姜迺斌　译
周茂青　校订

微积分学丛书

中值定理

大连工学院出版社

中值定理

〔日〕栗田 稔著

姜乃斌 译　　周茂青 校订

大连工学院出版社

内 容 提 要

本书是根据日本共立出版株式会社出版的数学丛书《ワンポイント》的第二册1985年第五版译出的。内容包括中值定理的意义、应用，证明及中值定理的推广等四章。该书层次清晰，论证严密、透彻，并配有新颖的例题和习题，书末附有习题答案和提示。

读者对象：大中专院校师生，自学青年和数学爱好者。

くりた みのる

栗 田 稔

数学ワンポイント双书 2

「平均值の定理」

中 值 定 理

Zhongzhi DingLi

姜乃斌 译　　周茂青 校订

大连工学院出版社出版发行　　辽宁省新华书店经销

（大连市甘井子区凌水桥）　　大连凌山印刷厂印刷

开本：787×1092　1/32　印张：3　字数：60千字

印数：0001－5000册

1987年9月第1版　　1987年9月第1次印刷

责任编辑：凌 子　　封面设计：羊 戈

责任校对：田 溪

统一书号：13400·11　ISBN 7-5611-0031-9/O·3

定价：0.48元

序　言

中值定理是构成微积分理论的最重要的定理，它的应用是极其广泛的。现在，高中的数学也讲这个定理，在大学的理科专业中，通常在一年级都要重新深入地学习这个定理。

中值定理本身是简明的，但是，要理解它在微积分的理论中是如何有机地起作用，这对每一个学生来讲是很困难的。另外，中值定理的应用是多方面的，而且，定理的证明必须从实数的基础知识开始，所以需要相当高的数学修养和较强的思考能力。

基于这些原因，在这里，我们把中值定理作为主题，并按

定理的意义——→应用——→证明

的顺序作了非常仔细的讲解。在数学书中，通常是按照

定理——→证明——→应用

顺序进行的，但是，由于中值定理的证明较难，所以改成上述顺序进行讲解（现在，在高中都不证明）。在本书的末尾我们讲述了定理的推广和积分学中的中值定理。

我的心愿是，这本书对广大读者掌握微积分学中的这个定理的意义能有所帮助，而且为有信心地学好微积分助一臂之力。这不仅是著者的心愿，而且也是这套丛书的计划和参加编辑的每一位的本旨。

栗田　稔

1976 年 9 月

目　　录

第一章　中值定理的意义

中值定理是表示一元函数平均变化率与瞬时变化率（导数）之间的联系。下面就详细地说明这个问题。

§1.1　变化率

当变量 x 取实数值变化时，相应地变量 y 的值也随着变化，这就是

“y是x的函数”

这个定义的起因。但是，也有当变量 x 的值变化时变量 y 的值保持不变的情形，因此，我们就把这种情形也包括在内，作出如下的定义：

> “设有两个变量 x 与 y。如果当变量 x 取定一个数值时，变量 y 总有确定的数值和它对应，则变量 y 叫做变量 x 的函数，记作
>
> $$y=f(x),$$
>
> 这里，假定 y 也取实数值。”

在研究函数值的变化情况时，研究

“y值的变化对于x值的变化的比率”

是很重要的。当 x 的数值从 a 变到 b 时，y 的数值的变

化是 $f(b)-f(a)$，而

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

则是 y 在这一段的平均变化率。

现在，把 a 的数值固定，变动 b 的数值，使 b 的数值逐渐地接近于 a 时，来观察平均变化率的变化情况。把 b 改写为 x 考察极限

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

这个极限是不一定存在的，如果这个极限存在，就把它看作是

"$f(x)$在 $x=a$ 处的瞬时变化率"

并把它叫做 $f(x)$在 $x=a$ 处的导数，记作 $f'(a)$。即

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

例 1 当 $f(x)$ 为 x 的 1 次函数时，设

$$f(x)=px+q$$

则 $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(pb+q)-(pa+q)}{b-a}=p,$$

这表示 1 次函数的平均变化率与 a，b 无关，是一个常数。于是

$$f'(a)=p.$$

例 2 当 $f(x)$ 为 x 的 2 次函数时，设

$$f(x)=px^2+qx+r,$$

则

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(pb^2+qb+r)-(pa^2+qa+r)}{b-a}$$

$$=\frac{p(b^2-a^2)+q(b-a)}{b-a}$$

$$=p(b+a)+q,$$

于是

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}[p(x+a)+q],$$

$$f'(a)=2pa+q.$$

习题 1　仿照例 1，例 2 的方法，证明下列各题。

（1）$f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ 时，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=p(b^2+ba+a^2)+q(b+a)+r.$$

$$f'(a)=3pa^2+2qa+r.$$

（2）$f(x)=\dfrac{1}{x}$ 时，　$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=-\dfrac{1}{ba}$，

$$f'(a)=-\frac{1}{a^2}.$$

注，在例 1，例 2 及习题 1 中，我们都是先求平均变化率，再利用平均变化率求出瞬时变化率（导数），但是，一般求导数 $f'(a)$，正象大家所熟悉的那样，可先利用导数公式求出 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$，再令 $x=a$ 即可。

1.1.1　变化率的几何意义

在函数 $y=f(x)$ 的图形中，平均变化率

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

及 $f(x)$ 在$x=a$ 处在导数 $f'(a)$ 具有什么意义？现在就

来研究这个问题。

假设在函数 $y=f(x)$ 的图形上，对应 $x=a$ 和 $x=b$ 的两点分别为 A, B, 则A, B 的坐标分别为 $(a, f(a))$, $(b, f(b))$,

平均变化率 $m=$ 直线 AB 的斜率。

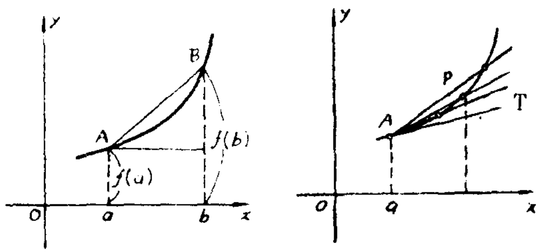

图 1.1

下面再来看

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

的意义。首先，在 $y=f(x)$ 的曲线上取点 $A(a, f(a))$和任意点 $P(x, f(x))$，那末直线 AP 的斜率为

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

当 $x\to a$ 时，点 P 沿着曲线逐渐地接近于 A, $f'(a)$存在时，直线 AP 接近于通过点 A 以 $f'(a)$ 为斜率的直线 AT。直线 AT 就是这条曲线在点 A 所引的切线（图1.1)。

这就说明了

$f'(a)=$ 曲线上 A 点处的切线斜率。

例 根据 §1.1 中的例 2，对于函数

$$f(x)=x^2$$

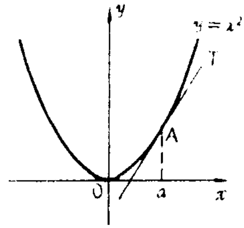

图 1.2

$f'(a)=2a$，所以，在 $y=x^2$ 的曲线上，点 (a, a^2) 处的切线斜率为 $2a$（图 1.2）。

习题 2 试用上面的方法，求曲线 $y=x^2$ 在 $x=1$ 处的切线的斜率。

1.1.2 平均变化率与导数的关系

我们来研究函数 $y=f(x)$ 当 x 从 a 变到 b 时的平均变化率与导数的关系。

首先，我们在 §1.1 中的例 1 中已经看到，1 次函数的平均变化率恒为一常数，所以其导数也是这个常数。对于 2 次函数可以得出如下的结果。

例 1 $f(x)=px^2+qx+r \quad (p\neq 0)$

根据 §1.1 中的例 2

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=p(a+b)+q.$$

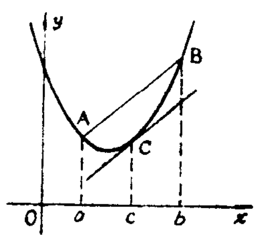

图 1.3

另外，对于任意 x

$$f'(x)=2px+q$$

从 m 与 $f'(x)$ 的关系可以看出 m 正是 $f'(x)$ 在 $x=\frac{a+b}{2}$ 时的值。也就是说，令 $c=\frac{a+b}{2}$，则

$$m=f'(c).$$

把这一事实用 $y=f(x)$ 的图形加以说明的话，就是假设曲线上对应 $x=a$, b 的两点分别为 A, B，则

"AB 的斜率与曲线上点 C 处的切线斜率相等"（图 1.3）。

例 2 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$

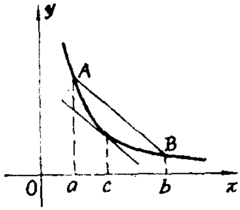

图 1.4

根据§1.1 中的习题 1（2）

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=-\frac{1}{ab}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

因 $x>0$，所以，对于 $c=\sqrt{ab}$ 的 c 值

$$m=f'(c).$$

例 3 $f(x)=x^3$

根据§1.1 中的习题 1（1）

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=a^2+ab+b^2$$

$$f'(x)=3x^2$$

当 $c=\pm\sqrt{\dfrac{a^2+ab+b^2}{3}}$ 时，

$$m=f'(c).$$

通过例 1，例 2，例 3 可以看出，对于给定的 $x=a$，b，存在 $x=c$，使得

对于

$$m=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}，有\ m=f'(c), \qquad (1)$$

在上面三个例子中，C 值分别为

$$c=\frac{a+b}{2},\quad c=\sqrt{ab},\quad c=\pm\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}.$$

容易看出，这些 c 值中的前两个当

$$a<b \text{ 时，} a<c<b. \tag{2}$$

对于第三种情形（$f(x)=x^3$），令

$$k=\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}$$

则 $$k^2-a^2=\frac{(b-a)(2a+b)}{3},\quad b^2-k^2=\frac{(b-a)(a+2b)}{3}$$

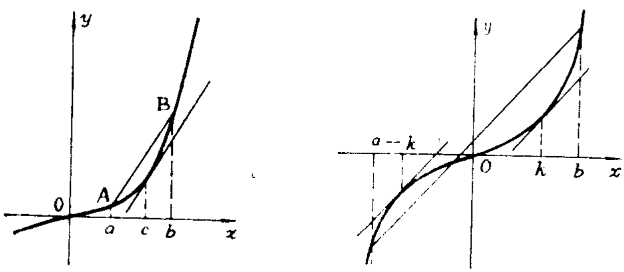

图 1.5

所以，假定 $a<b$，

当 $a>0$，$b>0$ 时，取 $c=k$，则 $a<c<b$，

当 $a<0$，$b<0$，时，取 $c=-k$，则 $a<c<b$，

对于 $a\leqslant 0$，$b\geqslant 0$ 的情形，

当 $b>-\frac{a}{2}$时，取 $c=k$，则 $a<c<b$，

当 $b<-2a$ 时，取 $c=-k$，则 $a<c<b$，

因此，当 $-2a>b>-\frac{a}{2}$时，k，$-k$都是所求的 c。

通过这些例题可以看出，对于给定的函数 $f(x)$ 和给

定的 $x=a$, b,

"满足（1），（2）的 c 值是存在的"

这就是本书所要讨论的主题——中值定理 (mean value theorem)。

§1.2 中值定理

表示函数的平均变化率与瞬时变化率（导数）之间的关系是下面的中值定理。其中

区间 $[a, b]$ 表示 $\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$（闭区间）

区间 (a, b) 表示 $\{x|a<x<b\}$（开区间）(图 1.6)

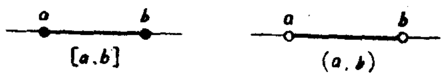

图 1.6

定理 1 （中值定理）如果函数 $f(x)$

(i) 在区间 $[a, b]$ 上连续

(ii) 在区间 (a, b) 内可微

则存在数 c，使等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b)$$

成立。

用函数 $y=f(x)$ 的图形来讲，也就是当曲线上对应

$x=a$，$x=b$ 的两点为 A，B 时，在曲线上存在点 C，使得

"C 处的切线平行于直线 AB"（图 1.7）

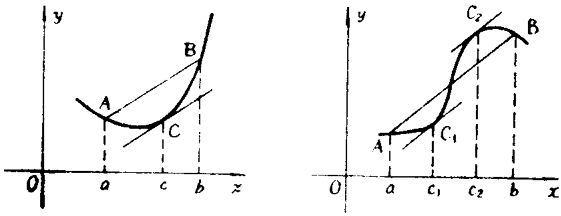

图 1.7

由图 1.7 中右图也可以看出，中值定理中的数值 c（用图形来讲就是点 C），对于给定的 a，b 不一定就只有一个。这个定理只是强调 c 的存在，并没有讲有几个。

在中值定理里，条件（i），（ii）是分开的，乍看起来是复杂的。如果把这两个条件换成

"$f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微" (1)

条件（ii）当然成立，条件（i）也成立。这是因为

"$f(x)$在 $x=x_1$ 处可微时 $f(x)$在 $x=x_1$处连续"。

这可以由

$$\lim_{x\to x_1}(f(x)-f(x_1))=\lim_{x\to x_1}\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}(x-x_1)$$

$$=f'(x_1)\cdot 0=0$$

容易看出。

但是，如果把条件（i），（ii）换成（1）的话，对函数

$$f(x)=\sqrt{(b-x)(x-a)}$$

来说，中值定理就不能适用，因为这个函数不满足条件（1）（图 1.8）。实际上，这个函数在 $x=a$ 及 $x=b$ 处是不

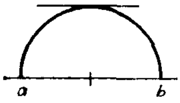

图 1.8

可微的（相当于其导数是 $\pm\infty$）。

容易验证，这个函数满足条件（i），（ii），所以，对这个函数中值定理成立。

中值定理的各种形式

在中值定理的公式

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \qquad (a<c<b) \qquad (1)$$

中，调换左端的 a 与 b 的位置，公式照样成立。因此，如果我们也考虑 $a>b$ 的情形，那么括弧里的条件 $a<c<b$ 改成

"c 是 a 与 b 之间的某个值"

即可。消去（1）的分母，得 $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$ （c 是 a 与 b 之间的值）（2）

如果设

$$\frac{c-a}{b-a}=\theta$$

则

$$c=a+(b-a)\theta,$$

c 位于 a 与 b 之间的这个条件就变成

$$0<\theta<1.$$

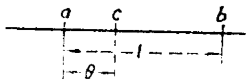

图 1.9

再设

$$b-a=h$$

则 $$b=a+h,\ c=a+\theta h,$$

（2）变成如下的形式

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\theta h)\qquad(0<\theta<1)$$

此式还可以写成

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a+\theta h)\qquad(0<\theta<1).$$

中值定理的这种形式也经常被用到。

在这里所引用的文字 θ，一般是个较复杂的数字，但是，对于到目前我们所研究的函数来讲，它是如下的数值。

例 1 $f(x)$为 2 次函数时，恒有$\theta=\dfrac{1}{2}$。

例 2 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$，在 $[a,b]$ 上考察这个函数时

$$\theta=\frac{c-a}{b-a}=\frac{\sqrt{ab}-a}{b-a}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}.$$

例 3 $f(x)=x^3$，在 $[a,b]$ $(a>0)$ 上考察这个函数时，$c=\sqrt{(a^2+ab+b^2)/3}$，

$$\theta=\frac{c-a}{b-a}=\frac{c^2-a^2}{(b-a)(c+a)}=\frac{1}{3}\frac{(-2a^2+ab+b^2)}{(b-a)(c+a)}$$

$$=\frac{b+2a}{3(c+a)}$$

§1.3 中值定理的特性

在中值定理里，只是强调满足等式

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c) \quad (a<c<b)$$

的 c 存在，至于说 c 值本身并不是这个定理所要研究的问题。

在初等数学里，象求一次方程或二次方程的解（根）那样，我们着眼点是求出具有某种性质的东西（如数、函数等）。但是在稍微进一步的数学里，即使求不出具有某种性质的东西，确认它的存在也是很重要的。

象这样，强调具有某种性质的东西存在的定理称为存**在定理**。中值定理就是这类存在定理中的一个。

另外，在后面将要讲到的最大值定理也是存在定理，其内容是

"在 $[a, b]$ 上连续的函数 $f(x)$，在该区间上存在取得最大值的点"

关于代数方程，有如下的基本定理

"复系数代数方程

$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n=0 \ (a_0\neq0)$

一定存在复数解（根）"。

另外，还有微分方程的解的存在定理等，在存在定理中，