 篇 动态分析	187
第八章 积分计算方法及其经济学应用	188
§8.1 不定积分的计算	188
§8.2 定积分的计算	192
8.2.1 原函数法	192
8.2.2 换元法与 Euler 积分	193
8.2.3 分部积分法与递推公式	197
8.2.4 函数项级数的逐项积分法	198
8.2.5 含参量积分的积分号下求导	201
§8.3 二重积分的计算	204
8.3.1 基本方法: 逐次积分法	204

8.3.2 变量替换法	206
8.3.3 应用: 含参量积分的积分号下求积	208
§8.4 积分的经济应用	211
8.4.1 消费者剩余与生产者剩余	211
8.4.2 从边际函数到总函数	212
8.4.3 投资与资本形成	214
8.4.4 资金流量与持久流量的现值	215
§8.5 Domar 增长模型	217
习题答案	220
第九章 常微分方程模型	226
§9.1 一阶常微分方程的解法	227
9.1.1 分离变量法	227
9.1.2 齐次方程与能化为齐次方程的方程	231
9.1.3 线性方程与能化为线性方程的方程	234
9.1.4 恰当微分方程与积分因子法	240
9.1.5 定性图解法	246
§9.2 一阶常微分方程的经济应用	248
9.2.1 由点弹性确定需求函数	248
9.2.2 供需均衡的稳定性分析	249
9.2.3 蛛网模型的一种形式	254
9.2.4 Solow 新古典经济增长模型	255
§9.3 高阶常系数线性微分方程的解法	259
9.3.1 齐次方程的基本解组的求法: 特征根法	259
9.3.2 非齐次方程的特解的求法: 微分算子法	261
9.3.3 非齐次方程通解的求法: 常数变易法	265
9.3.4 可常系数线性化高阶微分方程: Euler 方程	267
9.3.5 时间路径的稳定性定理	269
§9.4 高阶常系数线性微分方程的经济应用	271
9.4.1 具有价格预期的市场模型	272
9.4.2 通货膨胀与失业的相互作用	274
9.4.3 封闭经济的 Phillips 模型	276
9.4.4 期望与库存调节模型	281
习题答案	283
第十章 联立常微分方程模型	290
§10.1 一阶微分方程组	291
10.1.1 顺次积分法	292

10.1.2 升阶消去法	294
10.1.3 首次积分法	297
§10.2 变系数线性微分方程组	301
10.2.1 解的基本性质	301
10.2.2 齐次方程组基本解组的性质	303
§10.3 常系数线性微分方程组	307
10.3.1 齐次方程组基解矩阵	307
10.3.2 算子消去法	314
10.3.3 可常系数化的线性微分方程组	319
§10.4 稳定性与定性理论	321
10.4.1 动力学体系, 自治系统和非自治系统	321
10.4.2 Lyapunov 稳定性	324
10.4.3 自治系统的 Lyapunov 直接方法	329
10.4.4 非自治系统的 Lyapunov 直接方法	335
10.4.5 奇点	339
10.4.6 极限环	346
10.4.7 二阶非线性方程的周期解存在性	352
§10.5 经济学应用	354
10.5.1 Walras 一般均衡的稳定性分析	354
10.5.2 “收入 — 消费 — 投资 — 货币供应” 的动态经济系统	358
10.5.3 物价的微分方程模型	363
10.5.4 广告的微分方程模型	367
习题答案	368
第十一章 差分方程模型	374
§11.1 一阶差分方程	375
11.1.1 齐次线性差分方程	376
11.1.2 非齐次差分方程的特解求法: 待定系数法	378
11.1.3 非线性差分方程的相位图	379
§11.2 一阶差分方程的经济应用	380
11.2.1 乘数动力学模型	380
11.2.2 蛛网模型	383
11.2.3 具有存货的市场模型	389
11.2.4 Harrod 经济增长模型	389
§11.3 高阶差分方程的解法	391
11.3.1 齐次方程的基本解组的求法: 特征根法	391

11.3.2 非齐次方程的特解的求法: 待定系数法	393
11.3.3 解的收敛性定理: Schur 定理	397
§11.4 高阶差分方程的经济应用	400
11.4.1 Samuelson 乘数加速模型	400
11.4.2 Hicks 经济周期模型	401
11.4.3 分布滞后与乘数加速数相互作用模型	403
11.4.4 Goodwin 期望价格模型	404
11.4.5 离散时间条件下的通货膨胀 与失业 (Phillips 模型)	405
§11.5 联立差分系统及其经济学应用	406
11.5.1 联立常系数线性差分系统的解法	407
11.5.2 联立常系数线性差分系统的稳定性判据	411
11.5.3 联立差分系统的经济学应用: Smith 模型	413
习题答案	415
参考文献	420

第 I 篇

概述与矩阵代数基础

在本篇里，我们将介绍数理经济学的基本方面，包括数理经济学的定义、数理经济学的发展史、数理经济学的基本内容与研究方法；介绍经济模型的基本要素。

此外，还将结合经济的应用，介绍最基本的数学方法——矩阵代数的基础知识，因许多分析方法都与矩阵代数有关。

第一章

数理经济学概述

自 1838 年法国著名的经济学家与数学家 A. A. Cournot(1801—1877) 出版了《财富理论数学原理的研究》一书, 奠定了数理经济学的基础以来, 数理经济学取得了长足的发展。人们对数理经济学提出了各种各样的定义, 以下是其中的几种:

- 数理经济学是“西方资产阶级经济学在理论研究中运用数学方法进行陈述和推理的一个分支学科”(《中国大百科全书·经济学卷》)。
- 数理经济学“包括数学概念和方法在经济理论中的各种应用”(《数理经济学手册》, Arrow 等, 1985)。
- 数理经济学是“采用更多的数学方法来描述的经济学”(《数理经济学》, 张金水, 1998)。
- 数理经济学“是一门理论经济学, 是以数学为语言, 寻找一组与经济理论内容相吻合的特殊公理结构, 来探索经济理论体系在逻辑上的一致性, 从而揭示出经济学原理中那些经济变量或其相互之间的函数关系, 然后进行推导以得出规范性的原则或定理, 并且对此给出准确的解释”。数理经济学的本质是“用数学方式表达经济理论, 并进行演绎推理, 以分析和建立经济理论体系; 是经济学中的一个分支”。数理经济学的侧重点是“研究经济系统的存在性、最优性和稳定性等有关系统的定性问题”(《数理经济学》, 肖柳青, 1998)。
- 数理经济学“仅是 一种经济分析的方法, 是经济学家利用数学符号描述经济问题, 运用已知的数学定理进行推理的一种方法”(《数理经济学的基本方法》, [美] 蒋中一, 1999)。
- 数理经济学是运用数学符号、数学方法和数学图形表述和论证经济现象及其相互依存关系的一门综合性边缘学科, 研究经济

活动中的数量关系并从中寻找规律（《现代科学技术大众百科——科技与社会卷》，路甬祥主编，2001；《数学史辞典》，杜瑞芝主编，2000）。

作者本人所倾向的是最后一种定义，这是一个比较全面客观且较为精确的定义。

§1.1 数理经济学的产生和发展

西方第一个把数学用于经济问题的是意大利的 G. Ceva (1647—1734)，他于 1711 年写了一本关于货币价值的书。但首先比较系统地运用数学的则是 Cournot，他在 1838 年出版的著作《财富理论数学原理的研究》已公认为数理经济学的开端。只是当时的经济理论权威们不熟悉数学推理而使该书无人问津，直到 40 年后才受到英国的 W.S. Jevons (1835—1882) 和法国的 L. Walras (1834—1910) 高度推崇，才知名于世。现在人们习惯于把 19 世纪 70 年代 Jevons 和 Walras 极力倡导并且实行以数学推理作为经济理论研究的惟一方法，当作数理经济学与经济学的数理学派的正式形成；而把此后到 20 世纪初，英国 F.Y. Edgeworth (1845—1926)、A. Marshall (1842—1924)、美国 I. Fisher (1867—1947)、意大利 V. Pareto (1848—1923) 等在经济学里进一步运用数学推理当作这个学科和学派的发展。

首次提出数理经济学名称的是 Jevons，而不是 Cournot。尽管如此，人们仍将 Cournot 看作数理经济学的奠基人。Cournot 采用的书名用意不仅在于理论研究，而且在研究中要运用数学分析的形式和符号，在此书中，Cournot 创立了价格决定理论，这一理论已成为现代经济博弈论的重要组成部分。Cournot 认为，在财富理论研究中，运用数学分析不是非导向数学计算不可；光靠理论，即使使用符号和公式也确定不了价值的大小；但运用数学分析，就可以探索不能用数字表现的数量之间的关系和不能用代数表现的函数之间的关系；即使不使用精确数字，只要能更简明地陈述问题、开辟研究途径、避免偏离主题，数学是很有其用的；仅仅因为部分读者不熟悉或怕用错而拒绝数学分析，是极其荒谬的。

Jevons 在 1862 年发表的题为《略论政治经济学的一般数理学