機鉗工數學

機 鉗 工 數 學

張 德 學 編

工 學 書 店 印行

出版者的話

本書主要是介紹三角學的基本理論和這些理論在工廠機鉗工方面的實際問題上的應用，全書計分：代數學初步，幾何圖形，角，平面幾何學裏的基本定理，圓，三角函數，三角函數在機鉗工方面的應用等編，每編後均列練習問題，書後並附有答案，以供讀者練習對照，關於三角函數應用部份，設有機鉗工方面實例多則，均詳加演算，這是一本理論連繫實際的數學書。

本書可供機鉗工工作者應用，就是數學水平較低或對代數、幾何、三角不熟悉的同志，如依次學習也可了解三角學在機鉗工方面的運用。

機鉗工數學

編者：　張德學

書號 1038　　$787\times1092^{1}/_{32}$　　119 千字　　$6^{1}/_{16}$ 印張　　定價：0,96 元

出版者：工學書店
北京市書刊出版業營業許可證出字二九號

發行者：工學書店
北京西交民巷察兒胡同12號

排版者：北京市印刷二廠
北京宣內佟麟閣路71號

印刷者：華義印刷廠
北京鬧市口30號

1955 年4月第一版(平裝)　　1955 年4月第1次印　　1——1,000 冊

目　　錄

第一編　代數學的初步

1.　**代數學的概念**　代數也是討論或計算數字問題的一種科學，和算術略有同樣的性質，不過在研究問題以及運算方法上面，都比算術的前進了一步。能使運算方面簡捷便利，同時還能使問題的解決得到普遍性使研究深入一步，更能幫助人們的記憶及理解，是在修完算術的基礎上來學習這種科學的。在算術的基本運算方法以外，主要的有下面幾點特徵：

a．討論了數的方向也就是擴大了數的討論範圍，增闢了一種負數。

b．利用文字代表數字，使得問題的研究得到普遍性更能導致於深入。

c．成立了代數方程式，使得運算方法簡便。

本編的目的是為了給後面的三角計算問題打下運算的基礎，所以下面把代數學的這些基本特徵都簡略的加以說明，以求能掌握初步的代數學的運算。

2.　**負數**　在算術裏我們所討論過的數都比零大，最小的才是零，沒有比零更小的數值了。比如拿減法來說，減數不可能比被減數大，最大時也不過和被減數相等，使得餘數等於零。但在代數學上就能夠計算這些不够減的問題。比如拿 25—30 來說，在算術裏是不能算了，但是我們可以把它分析一下，知道被減數比減數小 5，也就是由 25 裏減去 30 不但沒有餘數反而虧 5

個。所以我們也可以這樣寫即

$$25-30=\text{不足 }5$$

或 $$25-30=\text{虧 }5$$

這個不足或虧的字樣，代數學裏就規定了用符號"－"來代表，把它寫在數字的前面讀做負．即

$$25-30=-5$$

"－5"讀做負 5，意思就是說不但沒有餘數反而虧了 5 個。這樣前面帶"－"符號的數代數學裏就叫做負數．又爲了和比零大的數相區別起見，乃把這些比零大的數前面加上一個"＋"符號稱爲正數讀做正。根據這負數的性質我們可以說:

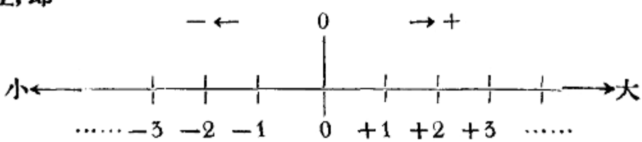
凡正數都比零大，凡負數都比零小，凡正數都比負數大，零本身沒有正負的區別。

在代數學裏把這些正數、零及負數統叫做代數數，前面所加的符號"＋"或"－"是區別數的性質的，所以叫做性質符號．假設不考慮數的性質亦即不考慮它的正或負，只研究它的數值多少時，叫做該數的絕對值。用符號"| |"來代表。

例如 ＋5 的絕對值是 5， －8 的絕對值是 8

也可寫做 $|+5|=5$ $|-8|=8$

再詳細一點說，可把這些數的數值按大小順序排列在一條線上，即



這樣表示數的線，我們把它叫做數軸。

因此我們又可得到下面的結論：即

同是正數，絕對值大的數值也愈大。

同是負數，絕對值大的數值反愈小。

根據數軸的排列情況，我們可以說正負數是代表性質相反或方向相反的兩種量，即某一種性質或方向的量用"＋"號表示時，那麼和它性質或方向相反的量就可用"－"號來代表。但是必須有一個起點也就是標準點，這個點就是無數值大小的零點。比如：

（i）有錢用＋　　　負債便用－

（ii）前進用＋　　　後退便用－

（iii）右轉用＋　　　左轉便用－

（iv）向東用＋　　　向西就用－

（v）上昇用＋　　　下降就用－

（vi）0°C 以上用＋　　以下就用－

……………………………………

由此我們可以看出，算術裏的數只有數值的大小而沒有方向，代數學的數就把這方向考慮進去了。但在我們周圍的量，不是所有量都有它的正和負，比如面積和體積就只有正而沒有負。

3. **正負數的加減乘除算法**　既然代數數包括了正數、零及負數，所以我們就要先討論一下包括了這些數字的加減乘除四則算法和算術裏的運算方法有什麼不同，以下順序來加以說明：

a. 加法　加法可分成下面四種來討論它:

（i）正數加正數　（ii）負數加負數

（iii）負數加正數　（iv）正數加負數

（i）正數加正數　正加正本是算術裏的加法，不過多加上一個"＋"號是了，所以運算方法仍舊不變。

例如　$(+3)+(+5)$　也就是算術裏的 $3+5$

所以我們說　$(+3)+(+5)=8=(+8)$

不妨拿工作中的絲槓來作比喻說明一下：設正轉用"＋"號表示，那麼反轉就應當用"－"號表示。$+3$ 表示正 3 轉，$+5$ 乃表示正 5 轉，所以兩次相加的結果就正等於正轉 8 轉也就是 $+8$。

（ii）負數加負數　比如第一次絲槓反轉 3 轉第二次反轉 5 轉，那麼兩次相加的結果就應等於反轉的 8 轉，即

$$(-3)+(-5)=(-8)$$

根據上兩項的計算結果看來，可得出下面的結論：

同號相加時，號不變，只絕對值相加。

【例】　$(+17)+(+15)=+(17+15)=+32$

【例】　$(-100)+(-37)=-(100+37)=-137$

（iii）正數加負數　如第一次正轉 3 轉，第二次反轉 5 轉時，那麼兩次相加的結果當等於反轉的 2 轉，所以我們說：

$$(+3)+(-5)=(-2)$$

（iv）負數加正數　如第一次反轉 3 轉，第二次正轉 5 轉時，那麼兩次相加的結果當等於正轉的 2 轉。所以我們說：

$$(-3)+(+5)=(+2)$$

根據這兩項的結果，又可得到下面的結論：

異號相加時，求絕對值的差（由大減小）用大絕對值上的符號。

【例】$(+45)+(-20)=+(45-20)=+25$

$(+18)+(-30)=-(30-18)=-12$

$(-50)+(+70)=+(70-50)=+20$

$(-60)+(+20)=-(60-20)=-40$

b. **減法** 正負數間的減法，都可變成加法來計算。變換的道理及方法如下：

再拿絲桄作比喻來說，比如第一次正搖了5轉，但因發覺搖過度，要想再減下去2正轉使結果正好等於3正轉時，那麼我們就可在正5轉的基礎上再多搖（加上）2反轉，這樣的結果是一樣的。所以我們說：

$$(+5)-(+2)$$
$$=(+5)+(-2)=(+3)$$

又若第一次反搖5轉，要想減去2反轉使等於3反轉時，也可以在5反轉的基礎上再多搖（加上）2正轉，結果也是一樣的。所以我們說：

$$(-5)-(-2)=(-5)+(+2)=(-3)$$

根據這兩個例子，就得出減法的一般規律是：

變減法爲加法，減正變加負，減負變加正。

然後就可以本着加法的規律來計算了。

【例】$(+120)-(-50)=(+120)+(+50)=+170$

$(-80)-(+20)=(-80)+(-20)=-100$

$(-70)-(-25)=(-70)+(+25)$

$=-(70-25)=-45$

$(-15)-(-28)=(-15)+(+28)$

$=+(28-15)=+13$

所以說正負數任意二數的差都能寫成和的型式，任意的和也都能用差的型式來代替。

例如　$8-5$ 能寫成　$8+(-5)$，

而 $6+7$ 能寫成　$6-(-7)$

所以順序加減的一切代數式，都可以寫成加法的型式。例如

$20+5-6-2=20+(+5)+(-6)+(-2)$

根據這個例子看來，可以看出凡是式裏的減號都可變成減數的性質符號再來和被減數相加，這種方法叫做代數加法。加數可能是正數、負數或零。它們的和就叫做代數和。

c.　乘法　正負數相互間的乘法，也有下面四種情形：

(i) 正數乘正數　　　(ii) 負數乘正數

(iii) 正數乘負數　　　(iv) 負數乘負數

(i) 正數乘正數　正數乘正數本也是算術裏的乘法，所以乘積仍是正數。

如　　$(+6)\times(+8)=6\times8=+48$

因此我們說：正乘正仍得正，只絕對值相乘。

(ii) 負數乘正數　拿 $(-3)\times(+5)$ 來說，它表示有 5

個負 3, 所以若改用加法來計算時, 能得出

$$(-3)\times(+5)=(-3)+(-3)+(-3)+(-3)+(-3)=-15=-(3\times 5)$$

所以我們說: 負乘正得負, 只絕對值相乘。

【例】 $(+25)\times(+4)=+(25\times 4)=+100$

$(-5)\times(+8)=-(5\times 8)=-40$

(iii) 正數乘負數　我們已經知道, 乘數和被乘數是可以互相變換位置的, 如 $2\times 3=6$ 那麼變換以後, 3×2 也等於 6。因此這種乘法若變換一下就和 (ii) 項理負乘正的情形一樣了。所以我們說:

正乘負得負, 只絕值相乘。

【例】 $(+3)\times(-9)=(-9)\times(+3)$

$=-(9\times 3)=-27$

(iv) 負數乘負數　在研究負乘負的問題以前, 我們先要了解一個另外的問題, 就是乘法的分配定律。利用這個定律再導出負乘負的規律來。

如有人第一次買米 8 斤每斤 1500 元, 第二次又買 6 斤每斤也是 1500 元, 問他共化了多少錢?

這個問題我們可以從二方面來計算它。即

第 1 法　把斤數加在一起再合成錢數, 即

$(8+6)\times 1500=14\times 1500=21000$ 元

第二法　把二次的斤數分別合成錢數再加起來。即

$8\times 1500+6\times 1500=12000+9000=21000$元

因由這二種方法計算的結果是一樣的，所以我們可以說:

$$(8+6)\times 1500=8\times 1500+6\times 1500$$

根據這個例題，我們可以得出下面的規律來:

二數的和乘某數，等於二數乘某數的和。

又如某人有 5000 元的人民幣 20 張，後因需要用掉了 5 張，問他還剩多少錢?

這個問題也有兩種不同的運算方法:

第一種　把張數減下去再合成錢數。即

$$(20-5)\times 5000=15\times 5000=75000$$

第二種　把張數各別合成錢數再相減，即

$$20\times 5000-5\times 5000=100000-25000=75000$$

因由這兩種方法計算的結果是一樣的，所以我們可以說:

$$(20-5)\times 5000=20\times 5000-5\times 5000$$

因此就得出下列的規律來:

二數的差乘某數，等於二數乘某數的差。

上面是只按正數來舉例證明的，若按負數計算時，結果也是一樣。如

$$(3+5)\times(-2)=8\times(-2)=-16$$

那麼　$3\times(-2)+5\times(-2)=-6+(-10)$

$$=-16$$

所以這兩個規律，叫做乘法的分配定律。

下面再回到我們所要討論的負乘負的問題，

如有　$(-5)\times(-8)$ 的計算題，我們可以根據負數的

定義把其中的任何一個負數任意變換一下，如變換 (-5) 時，就可以把 (-5) 隨意改作

$$(-5)=(5-10)$$

所以 $\quad (-5)\times(-8)=(5-10)\times(-8)$

利用分配定律得 $\quad =5\times(-8)-10\times(-8)$

$$=(-40)-(-80)$$

$$=(-40)+(+80)$$

$$=+40=+(5\times 8)$$

因此就得出負乘負的規律如下:

負乘負變成正，絕對值相乘。

【例】 $(-7)\times(-6)=+(7\times 6)=+42$

【例】 $(-50)\times(-40)=+(50\times 40)=+2000$

再綜合以上的四種不同情況，得出下面的一般規律:

同號相乘得正，絕對值相乘。

異號相乘得負，絕對值相乘。

d. 除法　因除法和乘法有連帶的關係，乘法反過來就是除法，即因

$$\text{被乘數}\times\text{乘數}=\text{積數}$$

反過來得 $\quad \text{積數}\div\text{乘數}=\text{被乘數}$

利用這種關係及前面的乘法規律，就能找出除法的一般規律來。即因

$$(+3)\times(+5)=+15$$

所以 $\quad (+15)\div(+5)=+3$

$$(+3)\times(-5)=-15$$

所以 $$(-15)\div(-5)=+3$$

$$(-3)\times(+5)=-15$$

所以 $$(-15)\div(+5)=-3$$

$$(-3)\times(-5)=+15$$

所以 $$(+15)\div(-5)=-3$$

故得出除法的一般規律如下:

同號相除得正,絕對值相除。

異號相除得負,絕對值相除。

【例】 $(+40)\div(+10)=+[40\div10]=+4$

$(+150)\div(-30)=-[150\div30]=-5$

$(-320)\div(+40)=-[320\div40]=-8$

$(-480)\div(-60)=+[480\div60]=+8$

4. 連乘和連除法 根據乘法或除法的規律看來,知道在二個數的乘法或除法之中,有一個是負數則結果就是負數,二個都是負數的話,那麼結果就變成了正數。所以在正負數的連乘法或連除法中,我們可以根據負數的個數來決定乘積或商的正負,它的規律是未演算前負數的個數是奇數時,則結果是負,偶數時結果變爲正。

【例】奇數 $(-2)\times(-6)\times(3)\times(-4)$

$=-[2\times6\times3\times4]=-144$

偶數 $(-120)\times(20)\div(-60)\div(-2)\times(-3)$

$=+[120\times20\div60\div2\times3]$