代　　数

第 三 册

人民教育出版社

代　数

第三册

*

人民教育出版社编辑出版
新华书店北京发行所发行
江苏新华印刷厂印刷

*

1978年2月第1版
1978年6月第1次印刷
书号 13012·0168　定价 0.40元

前　　言

当前，各类业余学校的学生以及广大知识青年，在党的十一大精神鼓舞下，决心为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义的现代化强国，努力学习，把自己培养成为又红又专的社会主义建设人才。为了适应这些学校的学生和广大知识青年学习数学基础知识的需要，我们将一九六六年编写的一套没有正式出版的数学教材，作了一些必要的修改后出版，供各类业余学校选作教材，也可供中等专科学校师生选用和广大知识青年自学之用。

这套书包括《代数》三册、《几何》两册、《三角》一册、《平面解析几何》一册、《微积分初步》一册。

由于这套书编写的时间较久，有些方面可能不适应现在的情况，也难免有缺点和错误，希望读者批评指正。

人民教育出版社

一九七八年一月

目　　录

第十五章　二次函数、指数函数、对数函数

15.1 函数和函数值的记号　我们知道，研究变量间的函数关系，可以了解这些变量间相互依赖的规律，从而利用这些规律解决实际问题。我们已经学过正比例函数、反比例函数、一次函数、在三角里还学过三角函数和反三角函数。在本章中将进一步学习另外几种函数。

为了便于研究各种函数，我们先来说明函数和函数值的记号。

两个变量的函数关系，例如 y 是 x 的某一个函数，通常记作

$$y=f(x),$$

就是：把自变量 x 写在括号的里面，在括号外面写上字母 f 来表示 y 是 x 的某一个函数。

如果我们同时要表示几个不同的函数关系，那么就要在括号外面采用不同的字母来区别它们。例如，当我们同时要研究圆的面积 A 和圆的周长 c 与半径 r 间的关系 $A=\pi r^2$ 和 $c=2\pi r$ 时，因为 A 和 c 是 r 的两个不同的函数，我们就在括号外面采用不同的字母来表示它们，如写成 $A=f(r)$，$c=\phi(r)$。

在函数 $y=f(x)$ 里，当自变量 $x=a$ 时，函数 y 的对应值通常用 $y=f(a)$ 表示。

例 1 (1) 设 $f(x)=\frac{x}{x+1}$，求 $f(0)$，$f(-4)$。

(2) 设 $\phi(x)=\sin x$，求 $\phi\left(\frac{\pi}{4}\right)$。

解 (1) $f(0)=\frac{0}{0+1}=0$，$f(-4)=\frac{-4}{-4+1}=1\frac{1}{3}$。

(2) $\phi\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$。

例 2 设 $F(x)=3x^3-x$，求证 $F(-x)=-F(x)$。

证明 $F(-x)=3(-x)^3-(-x)$

$=-3x^3+x=-(3x^3-x)$。

$\therefore\quad F(-x)=-F(x)$。

15.2 二次函数 我们来看下面的两个函数关系。

(1) 设水流速度是 30 米/分，那么每小时流过水管的水量 y 立方米和水管直径 x 厘米之间的关系是 $y=0.045\pi x^2$。

(2) 宽 a 米、高 b 米的闸门，如果上部 x 米露出水面，下部全在水中，那么闸门所受水的压力 y 吨就是

$$y=\frac{a}{2}x^2-abx+\frac{ab^2}{2}.$$

表示这两个函数关系的解析式都是 $y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的形式。

函数 $y=ax^2+bx+c$ 叫做 x 的二次函数，这里 $a\neq0$。

15.3 二次函数的图象 我们先来作 $y=ax^2$，例如 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象。

1. 列出 x、y 的对应数值表：

x	…	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	…
y	…	8	$4\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$4\frac{1}{2}$	8	…

2. 以这些对应值作为点的坐标，作出各个点.

3. 把这些点连结成光滑的曲线，就得出函数 $y=\frac{1}{2}x^2$ 的图象(图15.1)。

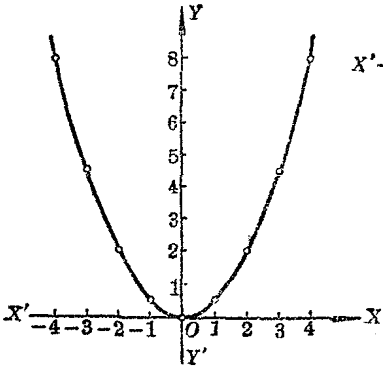

图 15.1

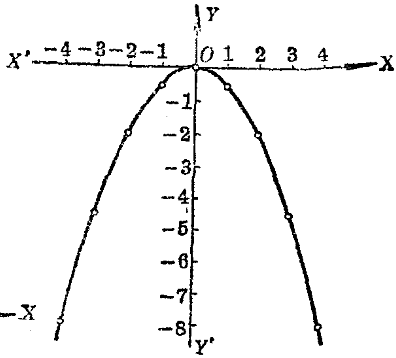

图 15.2

用同样的方法可以作出函数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 的图象(图15.2)。

函数 $y=ax^2$ 的图象是抛物线*.

抛物线 $y=ax^2$ 有下面的一些性质：

1. 因为 $x=0$ 时，$y=0$，所以抛物线 $y=ax^2$ 经过原点.

2. 因为 $x^2\geqslant 0$，并且当 x 的绝对值逐渐增加时，x^2 的值也

* 把物体向前抛射，这物体经过的路线就是一条抛物线.

逐渐增加，所以当 $a>0$ 时，抛物线 $y=ax^2$ 在 x 轴的上方向右和向左无限伸展；当 $a<0$ 时，在 x 轴的下方向右和向左无限伸展.

3. 因为 $(-x)^2=x^2$，所以自变量取绝对值相等而符号相反的两个值时，y 的值相等. 因此抛物线 $y=ax^2$ 关于 y 轴对称.

抛物线的对称轴叫做抛物线的轴，轴和抛物线的交点叫做抛物线的顶点。抛物线 $y=ax^2$ 的顶点是原点 $(0,0)$。

我们知道，一次函数 $y=kx+b$ 的图象可以由正比例函数 $y=kx$ 的图象平行移动而得到. 同样，比较二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 和 $y=ax^2$ 的图象，可以知道，二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象是同 $y=ax^2$ 全等的抛物线，它的顶点的坐标是 (h,k)，轴是经过 (h,k) 并且平行于 y 轴的一条直线. 当 $a>0$ 时，开口向上；当 $a<0$ 时，开口向下. 例如，二次函数 $y=\frac{1}{2}(x+3)^2-2$ 的图象，是同 $y=\frac{1}{2}x^2$ 全等的抛物线，它的开口向上，顶点是 $(-3,-2)$，轴是经过 $(-3,-2)$ 并且平行于 y 轴

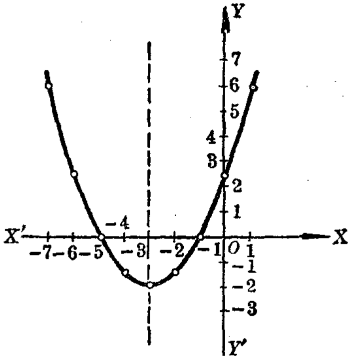

图 15.3

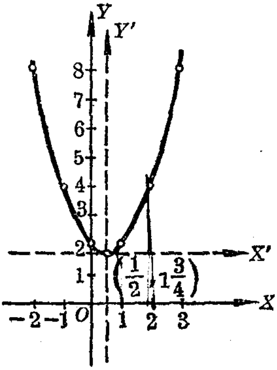

图 15.4

的直线(图15.3)。

例 1 求作函数 $y=x^2-x+2$ 的图象。

解 $y=x^2-x+2=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1\frac{3}{4}$.

因此，抛物线的顶点是$\left(\frac{1}{2},1\frac{3}{4}\right)$，轴是经过$\left(\frac{1}{2},1\frac{3}{4}\right)$并且平行于 y 轴的直线。

对于这个顶点和这条轴，画出同抛物线 $y=x^2$ 全等的抛物线(图15.4)，就得所求作的图象。

为了作图的方便，可以经过$\left(\frac{1}{2},1\frac{3}{4}\right)$画平行于 x 轴和 y 轴的直线，把它们作为新的坐标轴 x' 轴和 y' 轴，然后对于这个新的坐标系作出抛物线 $y'=x'^2$.就得到原坐标系中 $y=x^2-x+2$ 的图象。

一般地，作二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象，可以先把它化成 $y=a(x-h)^2+k$ 的形式，求得抛物线的顶点和轴，然后经过顶点画平行于 x 轴和 y 轴的直线，把它们作为新的坐标系的 x' 轴和 y' 轴，对于这个新的坐标系作出抛物线 $y'=ax'^2$。

例 2 求作函数 $y=-\frac{3}{4}x^2+6x-9$ 的图象。

解
$$y=-\frac{3}{4}x^2+6x-9=-\frac{3}{4}(x^2-8x+12)$$
$$=-\frac{3}{4}(x-4)^2+3.$$

因此，抛物线 $y=-\frac{3}{4}x^2+6x-9$ 的顶点是(4,3)，轴是经过

(4,3)并且平行于 y 轴的直线(图15.5)。

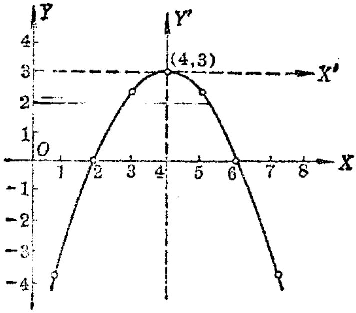

图 15.5

经过(4 3)画平行于 x 轴和 y 轴的直线，把它们作为新的坐标系的 x' 轴和 y' 轴，对于这个新的坐标系作出抛物线 $y'=-\frac{3}{4}x'^2$，就得所求作的图象。

15.4 二次函数的极值 从上节例 1 的抛物线 $y=x^2-x+2$ (图15.4)可以看到顶点$\left(\frac{1}{2},1\frac{3}{4}\right)$的纵坐标$1\frac{3}{4}$，比抛物线上邻近顶点的点的纵坐标都小．这就是说，当 $x=\frac{1}{2}$时，函数 $y=x^2-x+2$ 的对应值$1\frac{3}{4}$，比 x 略大于$\frac{1}{2}$和略小于$\frac{1}{2}$时 y 的对应值都小。我们说，在 $x=\frac{1}{2}$时函数 $y=x^2-x+2$ 有极小值$1\frac{3}{4}$．同样，从上节例 2 的抛物线 $y=-\frac{3}{4}x^2+6x-9$(图15.5)可以看到，当

$x=4$ 时，函数 $y=-\frac{3}{4}x^2+6x-9$ 的对应值 3 比 x 略大于 4 和略小于 4 时 y 的对应值都大。我们说，在 $x=4$ 时，函数 $y=-\frac{3}{4}x^2+6x-9$ 有极大值 3。极大值和极小值总称极值。

如果在 $x=a$ 时函数 $f(x)$ 的值，比 x 略大于和略小于 a 时函数 $f(x)$ 的值都小，我们就说在 $x=a$ 时函数 $f(x)$ 有极小值 $f(a)$；如果在 $x=b$ 时函数 $f(x)$ 的值，比 x 略大于和略小于 b 时函数 $f(x)$ 的值都大，我们就说在 $x=b$ 时函数 $f(x)$ 有极大值 $f(b)$。

因为实数的平方不小于零，所以二次函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的极值是：

如果 $a>0$，那么在 $x=h$ 时，$y=a(x-h)^2+k$ 有极小值 k；如果 $a<0$，那么在 $x=h$ 时，$y=a(x-h)^2+k$ 有极大值 k。

这从函数 $y=a(x-h)^2+k$ 的图象上也可以看得出来。

对于二次函数来说，极小值或极大值也就是自变量取所有实数值时，函数所能取得的最小值或最大值。

例 1 求下列函数的极值：

(1) $y=x^2+4x+7$；(2) $y=6+5x-x^2$。

解 (1) $\because\ y=x^2+4x+7=(x+2)^2+3$，

又 x^2 的系数大于 0，

$\therefore$ 在 $x=-2$ 时，y 有极小值 3.

(2) $\because\ y=6+5x-x^2=-\left(x^2-5x+\frac{25}{4}\right)+6+\frac{25}{4}$

$$=-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+12\frac{1}{4}.$$

又 x^2 的系数小于 0，

$$\therefore\quad 在 x=2\frac{1}{2}时，y 有极大值 12\frac{1}{4}.$$

例 2 以初速 $v_0=600$ 米/秒，从仰角 $\theta=30°$ 的炮身射出的炮弹的高度(米)是 $y=-\frac{1}{54000}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}x$(图15.6)，求它达

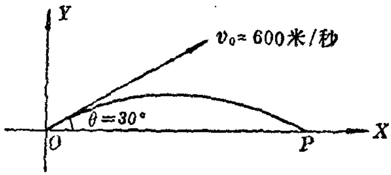

图 15.6

到的最高度(空气阻力不计)。

解 求炮弹达到的最高度，就是求函数 y 的极大值。

$$y=-\frac{1}{54000}x^2+\frac{1}{\sqrt{3}}x=-\frac{1}{54000}(x^2-18000\sqrt{3}x)$$

$$=-\frac{1}{54000}(x-9000\sqrt{3})^2+4500.$$

在 $x=9000\sqrt{3}$ 时，y 有极大值 4500。

答：炮弹达到的最高度是 4500 米。

例 3 一个生物小组的学生准备用篱笆在校园中靠墙围出一块矩形地来种植蔬菜新品种，因为矩形地一边靠墙，只有三边要篱笆。现有的材料可以筑 36 米长的篱笆，怎样围法才能使所围成的面积最大(图15.7)?

解 设篱笆的宽是 x 米，所围矩形的面积是 y 平方米。那么篱笆的长是$(36—2x)$米，因此

$$y=x(36-2x).$$

矩形的面积 y 是宽 x 的函数。现在的问题，就是求自变量 x 是什么值时，函数 y 达到极大值.

$$\begin{aligned} y&=x(36-2x)=36x-2x^2\\ &=-2(x^2-18x)\\ &=-2(x-9)^2+162. \end{aligned}$$

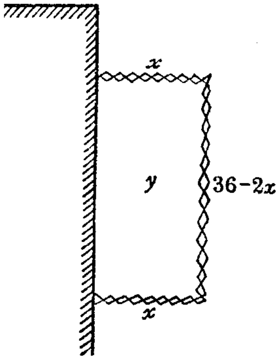

图 15.7

在 $x=9$ 时，二次函数 y 有极大值 162. 就是说，当这篱笆的宽是 9 米时，围成的矩形面积达到极大值 162 平方米.

答：矩形宽 9 米、长 18 米时，围成的面积最大。

在生产中，经常要研究怎样使效率最高、用料最省，这些都是极值问题. 从上面的例 3 可以看到，如果问题中的函数关系是二次函数，就可以利用上述的方法来解决。

15.5 一元二次方程的图象解法 我们知道，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，可以从 $y=ax^2+bx+c$ 的图象和 x 轴的交点的横坐标得出。但是，用下面的方法来解更为简便。

一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 可以变形成：

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0,$$

就是

$$x^2=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a},$$

所以方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，就是函数 $y=x^2$ 和 $y=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$ 的值相同时自变量 x 的值，由此可知，方程 $ax^2+bx+c=0$ 的实数根就是抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=-\frac{b}{a}x-\frac{c}{a}$ 交点的横坐标.

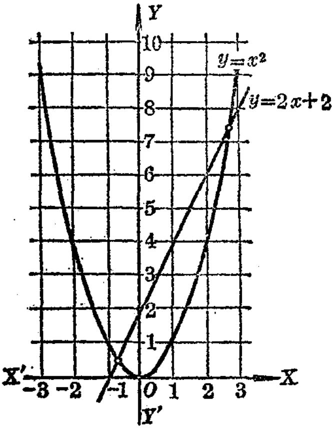

图 15.8

例如，要解方程 $x^2-2x-2=0$，我们对于同一坐标系，作出抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=2x+2$（图15.8），它们的两个交点的横坐标约等于 2.7 和 -0.7，从而求得方程 $x^2-2x-2=0$ 的两个根是：

$$x_1\approx 2.7,\quad x_2\approx -0.7.$$

利用这种方法解一元二次方程时，只要预先精确地作出函数 $y=x^2$ 的图象，再在上面作一条直线（也可以用直尺的边缘来代替这条直线），就可以求得方程的实根的近似值。

例 利用图象解方程 $2x^2-6x+3=0$（精确到0.1）。

解 原方程可以化成 $x^2=3x-\frac{3}{2}$。对于同一坐标系，作抛物线 $y=x^2$ 和直线 $y=3x-\frac{3}{2}$（图 15.9） 这直线和抛物线 $y=x^2$ 有两个交点，它们的横坐标（精确到 0.1）分别是 2.4 和 0.6，因此，

$x_1 \approx 2.4, x_2 \approx 0.6$.

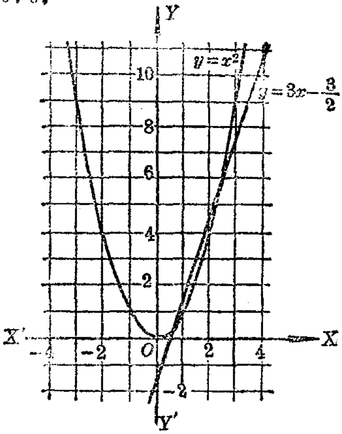

图 15.9

习题五十六

1. 已知 $f(x)=\frac{2x+1}{x-2}$，求 $f(3)$、$f(-4)$、$f(0)$、$f\left(-\frac{1}{2}\right)$、$f(\sqrt{2})$、$f(a^2+3)$的值.

2. 已知 $F(x)=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+1}$，求 $F(0)$、$F(1)$、$F(2)$、$F\left(\frac{1}{3}\right)$的值.

3. 已知 $\phi(x)=x^2$，计算：

(1) $\phi(4)-\phi(3)$；　　(2) $\phi(a+1)-\phi(a)$.

4. 已知 $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$，求 $f(-x)$、$f(x+1)$、$f(x)+1$、$f\left(\frac{1}{x}\right)$、$\frac{1}{f(x)}$。

5. 用解析法表示下列函数关系，说明各是什么函数关系：

(1) 现在的产量为 a，每年产量增加 $x\%$，求 2 年后的产量 y 和 x 之间的关系；

(2) 矩形木板宽 a 厘米，长 b 厘米，如果长、宽各刨去 x 厘米，求加工后木板的面积 y（平方厘米）和 x 之间的关系；

(3) 圆锥形谷堆的重量 W（公斤）和底面周长 c（厘米）之间的关系（设谷堆高度是常量 h 厘米，谷物的比重是常量 d 克/立方厘米）。

6. (1) 画出函数 $y=x^2$ 的图象。

(2) 根据图象，求 $x=1.4$、$x=2.3$、$x=-1.7$ 时 y 的值（精确到 0.1）。

(3) 根据图象，求 $y=2.0$、$y=5.3$、$y=3\frac{1}{3}$ 时 x 的值（精确到 0.1）。

(4) 利用图象，求 $\sqrt{3}$、$\sqrt{8}$、$\sqrt{2.7}$ 的值（精确到 0.1）。

7. 对于同一坐标系，作下列各函数的图象：

(1) $y=\frac{2}{3}x^2$；　　(2) $y=-\frac{2}{3}x^2$.

8. 汽车以匀加速度 $a=0.8$ 米/秒^{2}开行。

(1) 利用公式 $s\frac{at^2}{2}$求汽车 t 秒钟（$t=0$、1、2、…、10）所行的路程 s。

(2) 画出 s 和 t 之间函数关系的图象。

(3) 根据图象，求汽车走 5 米、10 米、15 米所需的时间（精确到 0.1 秒）。

9. 求作函数 $y=2(x-1)^2+3$ 和 $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-4$的图象.

10. 求抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点和轴。

11. 作下列函数的图象：

(1) $y=\frac{1}{2}x^2+3x+\frac{5}{2}$；　(2) $y=-2x^2+8x-8$；

(3) $y=-x^2-2x$；　(4) $y=1-3x^2$.

12. 物体从 40 米的高处自由落到地面，计算 t 秒后物体离地面的高度 h 米的公式是 $h=40-5t^2$。

(1) 经过 2 秒钟物体的高度是多少？

(2) 经过多少时间物体落到地面？

(3) 这个函数关系的定义域是什么？

(4) 作出 h 和 t 之间函数关系的图象。

13. 求下列函数的极值：

(1) $y=x^2-2x$；　(2) $y=2x^2+4x-3$；

(3) $y=4t-16t^2$；　(4) $s=1-2t-t^2$；

(5) $h=t(10+30t)$；　(6) $y=x^2+(x-1)^2$.

14. 求二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的极值。

15. 以 80 米/秒的初速度垂直向上抛出的一个物体，计算 t 秒钟后物体的高度 h 米的公式是 $h=80t-5t^2$。

(1) 几秒钟以后物体落到地面？

(2) 这个函数关系的定义域是什么？

(3) 在 t 是什么数时，h 有极值？这个极值是多少？这个极值的实际意义是什么？

(4) 画出这个函数关系的图象，从图象上求出经过几秒钟物体达到最高处和最高处离开地面多少米。所得的结果和计算所得的结果是否相同？