五專用書

商科數學

（下冊）

戴秉彝
李克超 合編

國家科學委員會補助

國立編譯館出版
臺灣中華書局印行

五專用書

商科數學

（下　冊）

戴秉彝
李克超　合編

國家科學委員會補助

國立編
臺灣中華書局印行

中華民國六十四年十二月初版

五專用書

商科數學（全二冊）

下冊平裝基本定價伍元捌角正
（郵運滙費另加）

編著者 戴秉彝・李克超

著作權所有人 國立編譯館

補助機關 國家科學委員會

發行人 臺灣中華書局股份有限公司代表 熊鈍生
臺北市重慶南路一段九十四號

本書局登記證字號 行政院新聞局局版臺業字第捌叁伍號

印刷者 臺灣中華書局印刷廠

發行處 臺灣中華書局
臺北市重慶南路一段九十四號
郵政劃撥帳戶：三九四二號
Chung Hwa Book Company, Ltd.
94, Chungking South Road, Section 1,
Taipei, Taiwan, Republic of China

（臺總）平甲書

No. 8166

臺參(實)

商 科 數 學

下 冊 目 錄

第二十一章　方程式論

21.1　n次多項式與方程式

吾人回想節9.15中曾述及含一變數 x 的一 n 次有理整函數或 x 的一 n 次多項式爲：

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n\ , \tag{1}$$

式中 n 是正整數或零，又 a_0，a_1，a_2，……，a_n 爲常數，且 $a_0\neq 0$. 換言之，含 x 的一 n 次有理整方程式（integral rational equation）可書爲如下形：

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n=0\ ; \tag{2}$$

或 $f(x)=0$，$f(x)$ 與(1)中者同，具有 $n\geq 1$．吾人稱(2)爲普通 n 次方程式．$n=1$，2，3，及4的各次多項式等于零時各稱爲線性，二次，三次及四次方程式．本章內任何函數記號如 $f(x)$，$H(x)$ 等所表示者均代表一含 x 的多項式．

除非另有說明，任何定理及其證明對於複數係數亦可應用．又就任一多項式(1)言，除非恒等于零或常數外，均假定 $n\neq 0$．

21.2　基本定理

剩餘定理(Remainder Theorem)

若 r 爲一常數，又若一多項式 $f(x)$ 以（$x-r$）除之，至剩餘爲一常數而止，則此剩餘（remainder）等於 $f(r)$.

證明：以（$x-r$）除 $f(x)$ 之後，設 $q(x)$ 表其商，及 R 表常數剩餘．則因

被除數≡（除數）·（商）+（剩餘），

故 $f(x)\equiv(x-r)q(x)+R$.

因(1)對於 x 的所有值均爲眞，故于(1)中用 $x=r$，則

$$f(r)=0\cdot q(r)+R \quad 或 \quad R=f(r).$$

說明 1. 試以 $(x-2)$ 除 $(5x^2-3x+7)$ 而檢查剩餘定理.

$$\begin{array}{r|l}
 & \quad 5x+7 \\
\cline{2-2}
x-2 & 5x^2-3x+7 \\
 & \underline{5x^2-10x} \\
 & \qquad 7x+7 \\
 & \qquad \underline{7x-14} \\
 & \qquad\quad 21=R
\end{array}$$

由代換法，若

$f(x)=5x^2-3x+7$，則

$f(2)=5(4)-3(2)+7$

$f(2)=21$

符合

說明 2. 若 $f(x)=5x^3-11x^2-14x-10$，又若 $f(x)$ 爲 $(x+2)$ 所除，此處吾人瞭解，$x+2=x-(-2)$，則此常數剩餘爲：

$$f(-2)=5(-2)^3-11(-2)^2-14(-2)-10=-66.$$

註 1. 所謂 r 爲一方程式 $f(x)=0$ 的根，意指 $f(r)=0$．因此，若 $f(x)=x^2-x-2$，則吾人知 2 爲 $f(x)=0$，或 $x^2-x-2=0$ 的一根. 因 $f(2)=4-2-2=0$ 故.

因式定理(Factor Theorem)

若 $f(r)=0$ 則 $(x-r)$ 為 $f(x)$ 的一因式。即若 r 為 $f(x)=0$ 的一根，則 $(x-r)$ 為 $f(x)$ 的一因式。

證明：(1) 中 $R=f(r)$；由吾人的假設，故 $R=0$ 而 $(x-r)$ 恰能整除 $f(x)$. 或由公式(1)，有

$$f(x)=(x-r)q(x).$$

此說明：$(x-r)$ 爲 $f(x)$ 的一因式.

因式定理的逆定理：

若 $(x-r)$ 為 $f(x)$ 的一因式，則 $f(r)=0$ 或 r 為方程式 $f(x)$

$=0$ 的一根.

證明：若以（$x-r$）除 $f(x)$，則恰好除盡，且產生一有理整商 $q(x)$ 而使 $f(x)\equiv(x-r)q(x)$. 因此，$f(r)=0\cdot q(r)=0$，故而 r 爲方程式 $f(x)=0$ 的一根.

例 1. （$x+3$）爲 $3x^3-2x+5$ 因式否？

解： 1. 設 $f(x)=3x^3-2x+5$，又注意

$x+3=x-(-3)$；

$f(-3)=3(-27)+6+5=-70\neq 0$.

2. 故由前定理知，（$x+3$）非 $f(x)$ 的因式.

設 $f(x)$ 爲一所與多項式，又設 r 爲一常數. 於是所謂 $x=r$ 爲 $f(x)$ 的零，意指 $f(r)=0$，亦即表示 $x=r$ 滿足 $f(x)=0$. 因此，此函數 $f(x)$ 的諸零，乃方程式 $f(x)=0$ 的諸根.

說明 3. 若 $f(x)=x^2-5x+6$. 吾人驗證

$x^2-5x+6=0$ 付與 $x=3$ 及 $x=2$.

或 3 與 2 皆爲函數 $f(x)$ 的零值，而爲 $f(x)=0$ 的根.

習 題 21-1

1. 以（$x-3$）除 $f(x)=3x^2+14x+8$；又算出 $f(3)$；再以（$x+2$）除 $f(x)$，又算出 $f(-2)$ 的值.
2. $f(x)=2x^2-7x+5$；以（$x-4$）除之並算出 $f(4)$.

試由計算解答下列各題，又用因式定理或其逆定理計算之. 若答案爲是，則再由除法求其另一因式.

3. 設 $f(x)=x^3+3x^2-5x+2$，（$x-2$）是 $f(x)$ 的因式否？
4. 設 $f(x)=2x^3+6x^2-x+12$，（$x+2$）是 $f(x)$ 的因式否？
5. （$x-3$）是 x^3-27 的因式否？是 x^3+27 的因式否？
6. （$x+2$）是 x^5-32 的因式否？是 x^5+32 的因式否？
7. （$x+n$）是 x^4-n^4 的因式否？是 x^4+n^4 的因式否？

設（$x-2$）爲 $f(x)$ 的一因式，試求 k 值.

8. $f(x)=3x^2+4kx-5$.
9. $f(x)=k^2x^2+2kx-3$.

21.3 綜合除法

求一二項式（$x-r$）除一多項式 $f(x)$ 有一簡捷方法名爲**綜合除法**（synthetic division）. 可如下推出之.

說明1. 設吾人以（$x-3$）除 $5x^3-11x^2-14x-10$.

（Ⅰ）.

$$
\begin{array}{rrrrl}
5x^2 & +4x & -2 & & =\text{商} \\
\hline
5x^3-11x^2 & -14x & -10 & & \big|\ x-3 \\
{}^*5x^3-15x^2 & & & & \\
\hline
4x^2 & -14x^* & & & \\
{}^*4x^2 & -12x & & & \\
\hline
 & -2x & -10^* & & \\
 & -2x & +6 & & \\
\hline
 & & -16 & & =\text{餘數}.
\end{array}
$$

（Ⅱ）

$5x^2$	$+4x$	-2	$=$商	
$5x^3$	$-11x^2$	$-14x$	-10	$x-3$
	$-15x^2$	$-12x$	$+6$	
	$4x^2$	$-2x$	-16	

（Ⅲ）

$$
\begin{array}{rrrr|l}
5 & -11 & -14 & -10 & 1-3 \\
 & -15 & -12 & +6 & \\
\hline
5 & 4 & -2 & -16 &
\end{array}
$$

（$x-3$）中 x 的係數爲1；故行於除法中時每一階段剩餘中，x 最高冪的係數爲商中的次一係數. 吾人將（Ⅰ）中各具星號的項省略縮成（Ⅱ）式，僅有三列，自（Ⅱ）僅將每項的係數書出而成（Ⅲ）. 將5書入（Ⅲ）中第三列而使商的每一項係數均出現於第三列中，于是可將商所佔的一列略去.（Ⅲ）暗示（Ⅳ）的作法. 即綜合除法，于（Ⅳ）中以＋3代替－3，作爲乘數，故而可用加法以代替減法而求第三列.

（Ⅳ）.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
5 & -11 & -14 & -10 & \underline{3} \\
 & 15 & 12 & 6 & \\
\hline
5 & 4 & -2 & -16 &
\end{array}
$$

即　商$=5x^2+4x-2$，剩餘$=-16$．

要則

1. 將$f(x)$依x的降冪排列，以0作係數補足其中所缺的項．然後詳細排成三線．

2. 於第一線將$f(x)$的係數，按a_0，a_1，a_2，…，a_n的順序排列．將a_0書於第三線中第一位．

3. 以r乘a_0，將此積a_0r置于a_1的下方相加，其和書於第三線的第二位．

   再以r乘此和而將所得之積，置于a_2的下方相加，得和書於第三線第三位；餘倣此．至$f(x)$的最後一係數而止．

4. 第三線中最後一數為剩餘．其他諸數字則為商中x各冪的係數，依照x的降冪而排列者．

例1．試以$(x+3)$或$[x-(-3)]$除$(2x^4-12x^2-5)$．

解：

$$\begin{array}{rrrrr|l}
2 & 0 & -12 & 0 & -5 & \underline{-3} \\
 & -6 & +18 & -18 & +54 & \\ \hline
2 & -6 & +6 & -18 & +49 &
\end{array}$$

剩餘$=49$；

$$\frac{2x^4-12x^2-5}{x+3}=2x^3-6x^2+6x-18+\frac{49}{x+3}\ . \qquad (1)$$

就例1言，依剩餘定理可知49爲$x=-3$時，$2x^4-12x^2-5$的值．本例說明綜合除法的下列一重要用途．

$$\left\{\begin{array}{l}\text{欲求 } x=r \text{ 時一多項式 } f(x) \text{ 的值，則以 } (x-r) \\ \text{依綜合除法除 } f(x)\text{；　剩餘爲 } f(r).\end{array}\right\} \qquad (2)$$

例2．若$f(x)=3x^3+2x-3$，試求$f(-2)$．

解：以$[x-(-2)]$或$(x+2)$除之，

$$\begin{array}{rrrr|l} 3 & 0 & 2 & -3 & \underline{-2} \\ & -6 & +12 & -28 & \\ \hline 3 & -6 & 14 & -31 & = f(-2). \end{array}$$

習 題 21-3

試由綜合除法求商及剩餘；題 1 亦以尋常的長除法除之.

1. $(4x^2+3-2x)\div(x-3)$.
2. $(3x-7+2x^2)\div(x+4)$.
3. $(3x^3-x^2+2x-7)\div(x-2)$.
4. $(-2x^3-4x^2+3x-5)\div(x-3)$.
5. $(2x^3-5x^2+7)\div(x-2)$.
6. $(-3x^3+2x-75)\div(x+3)$.
7. $(2x^3+5x^2-4x-5)\div(x+\frac{1}{2})$.

由綜合除法解之：

8. 若 $f(x)=3x^4-2x^3+x^2-x+7$，試求 $f(2)$；$f(-3)$.
9. 若 $f(x)=-2x^4+5x^3-2x^2-7x+5$，試求 $f(3)$；$f(-2)$.
10. 除兩次，試求 $(x^4-12x^3+46x^2-60x+9)\div(x-3)^2$.
11. 不用除法而用因式定理，試證 $(x-1)$ 爲 (x^2-1) 的一因式.
12. 由上題方法試證 $(x+c)$ 爲 (x^6-c^6) 的一因式.

21.4 多項式的圖形

多項式 $f(x)$ 的圖形，爲 $y=f(x)$ 的圖形. 欲作其圖形時，可用綜合除法以計算 $f(x)$ 的值. 吾人涉及一多項式的圖形時，常假定其諸係數皆爲實數.

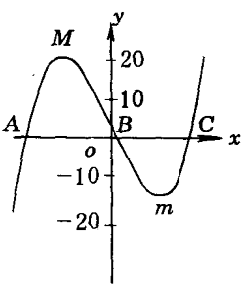

圖 21-1

說明 1. 函數 $f(x)=x^3-12x+3$ 的圖形如右圖 21-1 所示. 此圖由下列表作出：

若 $x=$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
則 $y=$	-13	$+12$	$+19$	$+14$	$+3$	-8	-13	-6

圖上 M 點（$x=2$ 處）在曲線上較其鄰近任一點爲高．故吾人稱 M 爲此曲線的一**極大點**（maximum point）．吾人說 $f(x)$ 於 $x=-2$ 處有一**相對極大**（relative maximum）．因若 x 充分靠近於 $x=-2$ 時，$f(-2)$ 比 x 鄰近于 -2 的其他任何值 $f(x)$ 爲大緣故．m 點（$x=2$ 處）較圖形上此點鄰近的任一點低，而稱爲此圖形的一**極小點**(minimum)．又吾人謂 $x=2$ 時此函數 $f(x)$ 有一**相對極小**（relative minimum）．

註 1.　圖 21-1 及圖 21-2 諸曲線 I、II、III，說明三次函數不同的圖形．

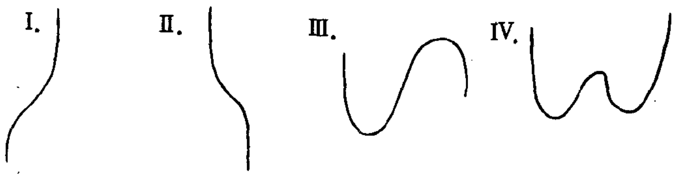

圖 21-2

一 n 次多項式 $f(x)$ 的圖形爲一連續曲線至多含有（$n-1$）個相對極大與極小，在多數高等數學中此事可證明之．又此圖形爲一光滑的曲線．亦即爲無尖角的曲線這是可證明的．

注意方程式 $f(x)=0$ 的實根，皆爲方程式 $y=f(x)$ 圖形或曲線與 x 軸的諸截距．

例 1.　圖解　$x^3+3=12x$．

解：　1.　兩邊各減 $12x$ 得　$x^3-12x+3=0$．

2.　設 $f(x)=x^3-12x+3$．方程式 $y=f(x)$ 的圖形，爲圖 21-1

所示．於A，B，C三點處$f(x)$的值皆爲零．故此種點的橫坐標皆爲(1)的實根．此等根近似於$x=-3.6$，$x=.3$，$x=3.3$．稍後吾人可修正作圖法使產生的實根能達任何所欲的精確程度．

習　題　21-4

試作下列各多項式的圖形．

1．x^3　　2．$-x^3$　　3．x^4　　4．$-x^4$

5．x^3+2x^2-3x+4．　　6．$-x^3+2x^2-x+1$．

7．$-x^3-3x^2+6x+7$．　　8．x^3-3x^2+4x+7．

9．$x^4+3x^3-6x^2+16x-5$．　　10．$-x^4+24x^2-12x+4$．

圖解各題以求得諸實數根的近似值．

11．$x^3-4x^2-3x+7=0$．　　12．$x^3+x^2-7x-8=0$．

21.5 代數基本定理的結論

下列結果乃德國大數學家高斯（Gohaun Karl Friedrich Gauss（1777-1855））氏于1799年首先證明者．其證法超出本書的範圍，故從略．

代數基本定理

單含一變數的每一n次有理整方程式，至少有一根．

使用上述基本定理結果，吾人可設立下列諸定理，此處任何多項式或其因式中的係數，可爲任何複數．

定理 21.5-1

若$f(x)$為x的一n次多項式，中$n>0$；則存在有x的n個線性因式其積為$f(x)$．

證明：1．假定　$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$．

2．由基本定理，知方程式$f(x)=0$至少有一個根．設r_1