

51.63
LWD

按二階微分方程的 特徵函數的展开式

Б. М. 列維登著

科学出版社



按二階微分方程的 特徵函數的展開式

Б. М. 列維登著

張 變 譯

科 學 出 版 社

1958

Б. М. ЛЕВИТАН
РАЗЛОЖЕНИЕ ПО
СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА
ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1950

內 容 提 要

在古典的數學物理中，在將函數按照二階微分方程的特徵函數展開為富利葉級數時，主要假設區間是有限的，而且微分方程的係數是有界的。本書將這種理論推廣到無限區間與係數具有奇點的情形，其中所用的敘述是比較初等的。

本書共分七章，計有：在有限區間內的展開式；巴什瓦等式；二階微分算子的分譜；例；當 $q(x) \in L_{12}(0, \infty)$ 時展開式定理的精確化；豫解式；區間 $(-\infty, \infty)$ 。書末並有附錄兩個，討論了赫利定理與斯提傑司反轉公式，它們在正文中是常要用到的。讀者只要具有大學二年級的數學分析知識，即可閱讀本書的絕大部分而無困難。在少數章節中，稍微需要一些微分方程的解析理論的知識。

按二阶微分方程的特征函数的展开式

Б. М. 列維登著
張 燮 譯

*

科学出版社出版 (北京朝陽門大街 117 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 061 号

中国科学院印刷厂印刷 新华书店总經售

*

1958 年 5 月第 一 版
1960 年 1 月第二次印刷
(京) 1,772—4,271

书号: 1135 字数: 106,000
开本: 850×1168 1/32
印张: 4 7/16

定价: (10) 0.85 元

序 言

我們知道,在古典的數學物理中,任意函數關於二階微分方程的特徵函數展成富利葉級數的展開法是很重要的。除了一些重要的情形(貝塞爾函數,勒讓德,切比雪夫-愛爾密特,拉蓋爾多項式等等)以外,在古典的數學物理中,通常都作這樣的假設:區間是有限的;方程式的係數是有界的。

將理論推廣到無窮區間或者係數有奇點的情形時,遭遇到重大的困難:一直到創造了希爾貝脫空間中的綫性算子的分譜理論以後,這種推廣才有可能。H. 懷爾曾經作出相當完備的這種推廣¹⁾。其後有很長的時期,關於這種問題的新著作幾乎沒有出現。想必這種情形的緣由是由於當時沒有有趣的應用所致。

物理學家在量子力學方面的工作作出了新的推動。他們指出,在許多情形之下,原子能大小的決定,都可以化爲二階微分方程的特徵值的問題。

進一步的前進主要歸功於物理學家的努力。然而必須指出,在物理學教本中所推演的證明,往往不能滿足近代數學的嚴格性

1) Weyl H.:

- (1) Über gewöhnliche lineare Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, Göttinger Nachrichten (1909), 37—64 頁。
- (2) Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, Math. Ann., 68 (1910), 220—269 頁。
- (3) Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit singulären Stellen und ihre Eigenfunktionen, Göttinger Nachrichten (1910), 442—467 頁。

的要求。

1946 年提契瑪希的書出版¹⁾，其中給出了主要問題的新的敘述，還包括了許多由於量子物理學的發展而產生的問題。提契瑪希證明廣義富利葉積分的展開式的基本定理所用的方法，和 А. И. 普列斯涅爾²⁾證明一般的分譜定理的方法相仿。

作者在本書內提供了新的方法，用以證明廣義富利葉積分的展開式定理。就我所知，這種方法比較簡單而且完全是初等的。用這種方法也可以研究各種微分算子的分譜而無特別困難，這些算子在整個理論中對我是最有興趣的。

爲了讀者的便利起見，我在第一章裏面敘述了有限區間的施圖姆-留維爾問題的必要知識。此外還有兩個附錄，其中推演了數學分析的重要定理，這些定理是正文中所必需的。這樣，閱讀本書時並不要熟悉數學分析中的特殊問題。只有講例題的一章，它需要參考微分方程的解析理論的少數事實。讀者如果對於這些事實不很熟悉的話，可以承認它們的真確性，或者根本略去那些例子。對於以後的正文的理解而言，這些例子是無關重要的。

Л. А. 朱多夫曾經校閱原稿，並提出許多重要的意見，作者在此謹誌以衷心的謝忱。

Б. М. 列維登

1949 年 10 月

-
- 1) Titchmarsh, E. C., *Eigenfunctions expansions associated with second-order differential equations*, Oxford (1946).

在此書內列有詳細的到 1946 年爲止的參考文獻。關於新的文獻，可以參看 *American Journal of Mathematics* 1947—1949 年所登載的一些論文，這些論文主要是討論在各種特殊假設下的分譜。

- 2) Плеснер, А. И., *Спектральная теория линейных операторов*, I, *Успехи математических наук*, т. IX (1941), 84 頁。

目 錄

序言.....	i
第一章 在有限區間內的展開式.....	1
§ 1. 特徵值與特徵函數的漸近式.....	1
§ 2. 特徵函數的零點.....	11
§ 3. 關於按特徵函數展開的定理.....	16
§ 4. 展開式定理的精確化.....	24
第二章 巴什瓦等式.....	29
§ 1. 區間 $(0, \infty)$	29
§ 2. 區間 $(-\infty, \infty)$	35
第三章 二階微分算子的分譜.....	39
§ 1. $q(x) \subset L(0, \infty)$ 的情形.....	39
§ 2. 基本方程的變換.....	47
§ 3. $q(x) \rightarrow -\infty$ 的情形.....	50
§ 4. $q(x) \rightarrow +\infty$ 的情形.....	57
§ 5. 當 $q(x) \rightarrow +\infty$ 時, 特徵函數零點的進一步研究.....	58
第四章 例.....	63
§ 1. 古典的富利葉積分.....	63
§ 2. 亨克爾反轉公式.....	63
§ 3. 包含貝塞爾函數的其他展開式.....	66
§ 4. 愛爾密特多項式.....	67
§ 5. “氫原子”.....	68
第五章 當 $q(x) \subset L_{12}(0, \infty)$ 時展開式定理的精確化	72
§ 1. 當 $q(x) \subset L_{12}(0, \infty)$, $f(x) \subset L_{12}(0, \infty)$, $\{f'' - q(x)f\} \subset L_{12}(0, \infty)$ 時展開式定理的精確化.....	72

§ 2. $\omega(x, \lambda), \mu(\lambda), \nu(\lambda)$ 的漸近公式的精確化	75
§ 3. 展開式定理的精確化	80
第六章 豫解式	84
§ 1. 懷爾圓與懷爾點	84
§ 2. 豫解式的積分表現	89
§ 3. 直交性	96
§ 4. 巴什瓦的互逆公式	106
§ 5. $\rho(\lambda)$ 的公式	109
第七章 區間 $(-\infty, \infty)$	114
§ 1. 豫解式	114
§ 2. $\xi(\lambda), \eta(\lambda), \zeta(\lambda)$ 的公式	120
附錄 I. 赫利定理	129
附錄 II. 斯提傑司反轉公式	133

第一章

在有限區間內的展開式

§ 1. 特徵值與特徵函數的漸近式

1. 設 (a, b) 爲有限的閉區間, $q(x)$ 爲此區間內的連續實值函數. 任取實數 α, β 而考慮邊界問題 (λ 是參數):

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0, \quad (1.1.1)$$

$$\left. \begin{aligned} y(a) \cos \alpha + y'(a) \sin \alpha &= 0, \\ y(b) \cos \beta + y'(b) \sin \beta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.2)$$

我們可以假設 $\alpha = 0, \beta = \pi$ 而不失一般性. 事實上, 令 $x' = \frac{x-a}{b-a}\pi$ 即可將區間 (a, b) 變換爲區間 $(0, \pi)$, 而此時邊界問題 (1.1.1) — (1.1.2) 的形式不變.

假定當某個 λ_1 時, 所論的邊界問題具有非不足論的解 $y(x, \lambda_1)$ [$y(x, \lambda_1) \not\equiv 0$]. 此時稱 λ_1 爲特徵值, 而對應的函數 $y(x, \lambda_1)$ 稱爲特徵函數.

引理 1.1.1. 對應於不同的特徵值的特徵函數 $y(x, \lambda_1), y(x, \lambda_2)$ 彼此直交, 也就是

$$\int_0^\pi y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0 \quad (\lambda_1 \neq \lambda_2).$$

證: 設 $f(x), g(x)$ 爲兩次可微的連續函數. 令

$$Lf = f''(x) - q(x)f(x).$$

用兩回部分積分法, 則得恆等式

$$\begin{aligned} \int_0^\pi Lf \cdot g(x) dx &= \\ &= W_\pi\{f, g\} - W_0\{f, g\} + \int_0^\pi f(x) \cdot Lg dx, \quad (1.1.3) \end{aligned}$$

其中

$$W_x\{f, g\} = \begin{vmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{vmatrix}.$$

設 $f(x) = y(x, \lambda_1)$, $g(x) = y(x, \lambda_2)$, 則由邊界條件 (1.1.2) 易於推出

$$W_\pi\{f, g\} = W_0\{f, g\} = 0.$$

故由恆等式 (1.1.3) 即知

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \int_0^\pi y(x, \lambda_1) y(x, \lambda_2) dx = 0;$$

但 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 所以引理得證.

引理 1.1.2. 邊界問題 (1.1.1) — (1.1.2) 的特徵值是實數.

證: 設 $\lambda_1 = u + iv$ 為複特徵值. 因 $q(x)$ 為實值函數而 α, β 為實數, 故 $\bar{\lambda}_1 = u - iv$ 亦為特徵值, 並具有特徵函數 $\bar{y}(x, \lambda)$.

由前一個引理可知

$$\int_0^\pi |y(x, \lambda_1)|^2 dx = 0,$$

從而

$$y(x, \lambda_1) \equiv 0.$$

2. 令 $\text{ctg } \alpha = -h$, $\text{ctg } \beta = H$, 則邊界條件 (1.1.2) 可以改寫為

$$\left. \begin{aligned} y'(0) - hy(0) &= 0, \\ y'(\pi) + Hy(\pi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.1.2')$$

例如在熱流的問題中, 邊界條件即呈此種形式. 我們先設 $h \neq \infty$, $H \neq \infty$ (即 $\sin \alpha \cdot \sin \beta \neq 0$). 在其他情形下隨時再加以修改.

用 $\omega(x, \lambda)$ 代表方程 (1.1.1) 的滿足初始條件

$$\omega(0, \lambda) = 1, \quad \omega'(0, \lambda) = h$$

的解。令 $\lambda = s^2$ 而將方程(1.1.1)改寫為

$$y'' + s^2 y = q(x)y$$

的形式。將右邊看作已知函數，並用任意常數的變化法，則得

$$\begin{aligned} \omega(x, \lambda) = & \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \\ & + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-t) q(t) \omega(t, \lambda) dt. \quad (1.1.4) \end{aligned}$$

引理 1.1.3. 當 $\lambda \geq 0$ 時

$$|\omega(x, \lambda)| \leq M,$$

其中 M 為常數(與 x, λ 無關)。

證：設 $M_\lambda = \max_x |\omega(x, \lambda)|$ 。由常微分方程的解的存在性定理可知， M_λ 是存在的。

從(1.1.4)可以推出

$$M_\lambda \leq 1 + \frac{|h|}{s} + \frac{M_\lambda}{s} \int_0^\pi |q(t)| dt,$$

從而

$$M_\lambda \left(1 - \frac{1}{s} \int_0^\pi |q(t)| dt \right) \leq 1 + \frac{|h|}{s}.$$

由此可知，倘若

$$1 - \frac{1}{s} \int_0^\pi |q(t)| dt > 0, \quad \text{即} \quad s > \int_0^\pi |q(t)| dt,$$

則

$$M_\lambda \leq \frac{1 + \frac{|h|}{s}}{1 - \frac{1}{s} \int_0^\pi |q(t)| dt}.$$

從這個估值式即可推知，當 $s > \int_0^\pi |q(t)| dt$ 時

$$M_\lambda < 2 + |h| \left(\int_0^\pi |q(t)| dt \right)^{-1}.$$

又當 $s \leq 2 \int_0^\pi |q(t)| dt$ 時, $\omega(x, \lambda)$ 也是有界的, 理由也是根據證法開始所引的存在定理。

3. 現在推導特徵值與特徵函數的漸近公式。由這些公式特別可以導出一點: 有無窮個特徵值存在。

對於任何 λ 而言, 函數 $\omega(x, \lambda)$ 顯然滿足邊界條件(1.1.2)中的第一個。因此, 如果將函數 $\omega(x, \lambda)$ 代入第二個邊界條件, 我們便可以確定特徵值。

將公式(1.1.4)對 x 微分, 則得

$$\begin{aligned} \omega'_x(x, \lambda) &= -s \sin sx + h \cos sx + \\ &+ \int_0^x \cos s(x-t) \omega(t, \lambda) q(t) dt. \end{aligned} \quad (1.1.4')$$

將(1.1.4)與(1.1.4')代入(1.1.2')的第二個邊界條件, 即有

$$\begin{aligned} &-s \sin s\pi + h \cos s\pi + \int_0^\pi \cos s(\pi-t) \omega(t, \lambda) q(t) dt + \\ &+ H \left[\cos s\pi + \frac{h}{s} \sin s\pi + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{s} \int_0^\pi \sin s(\pi-t) \omega(t, \lambda) q(t) dt \right] = \\ &= \sin s\pi \left[-s + \int_0^\pi \sin st \cdot \omega(t, \lambda) q(t) dt + \right. \\ &+ \frac{Hh}{s} + \frac{H}{s} \int_0^\pi \cos st \cdot \omega(t, \lambda) q(t) dt \left. \right] + \\ &+ \cos s\pi \left[h + \int_0^\pi \cos st \cdot \omega(t, \lambda) q(t) dt + \right. \\ &+ \left. H - \frac{H}{s} \int_0^\pi \sin st \cdot \omega(t, \lambda) q(t) dt \right] = \\ &= \sin s\pi [-s + B] + A \cos s\pi = 0, \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

其中

$$A = h + H + \int_0^\pi \left\{ \cos st - \frac{H}{s} \sin st \right\} \omega(t, \lambda) q(t) dt,$$

$$B = \frac{Hh}{s} + \int_0^\pi \left\{ \sin st + \frac{H}{s} \cos st \right\} \omega(t, \lambda) q(t) dt.$$

但 $\omega(t, \lambda)$ 爲有界函數, 故方程 (1.1.5) 可以寫成

$$-s \sin s\pi + k \cos s\pi + O(1) = 0, \quad (1.1.5')$$

其中 $k = h + H$ 是常數. 對於大數 s 而言, 方程 (1.1.5') 顯然有解, 而且根靠近整數. 由此即可推知有無窮個特徵值存在. 現在我們證明, 由某個充分大的整數 n 開始, 靠近每個 n 只有方程 (1.1.5') 的一個根.

將方程 (1.1.5') 左邊對 s 微分, 則得

$$-\sin s\pi - s\pi \cos s\pi - k\pi \sin s\pi + O(1).$$

當 s 靠近整數時, 此式不能等於零.

令 $s_n = n + \delta_n$, 則方程 (1.1.5') 可以改寫爲

$$-(n + \delta_n) \sin \pi \delta_n + k \cos \pi \delta_n + O(1) = 0.$$

由此可知, $\sin \pi \delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, 也就是 $\delta_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

這樣, 當 n 很大時, 方程 (1.1.5') 的根便有如下的形式:

$$s_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right). \quad (1.1.6)$$

4. 假設 $q(x)$ 具有有界的導數. 在這種情形下, 公式 (1.1.6) 可以大大地精確化.

由公式 (1.1.4) 可知, $\omega(t, \lambda) = \cos st + O\left(\frac{1}{s}\right)$. 將此式代入 A, B 的公式中, 則得

$$\begin{aligned} A &= h + H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) dt + \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) \cos 2st dt + O\left(\frac{1}{s}\right), \end{aligned}$$

$$B = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) \sin 2st \, dt + O\left(\frac{1}{s}\right).$$

用部分積分法可得

$$\int_0^\pi q(t) \cos 2st \, dt = O\left(\frac{1}{s}\right),$$

$$\int_0^\pi q(t) \sin 2st \, dt = O\left(\frac{1}{s}\right).$$

故有

$$A = h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right), \quad h_1 = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) \, dt,$$

$$B = O\left(\frac{1}{s}\right).$$

於是方程(1.1.5)便可以寫成

$$\operatorname{tg} s\pi = \frac{h + H + h_1 + O\left(\frac{1}{s}\right)}{s + O\left(\frac{1}{s}\right)}. \quad (1.1.7)$$

從而再令 $s_n = n + \delta_n$ 即得

$$\operatorname{tg} \pi \delta_n = \frac{h + H + h_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

故有

$$\delta_n = \frac{h + H + h_1}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

也就是

$$s_n = n + \frac{c}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad (1.1.8)$$

其中 c 爲常數。

利用公式(1.1.8), 便可以得到特徵函數 $\omega(x, \lambda_n) = u_n(x)$ 的漸近公式。在公式(1.1.4)中, 將 $\omega(t, \lambda)$ 代以 $\cos st + O\left(\frac{1}{s}\right)$, 再

利用函數 $q(t)$ 的可微性, 則得

$$\begin{aligned}\omega(x, \lambda) &= \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \\ &\quad + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-t) \cos st q(t) dt + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = \\ &= \cos sx + \frac{h}{s} \sin sx + \frac{\sin sx}{2s} \int_0^x q(t) dt + O\left(\frac{1}{s^2}\right).\end{aligned}$$

將此處的 s 代以 s_n , 則有

$$\begin{aligned}\omega(x, \lambda_n) &= u_n(x) = \cos nx - \frac{cx}{n} \sin nx + \\ &\quad + \frac{h}{n} \sin nx + \frac{\sin nx}{2n} \int_0^x q(t) dt + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = \\ &= \cos nx + \frac{\beta(x)}{n} \sin nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right),\end{aligned}$$

其中

$$\beta(x) = -cx + h + \frac{1}{2} \int_0^x q(t) dt.$$

欲將特徵函數 $u_n(x)$ 就範化, 可以考慮積分

$$\begin{aligned}\alpha_n^2 &= \int_0^\pi u_n^2(x) dx = \\ &= \int_0^\pi \cos^2 nx dx + \frac{1}{n} \int_0^\pi \beta(x) \sin 2nx dx + O\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

根據函數 $\beta(x)$ 的可微性可以推知

$$\int_0^\pi \beta(x) \sin 2nx dx = O\left(\frac{1}{n}\right),$$

故有

$$\alpha_n^2 = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\frac{1}{\alpha_n} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

於是對於就範的特徵函數而言,便有如下的漸近公式:

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \cos nx + \frac{\beta(x)}{n} \sin nx \right\} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \quad (1.1.9)$$

5. 現在分析 $h = \infty$, $H \neq \infty$ 的情形. 此時(1.1.2)的第一個邊界條件成爲

$$y(0) = 0.$$

用 $\omega(x, \lambda)$ 代表方程(1.1.1)的滿足初始條件

$$\omega(0, \lambda) = 0, \quad \omega'(0, \lambda) = 1$$

的解. 於是對於 $\omega(x, \lambda)$ 便有積分方程

$$\omega(x, \lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s} \int_0^x \sin s(x-t) \omega(t, \lambda) q(t) dt. \quad (1.1.10)$$

微分此式得

$$\omega'_x(x, \lambda) = \cos sx + \int_0^x \cos s(x-t) \omega(t, \lambda) q(t) dt.$$

因此由(1.1.2')中的第二個邊界條件即可推知

$$\begin{aligned} & \cos s\pi + \int_0^\pi \cos s(\pi-t) \omega(t, \lambda) q(t) dt + \\ & + H \left[\frac{\sin s\pi}{s} + \frac{1}{s} \int_0^\pi \sin s(\pi-t) \omega(t, \lambda) q(t) dt \right] = 0. \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

因 $\omega(t, \lambda) = O\left(\frac{1}{s}\right)$, 故由方程(1.1.10)可知

$$\omega(x, \lambda) = \frac{\sin sx}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right). \quad (1.1.10')$$

因此, (1.1.11)便有如下形式:

$$\begin{aligned} & \cos s\pi + \frac{1}{s} \int_0^\pi \cos s(\pi-t) \sin st \cdot q(t) dt + \\ & + H \frac{\sin s\pi}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (1.1.12)$$

現在仍設 $q(t)$ 具有有界的導數, 則得

$$\begin{aligned}
& \int_0^\pi q(t) \cos s(\pi-t) \sin st \, dt = \\
& = \cos s\pi \int_0^\pi q(t) \cos st \sin st \, dt + \\
& \quad + \sin s\pi \int_0^\pi q(t) \sin^2 st \, dt = \\
& = \frac{\sin s\pi}{2} \int_0^\pi q(t) \, dt + O\left(\frac{1}{s}\right).
\end{aligned}$$

所以方程(1.1.12)便成爲

$$\begin{aligned}
& \cos s\pi + \frac{\sin s\pi}{s} \left[H + \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t) \, dt \right] + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = \\
& = \cos s\pi + H_1 \frac{\sin s\pi}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0. \quad (1.1.12')
\end{aligned}$$

由此方程即可看出,當 s 很大時,方程的根 s_n 與形式如 $n + \frac{1}{2}$ 的數目相近,其中 n 是整數。此外,和前面一樣,也可以證明,由某個相當大的整數 n 開始,與每個數目 $n + \frac{1}{2}$ 相近的只有方程(1.1.12')的一個根。

令 $s_n = n + \frac{1}{2} + \delta_n$, 則方程(1.1.12')可以寫成

$$\operatorname{ctg} \left(n + \frac{1}{2} + \delta_n \right) \pi = -\operatorname{tg} \pi \delta_n = -\frac{H_1}{n + \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

因此

$$\delta_n = \frac{H_1}{\pi \left(n + \frac{1}{2} \right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

從而

$$s_n = n + \frac{1}{2} + \frac{H_1}{\left(n + \frac{1}{2} \right) \pi} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

將此值代入公式(1.1.10'), 便得到

$$u_n(x) = \omega(x, \lambda_n) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x}{n + \frac{1}{2}} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

由此可以推出, 就範特徵函數的公式為

$$v_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)x + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$h \neq \infty, H = \infty$ 的情形可以化為上述情形, 只須令 $t = \pi - x$ 即可.

6. 最後, 我們分析 $h = \infty, H = \infty$ 的情形. 這時上款的函數 $\omega(x, \lambda)$ 要滿足條件 $\omega(\pi, \lambda) = 0$. 故由(1.1.10)可知:

$$\sin s\pi + \int_0^\pi \sin s(\pi - t)q(t)\omega(t, \lambda)dt = 0,$$

或

$$\begin{aligned} \sin s\pi \left[1 + \int_0^\pi \cos st \cdot \omega(t, \lambda)q(t)dt \right] - \\ - \cos s\pi \int_0^\pi \sin st \cdot \omega(t, \lambda)q(t)dt = 0. \end{aligned}$$

但 $\omega(t, \lambda) = \frac{\sin st}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right)$, 故由上式可得

$$\begin{aligned} \sin s\pi - \frac{1}{2s} \cos s\pi \int_0^\pi q(t)dt + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = \\ = \sin s\pi - \frac{\alpha}{s} \cos s\pi + O\left(\frac{1}{s^2}\right) = 0, \quad \alpha = \frac{1}{2} \int_0^\pi q(t)dt. \end{aligned}$$

於是同第4款一樣, 由此可以推出

$$s_n = n + \frac{\alpha}{\pi n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

將此值代入公式(1.1.10'), 即得