

五 專 用 書

商 科 數 學

(下 冊)

戴 秉 彝 合 編
李 克 超

國 家 科 學 委 員 會 補 助

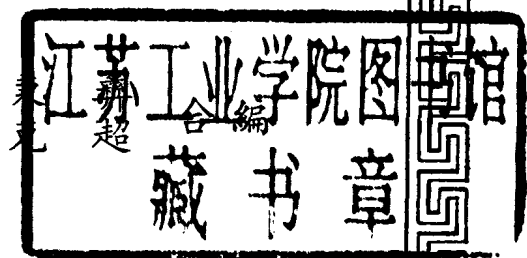
國 立 編 譯 館 出 版
臺 灣 中 華 書 局 印 行

五 專 用 書

商 科 數 學

(下 冊)

戴 李



國 家 科 學 委 員 會 補 助

國 立 編

臺 灣 中 華 書 局 印 行

中華民國六十四年十二月初版

五專
用書
商科數學(全二冊)

下冊平裝基本定價伍元捌角正

(郵運滙費另加)

編著者 戴秉彝·李克超

著作權所有人 國立編譯館

補助機關 國家科學委員會

發行人 臺灣中華書局股份有限公司代表 熊鉅生

本局登記號 臺北市重慶南路一段九十四號

印證字號 行政院新聞局版

發行處 臺灣中華書局印刷廠

臺北市重慶南路一段九十四號
郵政劃撥帳戶：三九四二號
Chung Hwa Book Company, Ltd.
94, Chungking South Road, Section 1,
Taipei, Taiwan, Republic of China



商 科 數 學

下 冊 目 錄

第二十一章 方程式論..... 1

- | | |
|-------------------|-----------------|
| 21-1 n 次多項式與方程式 | 21-2 基本定理 |
| 21-3 綜合除法 | 21-4 多項式的圖形 |
| 21-5 代數基本定理的結論 | 21-6 虛根成對發生 |
| 21-7 $f(-x)=0$ 的根 | 21-8 根的符號 |
| 21-9 實根的界限 | 21-10 有理根 |
| 21-11 實根的分離 | 21-12 連續圖形的實根 |
| 21-13 根與係數的關係 | *21-14 三次方程式的解法 |

第二十二章 排列與組合..... 34

- | | |
|----------------|----------------|
| 22-1 基本定理 | 22-2 排列 |
| 22-3 不同事物排列的公式 | 22-4 不盡相異事物的排列 |
| 22-5 組合 | 22-6 互斥事件 |
| 22-7 雜法 | 22-8 二項式定理的證明 |

第二十三章 概 率..... 51

- | | |
|------------|-----------------|
| 23-1 概率的區分 | 23-2 對有限樣本空間定義的 |
| 23-3 和式記號 | 概率 |
| 23-4 隨機單變數 | 23-5 實驗概率 |

- 23-6 嘗試 n 次成功的期望數 23-7 互斥事件的概率
23-8 複合試驗 23-9 一試驗的連續嘗試
*23-10 條件概率 *23-11 相依試驗

第二十四章 數學歸納法 81

- 24-1 正整數的一性質與數學
歸納法

第二十五章 線性方程式系 89

- 25-1 含 n 個變數的 n 個線性 25-2 一系的三角式與矩陣
方程系 25-3 二階行列式
25-4 任何階的行列式 25-5 行列式的性質
25-6 行列式的計算 25-7 餘因式的性質
25-8 由行列式以求線性系的 25-9 齊次方程式
解 25-10 變數的個數多于方程式
25-11 方程式的個數多于變數 的個數
的個數

第二十六章 反函數 116

- 26-1 反函數的一般觀念 26-2 反正弦函數
26-3 反正切函數 26-4 其餘反三角函數
*26-5 指數函數及對數函數的
反函數

第二十七章 斜三角形 128

- 27-1 關於三角形的術語 27-2 餘弦定律

27-3 對情況Ⅳ用餘弦定律以解三角形	27-4 正弦定律
	27-5 由正弦定律以解情況Ⅰ
27-6 解況Ⅱ的解(混淆情況)	27-7 由餘弦及正弦定律解情況Ⅲ
27-8 三角形的正切定律	
27-9 半角的正切函數	27-10 半角的正弦, 餘弦與正切
27-11 由半角公式求節 27.1 中情況Ⅳ的解	27-12 關於三角形面積的海龍氏公式
附: 三角形的對數解法摘要	

第二十八章 空間直線與平面的關係 156

28-1 基本公設與定理	28-2 直線與平面垂直的基本定理
28-3 直線與平面平行	
28-4 二面角, 垂直平面	

第二十九章 體積, 表面積, 圓周及圓面積 174

29-1 體積公設	29-2 角柱
29-3 角錐	29-4 圓周與圓面積
29-5 圓柱, 圓錐與球	

第三十章 一度空間一直線 193

30-1 有向長度的比	*30-2 變換方程式
30-3 變換式的幾何意義	*30-4 反變換式與合成變換式
*30-5 點集與介于兩點之間	30-6 分點與有向線段的和
30-7 矢量與矢量的運算	30-8 以純量乘矢量

第三十一章 二度空間——平面 217

- | | |
|--------------|--------------------|
| 31-1 極坐標系 | 31-2 極坐標與卡氏坐標 |
| 31-3 極坐標中的距離 | 31-4 平面中的矢量 |
| 31-5 矢量加法 | *31-6 諸矢量依加法爲亞培爾氏群 |
| 31-7 自由矢量 | |
| 31-8 矢量坐標系 | |

第三十二章 直線與平面 242

- | | |
|--------------|----------------|
| 32-1 平面中的直線 | 32-2 直線的各種方程式 |
| 32-3 直線的斜率 | 32-4 斜截式與點斜式 |
| 32-5 對稱式與參數式 | 32-6 沿直線的方向與意向 |
| 32-7 極坐標中的直線 | 32-8 矢量坐標中的直線 |
| 32-9 線段的分點 | |

第三十三章 平面的直線集合 277

- | | |
|--------------|-------------|
| 33-1 平行線族 | 33-2 共點線 |
| 33-3 線性組合 | 33-4 二直線的交點 |
| 33-5 應用行列式 | 33-6 二直線的交角 |
| 33-7 有向角 | 33-8 矢量內積 |
| 33-9 矢量內積的應用 | |

第三十四章 幾何關係中的解析方法 308

- | | |
|------------|----------------|
| 34-1 直線的兩側 | 34-2 直線的上下 |
| 34-3 角的等分線 | 34-4 軌跡 |
| 34-5 參數表式 | 34-6 幾何定理的解析證法 |

第三十五章 對稱、變換式 330

- | | |
|------------------------|--------------|
| 35-1 對稱 | 35-2 變換構想，平移 |
| 35-3 變換的不變性 | 35-4 反射 |
| 35-5 變換式的合成 | 35-6 旋轉 |
| 35-7 利用變換式以簡化曲線
方程式 | |

第三十六章 圓錐曲線 356

- | | |
|---------------|-----------------|
| *36-1 對頂錐及其截口 | *36-2 以離心率表圓錐曲線 |
| 36-3 拋物線 | *36-4 各種情況中的拋物線 |
| 36-5 橢圓 | *36-6 各種情況中的橢圓 |
| 36-7 圓 | 36-8 雙曲線 |

第三十七章 數列的極限與定積分 395

- | | |
|-----------------|----------------|
| 37-1 求和記法 | 37-2 數列，數列的極限 |
| 37-3 數列收斂諸定理 | 37-4 面積為近似值的極限 |
| 37-5 曲線下的面積與定積分 | 37-6 積分的一般定義 |
| *37-7 定積分的性質 | *37-8 以體積說明積分 |

第三十八章 函數的極限與導函數 427

- | | |
|---------------|---------------|
| 38-1 函數的極限 | 38-2 極限定理 |
| 38-3 函數的連續 | 38-4 函數的導函數 |
| 38-5 導函數的幾何說明 | 38-6 微分法公式 |
| 38-7 合成函數的導函數 | 38-8 二階導函數 |
| 38-9 隱函數的微分法 | 38-10 反函數的導函數 |

38-11 函數的微分

第三十九章 導函數的應用.....482

- | | |
|--------------|--------------------|
| 39-1 遞增與遞減函數 | 39-2 曲線的凹向與二次導函數的號 |
| 39-3 極大與極小 | |
| 39-4 極值的應用 | 39-5 求近似值法 |

第四十章 微分與積分的幾個基本定理..... 518

- | | |
|-------------------|----------------|
| 40-1 連續函數的最大值與最小值 | *40-2 洛爾氏定理 |
| | 40-3 均值定理 |
| *40-4 連續函數的中間值 | *40-5 積分第一基本定理 |
| 40-6 積分第二基本定理 | 40-7 積分的應用 |
| 40-8 平均值 | |

第二十一章 方程式論

21.1 n 次多項式與方程式

吾人回想節 9.15 中曾述及含一變數 x 的一 n 次有理整函數或 x 的一 n 次多項式爲：

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n, \quad (1)$$

式中 n 是正整數或零，又 $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ 爲常數，且 $a_0 \neq 0$ 。換言之，含 x 的一 n 次有理整方程式 (integral rational equation) 可書爲如下形：

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0; \quad (2)$$

或 $f(x) = 0$ ， $f(x)$ 與 (1) 中者同，具有 $n \geq 1$ 。吾人稱 (2) 爲普通 n 次方程式。 $n = 1, 2, 3$ ，及 4 的各次多項式等于零時各稱爲線性，二次，三次及四次方程式。本章內任何函數記號如 $f(x)$ ， $H(x)$ 等所表示者均代表一含 x 的多項式。

除非另有說明，任何定理及其證明對於複數係數亦可應用。又就任一多項式 (1) 言，除非恒等于零或常數外，均假定 $n \neq 0$ 。

21.2 基本定理

剩餘定理 (Remainder Theorem)

若 r 爲一常數，又若一多項式 $f(x)$ 以 $(x-r)$ 除之，至剩餘爲一常數而止，則此剩餘 (remainder) 等於 $f(r)$ 。

證明：以 $(x-r)$ 除 $f(x)$ 之後，設 $q(x)$ 表其商，及 R 表常數剩餘。

則因

被除數 $\equiv$ (除數) $\cdot$ (商) $+$ (剩餘),

故
$$f(x) \equiv (x-r)q(x) + R.$$

因(1)對於 x 的所有值均為真, 故于(1)中用 $x=r$, 則

$$f(r) = 0 \cdot q(r) + R \text{ 或 } R = f(r).$$

說明 1. 試以 $(x-2)$ 除 $(5x^2-3x+7)$ 而檢查剩餘定理.

$ \begin{array}{r} 5x+7 \\ x-2 \overline{) 5x^2-3x+7} \\ \underline{5x^2-10x} \\ 7x+7 \\ \underline{7x-14} \\ 21=R \end{array} $	由代換法, 若 $f(x) = 5x^2 - 3x + 7$, 則 $f(2) = 5(4) - 3(2) + 7$ $f(2) = 21$ 符合
--	---

說明 2. 若 $f(x) = 5x^3 - 11x^2 - 14x - 10$, 又若 $f(x)$ 為 $(x+2)$ 所除, 此處吾人瞭解, $x+2 = x - (-2)$, 則此常數剩餘為:

$$f(-2) = 5(-2)^3 - 11(-2)^2 - 14(-2) - 10 = -66.$$

註 1. 所謂 r 為一方程式 $f(x)=0$ 的根, 意指 $f(r)=0$. 因此, 若 $f(x) = x^2 - x - 2$, 則吾人知 2 為 $f(x)=0$, 或 $x^2 - x - 2 = 0$ 的一根. 因 $f(2) = 4 - 2 - 2 = 0$ 故.

因式定理(Factor Theorem)

若 $f(r)=0$ 則 $(x-r)$ 為 $f(x)$ 的一因式. 即若 r 為 $f(x)=0$ 的一根, 則 $(x-r)$ 為 $f(x)$ 的一因式.

證明: (1) 中 $R = f(r)$; 由吾人的假設, 故 $R = 0$ 而 $(x-r)$ 恰能整除 $f(x)$. 或由公式(1), 有

$$f(x) = (x-r)q(x).$$

此說明: $(x-r)$ 為 $f(x)$ 的一因式.

因式定理的逆定理:

若 $(x-r)$ 為 $f(x)$ 的一因式, 則 $f(r)=0$ 或 r 為方程式 $f(x)$

$=0$ 的一根。

證明：若以 $(x-r)$ 除 $f(x)$ ，則恰好除盡，且產生一有理整商

$q(x)$ 而使 $f(x) \equiv (x-r)q(x)$ 。因此， $f(r) = 0 \cdot q(r) =$

0 ，故而 r 為方程式 $f(x)=0$ 的一根。

例 1. $(x+3)$ 為 $3x^3-2x+5$ 因式否？

解： 1. 設 $f(x)=3x^3-2x+5$ ，又注意

$$x+3=x-(-3)；$$

$$f(-3)=3(-27)+6+5=-70 \neq 0。$$

2. 故由前定理知， $(x+3)$ 非 $f(x)$ 的因式。

設 $f(x)$ 為一所與多項式，又設 r 為一常數。於是所謂 $x=r$ 為 $f(x)$ 的零，意指 $f(r)=0$ ，亦即表示 $x=r$ 滿足 $f(x)=0$ 。因此，此函數 $f(x)$ 的諸零，乃方程式 $f(x)=0$ 的諸根。

說明 3. 若 $f(x)=x^2-5x+6$ 。吾人驗證

$$x^2-5x+6=0 \text{ 付與 } x=3 \text{ 及 } x=2。$$

或 3 與 2 皆為函數 $f(x)$ 的零值，而為 $f(x)=0$ 的根。

習 題 21-1

1. 以 $(x-3)$ 除 $f(x)=3x^2+14x+8$ ；又算出 $f(3)$ ；再以 $(x+2)$ 除 $f(x)$ ，又算出 $f(-2)$ 的值。

2. $f(x)=2x^2-7x+5$ ；以 $(x-4)$ 除之並算出 $f(4)$ 。

試由計算解答下列各題，又用因式定理或其逆定理計算之。若答案為是，則再由除法求其另一因式。

3. 設 $f(x)=x^3+3x^2-5x+2$ ， $(x-2)$ 是 $f(x)$ 的因式否？

4. 設 $f(x)=2x^3+6x^2-x+12$ ， $(x+2)$ 是 $f(x)$ 的因式否？

5. $(x-3)$ 是 x^3-27 的因式否？是 x^3+27 的因式否？

6. $(x+2)$ 是 x^5-32 的因式否？是 x^5+32 的因式否？

7. $(x+n)$ 是 x^4-n^4 的因式否？是 x^4+n^4 的因式否？

設 $(x-2)$ 為 $f(x)$ 的一因式，試求 k 值。

8. $f(x)=3x^2+4kx-5$ 。

9. $f(x)=k^2x^2+2kx-3$ 。

21.3 綜合除法

求一二項式 $(x-r)$ 除一多項式 $f(x)$ 有一簡捷方法名爲綜合除法 (synthetic division). 可如下推出之.

說明 1. 設吾人以 $(x-3)$ 除 $5x^3-11x^2-14x-10$.

$$\begin{array}{r}
 \text{(I).} \quad 5x^2 + 4x - 2 = \text{商} \\
 \begin{array}{r}
 5x^3 - 11x^2 - 14x - 10 \quad | \quad x-3 \\
 \underline{* 5x^3 - 15x^2} \\
 4x^2 - 14x \quad * \\
 \underline{* 4x^2 - 12x} \\
 - 2x - 10 \quad * \\
 \underline{- 2x + 6} \\
 -16 = \text{餘數.}
 \end{array}
 \end{array}$$

(II)

(III)

$$\begin{array}{r}
 5x^2 + 4x - 2 = \text{商} \\
 \begin{array}{r|rrrr}
 5x^3 & -11x^2 & -14x & -10 & \\
 & -15x^2 & -12x & +6 & \\
 \hline
 & 4x^2 & -2x & -16 &
 \end{array} \quad | \quad x-3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 5 \quad -11 \quad -14 \quad -10 \quad | \quad 1-3 \\
 \hline
 \quad -15 \quad -12 \quad +6 \\
 \hline
 5 \quad 4 \quad -2 \quad -16
 \end{array}$$

$(x-3)$ 中 x 的係數爲 1; 故行於除法中時每一階段剩餘中, x 最高幂的係數爲商中的次一係數. 吾人將 (I) 中各具星號的項省略縮成 (II) 式, 僅有三列, 自 (II) 僅將每項的係數書出而成 (III). 將 5 書入 (III) 中第三列而使商的每一項係數均出現於第三列中, 于是可將商所佔的一列略去. (III) 暗示 (IV) 的作法. 即綜合除法, 于 (IV) 中以 +3 代替 -3, 作爲乘數, 故而可用加法以代替減法而求第三列.

$$\begin{array}{r}
 \text{(IV).} \quad 5 \quad -11 \quad -14 \quad -10 \quad | \quad 3 \\
 \hline
 \quad 15 \quad 12 \quad 6 \\
 \hline
 5 \quad 4 \quad -2 \quad -16
 \end{array}$$

即 商 $= 5x^2 + 4x - 2$ ，剩餘 $= -16$ 。

要則

1. 將 $f(x)$ 依 x 的降冪排列，以 0 作係數補足其中所缺的項。然後詳細排成三線。
2. 於第一線將 $f(x)$ 的係數，按 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ 的順序排列。將 a_0 書於第三線中第一位。
3. 以 r 乘 a_0 ，將此積 $a_0 r$ 置於 a_1 的下方相加，其和書於第三線的第二位。
再以 r 乘此和而將所得之積，置於 a_2 的下方相加，得和書於第三線第三位；餘倣此，至 $f(x)$ 的最後一係數而止。
4. 第三線中最後一數為剩餘。其他諸數字則為商中 x 各冪的係數，依照 x 的降冪而排列者。

例 1. 試以 $(x+3)$ 或 $[x-(-3)]$ 除 $(2x^4 - 12x^2 - 5)$ 。

$$\begin{array}{r} \text{解：} \quad \begin{array}{rrrrrr} 2 & 0 & -12 & 0 & -5 & \overline{) -3} \\ & -6 & +18 & -18 & +54 & \\ \hline 2 & -6 & +6 & -18 & +49 & \end{array} \quad \text{剩餘} = 49 ; \end{array}$$

$$\frac{2x^4 - 12x^2 - 5}{x + 3} = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 18 + \frac{49}{x + 3} . \quad (1)$$

就例 1 言，依剩餘定理可知 49 為 $x = -3$ 時， $2x^4 - 12x^2 - 5$ 的值。本例說明綜合除法的下列一重要用途。

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{欲求 } x=r \text{ 時一多項式 } f(x) \text{ 的值，則以 } (x-r) \\ \text{依綜合除法除 } f(x) ; \quad \text{剩餘為 } f(r). \end{array} \right\} \quad (2)$$

例 2. 若 $f(x) = 3x^3 + 2x - 3$ ，試求 $f(-2)$ 。

解：以 $[x - (-2)]$ 或 $(x + 2)$ 除之，

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 0 \quad 2 \quad -3 \quad | \quad -2 \\
 -6 \quad +12 \quad -28 \\
 \hline
 3 \quad -6 \quad 14 \quad -31 = f(-2).
 \end{array}$$

習 題 21-3

試由綜合除法求商及剩餘；題1亦以尋常的長除法除之。

- $(4x^2 + 3 - 2x) \div (x - 3)$.
- $(3x - 7 + 2x^2) \div (x + 4)$.
- $(3x^3 - x^2 + 2x - 7) \div (x - 2)$.
- $(-2x^3 - 4x^2 + 3x - 5) \div (x - 3)$.
- $(2x^3 - 5x^2 + 7) \div (x - 2)$.
- $(-3x^3 + 2x - 75) \div (x + 3)$.
- $(2x^3 + 5x^2 - 4x - 5) \div (x + \frac{1}{2})$.

由綜合除法解之：

- 若 $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x^2 - x + 7$ ，試求 $f(2)$ ； $f(-3)$ 。
- 若 $f(x) = -2x^4 + 5x^3 - 2x^2 - 7x + 5$ ，試求 $f(3)$ ； $f(-2)$ 。
- 除兩次，試求 $(x^4 - 12x^3 + 46x^2 - 60x + 9) \div (x - 3)^2$ 。
- 不用除法而用因式定理，試證 $(x - 1)$ 為 $(x^2 - 1)$ 的一因式。
- 由上題方法試證 $(x + c)$ 為 $(x^6 - c^6)$ 的一因式。

21.4 多項式的圖形

多項式 $f(x)$ 的圖形，為 $y = f(x)$ 的圖形。欲作其圖形時，可用綜合除法以計算 $f(x)$ 的值。吾人涉及一多項式的圖形時，常假定其諸係數皆為實數。

說明1. 函數 $f(x) = x^3 - 12x + 3$ 的圖形如右圖 21-1 所示。此圖由下列表作出：

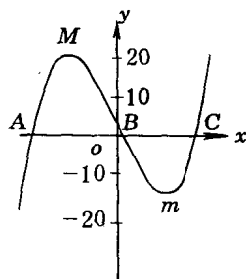


圖 21-1

若 $x =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
則 $y =$	-13	+12	+19	+14	+3	-8	-13	-6

圖上 M 點 ($x=2$ 處) 在曲線上較其鄰近任一點為高。故吾人稱 M 為此曲線的一極大點 (maximum point)。吾人說 $f(x)$ 於 $x=-2$ 處有一相對極大 (relative maximum)。因若 x 充分靠近於 $x=-2$ 時, $f(-2)$ 比 x 鄰近于 -2 的其他任何值 $f(x)$ 為大緣故。 m 點 ($x=2$ 處) 較圖形上此點鄰近的任一點低, 而稱為此圖形的一極小點 (minimum)。又吾人謂 $x=2$ 時此函數 $f(x)$ 有一相對極小 (relative minimum)。

註 1. 圖 21-1 及圖 21-2 諸曲線 I、II、III, 說明三次函數不同的圖形。

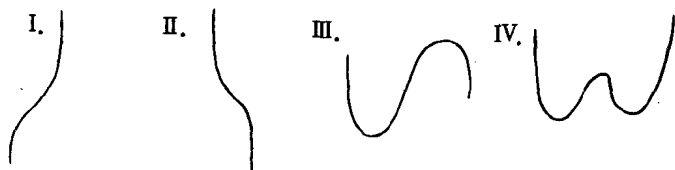


圖 21-2

一 n 次多項式 $f(x)$ 的圖形為一連續曲線至多含有 $(n-1)$ 個相對極大與極小, 在多數高等數學中此事可證明之。又此圖形為一光滑的曲線。亦即為無尖角的曲線這是可證明的。

注意方程式 $f(x)=0$ 的實根, 皆為方程式 $y=f(x)$ 圖形或曲線與 x 軸的諸截距。

例 1. 圖解 $x^3+3=12x$.

解: 1. 兩邊各減 $12x$ 得 $x^3-12x+3=0$.

2. 設 $f(x)=x^3-12x+3$. 方程式 $y=f(x)$ 的圖形, 為圖 21-1

所示。於 A, B, C 三點處 $f(x)$ 的值皆為零。故此種點的橫坐標皆為(1)的實根。此等根近似於 $x = -3.6$, $x = .3$, $x = 3.3$ 。稍後吾人可修正作圖法使產生的實根能達任何所欲的精確程度。

習題 21-4

試作下列各多項式的圖形。

1. x^3
2. $-x^3$
3. x^4
4. $-x^4$
5. $x^3 + 2x^2 - 3x + 4$
6. $-x^3 + 2x^2 - x + 1$
7. $-x^3 - 3x^2 + 6x + 7$
8. $x^3 - 3x^2 + 4x + 7$
9. $x^4 + 3x^3 - 6x^2 + 16x - 5$
10. $-x^4 + 24x^2 - 12x + 4$

圖解各題以求得諸實數根的近似值。

11. $x^3 - 4x^2 - 3x + 7 = 0$
12. $x^3 + x^2 - 7x - 8 = 0$

21.5 代數基本定理的結論

下列結果乃德國大數學家高斯 (Gohau Karl Friedrich Gauss (1777-1855)) 氏于 1799 年首先證明者。其證法超出本書的範圍，故從略。

代數基本定理

單含一變數的每一 n 次有理整方程式，至少有一根。

使用上述基本定理結果，吾人可設立下列諸定理，此處任何多項式或其因式中的係數，可為任何複數。

定理 21.5-1

若 $f(x)$ 為 x 的一 n 次多項式，中 $n > 0$ ；則存在有 x 的 n 個線性因式其積為 $f(x)$ 。

證明：1. 假定 $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$ 。

2. 由基本定理，知方程式 $f(x) = 0$ 至少有一個根。設 r_1