徐济仲 编著

广义相对论导论

武汉大学出版社

广义相对论导论

徐济仲 编著

武汉大学出版社

内 容 提 要

本书原是武汉大学物理系理论物理专业的讲义，1987年曾获武汉大学优秀教材二等奖。书的第一章是微分几何学知识，它包括微分流形、张量计算、外微分、联络、Riemann几何与Riemann-Cartan几何. 第二章是狭义相对论基础。第三章至第六章是阐述广义相对论的基本思想和主要物理效应。这包括等效原理、Einstein场方程的建立及其解、引力红移、光线的引力偏折、雷达信号回波的引力延时、水星近日点的进动、陀螺的测地进动、引力塌缩和黑洞、引力辐射及引力波的发射和接收。第七章是介绍当前几种流行的引力理论，它包括Einstein-Cartan引力理论、引力规范理论、非牛顿引力、Kaluza-Klein理论。每一章后面都附有习题和参考文献。

本书可作为综合大学、师范院校的理论物理专业的教材，也可供数学系几何专业的学生及有关专业研究人员参考。

广 义 相 对 论 导 论

徐济仲 编著

*

武汉大学出版社出版发行

（武昌 珞珈山）

湖北大学印刷厂印刷

*

787×1092毫米 1/32 10.875印张 239千字

1989年1月第1版 1989年1月第1次印刷

印数：1-1000

ISBN 7-307-00519-0/O·50

定价：1.85元

前言

近二十多年来，由于雷达信号回波延时和双星的引力辐射阻尼的实验，进一步证实了*Einstein*理论的正确性；3^0K微波背景辐射和类星体的发现，激发了相对论天体物理的研究；微分几何、规范场论及弱电统一理论的成就，重新吸引人们去寻找引力、电磁、弱和强四种相互作用的统一理论。这样，广义相对论就自然地作为这些研究领域的基础知识而受到重视，并且发展成一个相当活跃的研究领域。

本书原是武汉大学物理系理论物理专业的讲义，它是为高年级大学生和研究生而编写的。1987年曾获武汉大学优秀教材二等奖，经过修改和补充后就成了现在这个样子。由于广义相对论这门学科的特殊性，几乎所有这类书籍都要花去不少篇幅讲述微分几何知识，本书就把这一数学内容都集中安排在第一章，它包括微分流形、张量计算、外微分、联络、Riemann几何与Riemann-Cartan几何。实际上，这一章本身可作为微分几何学导论。第二章是狭义相对论，考虑到学生在其它课程（如电动力学或光学）中已有了这方面的基本知识，因此这一章的主要内容只涉及与后面几章有联系的部分。孪生子佯谬可以说是一个古老问题，但以前都是在广义相对论中处理这个问题，我们在这里是介绍R・A・Muller的在狭义相对论范围内处理这个问题的方法。第三章至第六章是阐述广义相对论的基本思想和主要的物理效应，这些效应有的被实验验证，有的由于所要求的测量精度

较高而尚未被验证。第七章是介绍当前流行的几种引力理论，以供读者深入这方面的研究打一个基础。实际上读者学完了这部分内容后就可直接进入阅读文献和从事研究工作。

由于编著者的水平有限，在书中难免会存在缺点和错误，希望读者提出指正，作者将十分感谢。

武汉大学物理系、湖北大学物理系的领导和黄景宁教授、邝安祥教授、韦快乐副教授、吴玉林同志对本书的写作和出版给予了支持，史新奎同志负责了编校工作，在此对他们表示谢意。我还感谢章佩瑛同志，没有她的支持我是很难写完此书的。

徐济仲

1988．6．

于武昌珞珈山

目　　录

第一章　流形与张量运算

§1.1　流　形

1．几个拓扑概念

为了给出流形的定义，我们首先必须了解几个拓扑概念。

集合：具有某种共同特性的个体所构成的集体称为集合，我们记它为A。其中的个体称为集合中的元素或点，记为a。则集合与它的元素间的关系记为$a \in A$。

子集合：若有两个集合A和B，其中B包含于A中，我们以$B \subset A$表示之，则B就称为A的子集合。例如中国人的集合为A，湖北人的集合为B，则$B \subset A$。又如某人a是中国人，但不是湖北人，则我们记为$a \in A$，$a \overline{\in} B$。

空集：没有元素的集合称为空集，记为ϕ。

集合簇：以集合作为元素的集合称为集合簇。如集合$\{A\} = \{\{1\},\ \{2,\ 3\},\ \phi\}$表示它的元素是$\{1\}$，$\{2, 3\}$和$\phi$，而其中元素$\{2,\ 3\}$又是2和3两个元素的集合。

并集和交集：对于任意两个集合A和B，集合$\{p: p \in A$或$p \in B\}$称为A和B的并集，记作$A \cup B$。即集合$A \cup B$中的元素p不是属于A就是属于B。集合$\{p: p \in A$且$p \in B\}$称为A与B的交集，记作$A \cap B$。即$A \cap B$中的任一元素p既属于A又属于B。

映射（多对一映射），设U_i、D_i是两个非空集合，从U_i到D_i的映射φ_i是一种法则或关系，它把U_i中的每个元

素与D_i中一确定元素对应（或联系）起来。记作$\varphi_i: U_i \to D_i$或$p \in U_i$，$q \in D_i$，

$$p \xrightarrow{\varphi_i} q$$

这种映射φ_i称多对一映射，或简称映射，并称q为p的象，p为q的逆象。图1—1(a)中的φ_1是U到D中映射；而图1—1(b)中的φ_2就不是映射，因为U中元素c不与D中元素对应；图1—1(c)中的φ_3也不是映射，因为U中元素c对应于D

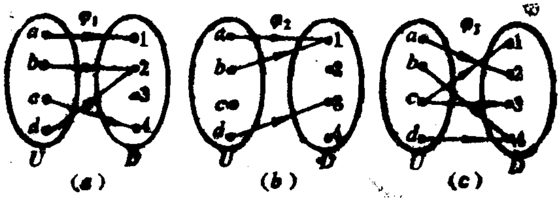

图 1—1

中两个元素1和3。通常说的函数关系$y=f(x)$就是$R^1 \to R^1$的映射，即$y \in R^1$，$x \in R^1$，$x \xrightarrow{f} y$。多对一的映射一般无逆映射。

1—1映射：如果φ_i是从U_i到D_i的映射，且D_i中每个元素都在U_i有一个唯一的逆象，则称φ_i是1—1映射。1—1映射都有逆映射，记为φ_i^{-1}。

同胚映射：如果$\varphi_i: U_i \to D_i$是1—1映射，且φ_i和φ_i^{-1}都是连续的，则称φ_i为从U_i到D_i上的同胚映射。

数空间R^n：由n个实数所构成的数组$x=(x^1, x^2, \cdots x^n)$的全体所组成的集合称为数空间R^n，其维数为n。R^n中的元素称为点。

度量空间：设M是一个集合，其元素记作x，y，z，等

等，而且$d: M \times M \to R^1$是满足下列三条公理的一个非负实函数：

(i)$d(x, y) \geqslant 0$，等号只有$x = y$时成立。

(ii)对称性：$d(x, y) = d(y, x)$。

(iii)三角不等式：$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$。

则点集合M和函数d一起称为度量空间，记为(M, d)。d叫作(M, d)的距离函数或度量，$d(x, y)$称为x和y两点间的距离。例如n维欧氏空间$E^n = (R^n, d)$是一个度量空间，其中

$$d(x,y) = \left[\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

开球：设p是集合M中的任意点，ε是任意正数，M中满足不等式$d(p, q) < \varepsilon$的点q的集合，称为M中以p点为中心ε为半径的开球。

开集：设U是M的子集合。如果U的每一点都有一开球$\subset U$，则U称为M的开子集或开集。

邻域：包含p点的开集称为p点的邻域。

拓扑空间：设M是一个集合，$\{U_i\}$是M的一个开子集族。如果满足：

(i)$\phi \in \{U_i\}$，$M \in \{U_i\}$。

(ii)M中任意多个属于$\{U_i\}$中的开子集的并集属于$\{U_i\}$。

(iii)M中有限多个属于$\{U_i\}$中的开子集的交集属于$\{U_i\}$。

则称M是具有拓扑结构$\{U_i\}$的拓扑空间$(M, \{U_i\})$。

例1 平庸拓扑空间：设M为非空集合，$\{U_i\} = \{M, \phi\}$，则i)$\phi \in \{U_i\}$，$M \in \{U_i\}$；ii)$\phi \cup M = M \in \{U_i\}$；

iii)$\phi \cap M=\phi \in \{U_i\}$。所以$\{U_i\}$为$M$的拓扑，($M$，$\{U_i\}$)为拓扑空间。此时$\{U_i\}$称为$M$的平庸拓扑，($M$，$\{U_i\}$)为平庸拓扑空间或非离散拓扑空间。

例2 设$M=\{a, b, c\}$，令$\{U_i\}=\{\{a\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \phi\}$。容易证明$\{U_i\}$为$M$的拓扑，($M$,$\{U_i\}$)为拓扑空间。

Hausdorff空间：如果对于拓扑空间M中任意两点p_i和p_j，总存在包含p_i的邻域U_i和包含p_j的邻域U_j，使得$U_i \cap U_j=\phi$，即U_i和U_j不相交，则称M为Hausdorff空间。

2. 流形的定义

设M是Hausdorff空间，它的开集U_j组成一开集簇$\{U_j, j\in J\}$（J是指标数j的集合），并且它们的覆盖就是M，即$M=\bigcup_{j\in J} U_j$，D_j是开集U_j由φ_j映射于R^n上之象。如果满足

(i)对于每个j，U_j之象$D_j=\varphi_j(U_j)$是R^n内的开集，φ_j是由U_j投于D_j上的同胚映射。也就是说，φ_j是1—1的映射，它本身以及逆映射φ_j^{-1}都是连续的。

(ii)对于非空交集$U_{ij}=U_i \cap U_j \neq \phi$内存在

$$\varphi_i(U_{ij})=\overline{D}_i$$
$$\varphi_j(U_{ij})=\overline{D}_j$$

并有

$$\varphi_j(\varphi_i^{-1}(\overline{D}_i))=\psi_{ji}(\overline{D}_i)=\overline{D}_j$$

都是n个任意阶可微和其导数是连续(简记为C^∞)函数。则称M为n维C^∞阶微分流形（或称流形），U_i为坐标邻域，φ_i为坐

标映射，$\{U_i,\varphi_i\}$ 为坐标图，这些坐标图的集合称坐标图册；ψ_{ji}为坐标变换。

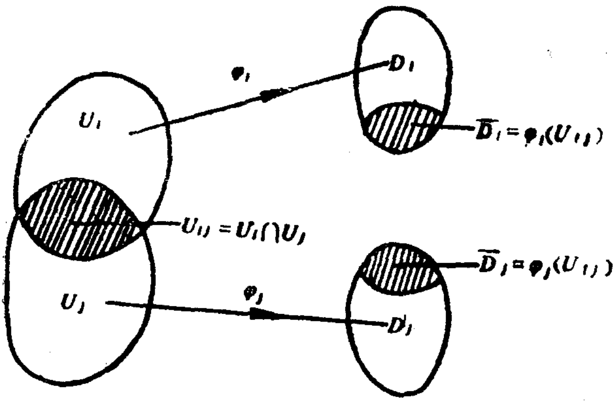

图 1—2

3．球面—流形的例子[1]

对于球面我们不可能用一个坐标邻域将它覆盖，也就是说不能只用一个平面开集使其与球面有一对一的对应。例如我们用经度φ和纬度θ来确定球面上一点的位置（$0\leqslant\varphi<2\pi$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$），这就是将球面上的点向$\varphi$—$\theta$平面上的点作映射，整个球面对应于$\varphi$—$\theta$平面上的区域是

$$D=\{(\varphi,\ \theta);\ 0\leqslant\varphi<2\pi,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\}$$

但在南、北极两点φ的值是不确定的，如图1—3所示，因此球面与平面φ—θ不是一一对应的关系。不过我们可以用两个坐标邻域来覆盖这个球面。其方法如下：

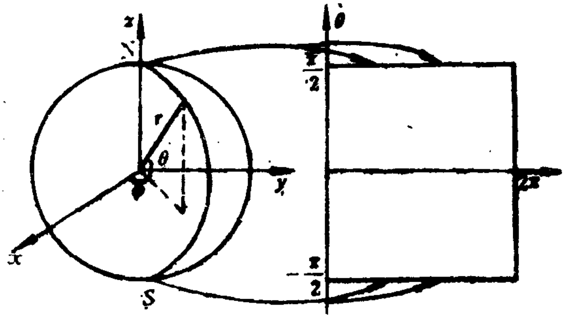

图 1—3

(i)取局部坐标系

设球面为S，在空间直角坐标系(x,y,z)中S的方程是

$$S: x^2+y^2+z^2=r^2\ (r>0) \tag{1.1.1}$$

我们将S分为S'和S''两部分，它们是用

$$S': z>-\frac{r}{2} \tag{1.1.2}$$

和

$$S'': z<\frac{r}{2} \tag{1.1.3}$$

来定义。即S'是在$z=-\frac{r}{2}$处平行于xy平面所截的圆C'的上面部分。S''是在$z=\frac{r}{2}$处平行于xy平面所截的圆C''的下面部分。这样S'和S''就覆盖了S，S'和S''的交集就是圆C'和圆C''所夹的球带部分，如图1—4所示。

我们在北极N处作一切平面，此平面必与xy平面平行。然后将S'映射到这个平面上，在此平面上取一坐标系(u,v)，

并使$u//x$，$v//y$。映射的方法是将南极S与S'上的一点p连接并延长至切平面的(u,v)点，这样的(u,v)点就与p点一一对应，因而把S'映射到切平面上的一个开区D_1，交区$S'\cap S''$映射为$\overline{D}_1$区（阴影部分），于是坐标系就是S'的局部坐标系。同样的手续，在南极S作一切平面，把北极N与S''上的点p'连接并延长到切平面上一点$(\overline{u},\ \overline{v})$，这样就把$S''$映射到切平面上的开集$D_2$，交区$S'\cap S''$映射为$\overline{D}_2$区（阴影部分）。因此$(\overline{u},\ \overline{v})$就是$S''$的局部坐标系。兹证明如下：

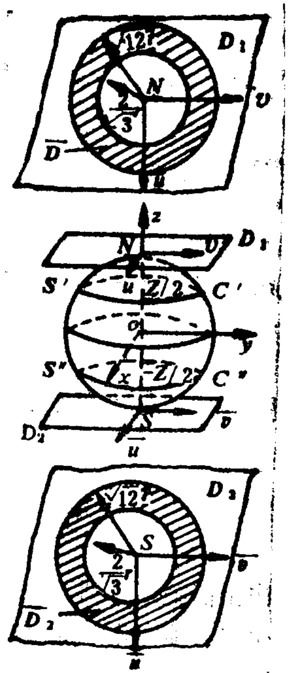

图 1—4

设S'上有一点$p(x,\ y,\ z)$，由于$u//x$，$v//y$，由相似三角形的比例关系

$$\frac{u}{x}=\frac{2r}{r+z},\quad \frac{v}{y}=\frac{2r}{r+z}$$

于是有

$$\left.\begin{aligned} &u=\frac{2rx}{r+z},\quad v=\frac{2ry}{r+z} \\ &\text{或} \\ &x=\frac{u(r+z)}{2r},\quad y=\frac{v(r+z)}{2r} \end{aligned}\right\}\qquad (1.1.4)$$

将(1.1.4)式代入(1.1.1)式

$$x^2+y^2+z^2=\frac{u^2(r+z)^2}{4r^2}+\frac{v^2(r+z)^2}{4r^2}+z^2=r^2$$

即

$$(u^2+v^2)(r^2+2rz+z^2)+4r^2z^2-4r^4=0$$

解此方程得

$$z=\frac{-r(u^2+v^2)\pm 4r^3}{4r^2+u^2+v^2}$$

由于在S'上$z\neq -r$，所以只有取

$$z=\frac{r(4r^2-u^2-v^2)}{u^2+v^2+4r^2} \tag{1.1.5}$$

将(1.1.5)式代入(1.1.4)式得

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{u}{2}\left(1+\frac{z}{r}\right)=\frac{4r^2u}{u^2+v^2+4r^2} \\ y&=\frac{v}{2}\left(1+\frac{z}{r}\right)=\frac{4r^2v}{u^2+v^2+4r^2} \end{aligned}\right\} \tag{1.1.6}$$

由上面关系看到，当(x, y, z)连续地变化时，则(u, v)也连续地变化，反之也是一样；即(x, y, z)与(u, v)是一对一的映射，所以(u, v)是S'上的局部坐标系。由于在$z=-\frac{r}{2}$处的截圆C'的半径是$\sqrt{r^2-\left(\frac{r}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}r$，根据相似比

$$\frac{2r}{\frac{1}{2}r}=\frac{(\sqrt{u^2+v^2})_{max}}{\frac{\sqrt{3}}{2}r}$$

即 $(\sqrt{u^2+v^2})_{max}=2\sqrt{3}r$

所以S'到切平面的映射区满足

$$D_1:\ u^2+v^2<12r^2 \tag{1.1.7}$$

S''上的点$p'(x,y, z)$和$(\bar{u},\bar{v})$有同样关系，这只要将