高等学校教学用書

数学物理方程

C. Л. 索波列夫著

人民教育出版社

高等学校教学用书

数学物理方程

C. Л. 索波列夫著

錢 敏等譯

人民教育出版社

本書系根据苏联技术理論書籍出版社(Государственное издательство технико-теоретической литературы)出版的索波列夫(С. Л. Соболев)著"数学物理方程"(Уравнения математической физики) 1954 年修訂第三版譯出。原書經苏联高等教育部审定为国立綜合大学力学-数学及物理-数学系教科書。

本書共三十講，討論了数学物理方程中的許多問題，尤其是著名的狄里克萊及諾依曼問題。本書利用了积分方程作为主要的工具，是它的一大特点。

本書譯稿原系中国科学院数学研究所偏微分方程組諸同志及北京大学錢敏同志等根据原書 1950 年第二版譯出，其后由北京航空学院楊应辰同志及中国科学院数学研究所偏微分方程組諸同志等将譯稿按照原書 1954 年第三版增訂。

数学物理方程

С. Л. 索波列夫著

錢 敏等譯

人民教育出版社出版 高等学校教学用书編輯部 北京宣武門內承恩寺 7 号

(北京市书刊出版业营业許可証出字第 2 号)

商务印书館上海厂印装

新华书店上海发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 13010·536 开本 787×1092 1/16 印張 19 5/8

字数 415,000 印数 20,001—24,000 定价(4) ¥ 1.50

1958 年12月第 1 版 1961 年 9 月上海第 6 次印刷

第三版序

"数学物理方程"教程的第三版与經过重大修正的第二版相差无几。在第二版中已經删去了关于黎斯方法的那一講，因为与教程的其它各講放在一起，显得有些特殊。在勒貝格重积分理論中，以及在积分方程理論中，都作了一些簡化。富理叶方法的基础論証得更精密了。

无論在第二版里或是在第三版里，都在个别地方进行了風格上的改善，并更正了不够好的表述法。

此外，本書編輯維·斯·列宾克在第三版中更詳尽地發揮了关于数学物理方程的解对于补充条件的依从性的一講。

在再版与三版之际許多同志向著者提的宝貴的意見，著者表示感謝。尤其是維·依·斯米尔諾夫院士与第三版編輯維·斯·列宾克提的宝貴的意見。

斯·索波列夫

第一版序

本書系由著者在以罗蒙諾索夫命名的国立莫斯科大学所講授的教程改編而成。因此著者保存了各講的名称。同样这也說明了本書材料的选擇，它在范圍上受了講授时数的限制。

著者要向維·依·斯米尔諾夫院士表示热忱的感謝，他曾讀过本書的原稿，提供了一系列宝貴的意見。著者也要为了維·維·斯捷巴諾夫教授的有益指示而向他表示感謝。

斯·索波列夫

目 录

第 I 講　基本方程的推导

数学物理方程論的研究对象是描述各种自然現象的微分方程，积分方程，以及函数方程。这个課程的确切范圍，像在通常的情形一样，确定起来是相当困难的。此外，和数学物理方程有关諸問題的多种多样性也不允許我們把这些問題相当詳尽地包罗到一本大学教科書里去。本書的內容只不过是数学物理方程广闊的理論中的一部份。書內所引进的材料，只是我們認为在初步認識这門理論中最重要的材料。

我們的教程主要是从事于研究含一个未知函数的二級偏微分方程，特别地是波动方程，拉普拉斯方程和傳热方程，卽一般所謂的經典数学物理方程。

順便我們还考慮一些相关問題的必要理論。

§1. 奥斯脫洛格拉特斯基公式

在开始推导我們以后所要研究的数学物理方程之前，我們先回想一下积分学中的一个公式，卽关于变換面积分为体积分的公式。

令 $P(x, y, z)$，$Q(x, y, z)$ 及 $R(x, y, z)$ 为变数 x, y, z 的三个函数，給定在某个区域 D 上，而且它們在該区域內有对 x, y 和 z 的一級連續微商。

在 D 內考慮某封閉曲面 S，它由有限多塊具連續变化切面的曲面所組成。

这样的封閉曲面叫做是分塊平滑的。此外，我們还假設凡平行于坐标軸的直綫或者只和曲面相交于有限多个点，或者与曲面有一共同的綫段。

考慮积分
$$\iint_S [P\cos(n, x) + Q\cos(n, y) + R\cos(n, z)]\,dS, \tag{I.1}$$

其中 $\cos(n, x)$，$\cos(n, y)$ 和 $\cos(n, z)$ 表示曲面 S 上的內向法綫和各坐标軸之間夹角的余弦，而 dS 則表示正的曲面元素。若采用矢量表示法，我們可以認为 P, Q, R 是某个矢量的三个分量，这个矢量我們用一个字母 $\boldsymbol{T}$ ① 来表示。于是

$$P\cos(n, x) + Q\cos(n, y) + R\cos(n, z) = T_n,$$

其中 T_n 是矢量 $\boldsymbol{T}$ 在內向法綫方向上的投影。

积分学的經典定理使我們可以由面积分(I.1)轉向到体积分，这个积分布展在滿足上列限制的曲面 S 所限定的区域 D 上。我們将有：

$$\iint_S [P\cos(n, x) + Q\cos(n, y) + R\cos(n, z)]\,dS = -\iiint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz$$

或者用矢量表示

① 关于 P, Q, R 假定：它們直到区域的边界皆連續，在区域 D 內則有一級連續的微商。

$$\iint_S T_n\,dS = -\iiint_D \operatorname{div}\,\boldsymbol{T}\,dv, \tag{I.2}$$

其中 dv 表示体积微分，而

$$\operatorname{div}\,\boldsymbol{T} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{I.3}$$

(符号 div 讀作"散度")。

我們上面所引进的公式在对 S 的性質作了更一般性的假定后还是对的。特别地，公式(I.2)可用于任意分塊平滑的曲面 S，它是限定区域 D 的。

往后，如果沒有附帶声明，我們总把"曲面"这二个字了解为分塊平滑的曲面。

由公式(I.2)可得出一个重要的推論。

引理 1　設 F 为給定在欧几里德三維空間中某区域上的連續函数。若欲对在矢量函数 $\boldsymbol{T}$ 的定义域内，限定区域 Ω 的任意曲面 S 而言，等式

$$\iint_S T_n\,dS - \iiint_\Omega F\,dv = 0 \tag{I.4}$$

皆成立，其充分和必要条件为：

$$\operatorname{div}\,\boldsymbol{T} + F = 0。$$

应用公式(I.2)，等式(I.4)可化为

$$\iiint_\Omega (\operatorname{div}\,\boldsymbol{T} + F)\,dv = 0。$$

这样引理中所述条件的充分性显然已确立。我們証其必要性。事实上，設在某一点 A 函数 $\operatorname{div}\,\boldsymbol{T}+F$ 不等于零，設为正，則由于連續性，在点 A 的邻近也是如此，于是积分

$$\iiint_\omega (\operatorname{div}\,\boldsymbol{T} + F)\,dv$$

当布展在圍繞 A 的小区域 ω 上时，将不等于零，而(I.4)的左边也将同样不等于零。因此，我們的假設是和所給的条件相矛盾的。等式

$$\operatorname{div}\,\boldsymbol{T} + F = 0$$

的必要性于是得証。

用完全同样的方式可以証明平面上二維区域的一条类似的引理。

§2. 弦的振动方程

我們考虑拉紧在两点間的一条弦。所謂的弦就是其長度远超过了其它尺寸的固体。作用在这物体上的張力假設是相当大的。所以在它弯曲时所生的抵抗力比之于張力，可以略去。

設弦在靜止状态中的方向和 Ox 軸的方向一致。在一横向的力的影响下弦自然会取另一种形状，一般說来这是非直綫形的。

假如我們在某一点 x 把弦截为两部份，則右边部份給左边部份的影响表示为力 $\boldsymbol{T}(x)$，它

是沿弦的切綫方向的（圖1）。为了討論簡單化，姑且認为弦的运动發生在一个平面内，而用 u 表示它离开平衡位置的距离。設弯曲的弦綫在 xOu 平面内的方程为 $u=u(x,t)$。用 $\rho(x)$ 表示弦的綫密度，即，弦的小段質量和其長度的比值的極限。

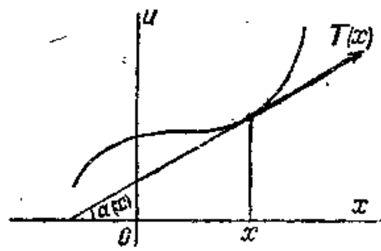

圖 1.

首先考虑处于平衡中的弦。

設想弦是处在横向力 $p(x)$ 的作用下。換句話說，就是假如我們分隔出弦上的一段 $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ 来加以考慮，則加在这一段弦上的力是朝 u 軸的方向，且其值等于 $\int_{x_1}^{x_2}p(x)\,dx$。用 $\alpha(x)$ 表示弦的切綫方向和 Ox 軸之間的夹角；于是作用在点 x_2 的張力在 u 軸上的投影为

$$|\boldsymbol{T}(x_2)|\sin\alpha(x_2)=T(x_2)\sin\alpha(x_2),$$

其中 $T(x)$ 是矢量 $\boldsymbol{T}(x)$ 的絕对值（長度），而在点 x_1 的張力在 u 軸上的投影为：

$$-|\boldsymbol{T}(x_1)|\sin\alpha(x_1)=-T(x_1)\sin\alpha(x_1)。$$

我們注意

$$\sin\alpha=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}。$$

把 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 这个量認为很小而略去其平方，我們得到一段弦的平衡条件为

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2}-T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1}+\int_{x_1}^{x_2}p(x)\,dx=0。\tag{I.5}$$

显然，

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_2}-T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=x_1}=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx。$$

这时条件(I.5)就变为：

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)+p(x)\right]dx=0。\tag{I.6}$$

(I.6)中积分号下的函数显然須恒等于零(否則將存在两点 x_1, x_2，对它們說来积分(I.6)不为零)，故方程(I.6)又可表为

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)+p(x)=0。\tag{I.7}$$

方程(I.7)是弦在横向力 $p(x)$ 作用下的平衡方程。

假如現在我們由靜的情形而轉向动的情形，即考虑弦的振动，那末利用达朗倍尔原理，在平衡方程中还必須加入弦的惰性力，惰性力的形式是

$$\int_{x_1}^{x_2}\left(-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx;$$

于是平衡条件为

$$\int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p(x)\right]dx=0,$$

而弦的振动方程乃是

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+p(x)=0。\tag{I.8}$$

我們将認为弦的振动是横向的。于是，作用于弦的任何一段上的所有的力的合力沿 Ox 軸的分量应該等于零。因为我們假設作用力 $p(x)$ 也是横向的，于是可写出等式

$$T\cos\alpha|_{x=x_1}-T\cos\alpha|_{x=x_2}=0,$$

其中 x_1 与 x_2 是任意两个数值。

由此，略去 α^2 級的量，我們得到：

$$T|_{x=x_1}=T|_{x=x_2},$$

或者説 T 与 x 无关。因此，在等式(I.8)中可以把 T 提到对 x 求微商符号的外边来。此外，如果再假設張力 T 与时間无关，卽設它是常数，并且密度 ρ 也是常数，而作用力 $p(x)$ 等于零，那末方程(I.8)就有形式：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\tag{I.9}$$

其中

$$a^2=\frac{T}{\rho}=\mathrm{const}。$$

方程(I.9)早在十八世紀就为丹尼·伯努利，达朗倍尔和欧拉所考虑过。

§ 3. 膜的振动方程

我們考慮一薄片，卽在各个方向均匀張紧了的很薄的固体。設在静止的状态該薄片位于 xOy 平面内。我們还假定它足够薄，因而不会因弯曲而产生抵抗力。这样的薄片我們称之为膜。

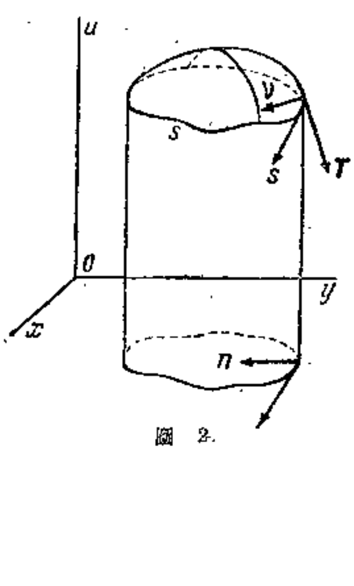

圖 2.

設在弯曲的状态下膜的方程为

$$u=u(t,x,y)。$$

无論我們在膜上分划出怎样的一个部份 S，我們認为膜的其余部份在 S 上作用力，是沿 S 边界的法綫方向且均匀分布在 S 边界上的張力 $\boldsymbol{T}$，而且它是在膜的切平面内(見圖 2)。

我們立出膜上 S 部份的平衡方程，S 系限定在曲綫 s 之内而且处在横向力的作用下。張力在 u 軸上的分量可用积分表为

$$\int_s T\cos(\boldsymbol{l},u)ds,\tag{I.10}$$

其中 T 是張力矢量 $\boldsymbol{T}$ 的長度，而 $\boldsymbol{l}$ 表示这样的一个矢量，它的方向和張力作用的方向一致。我們計算 $\cos(\boldsymbol{l}, u)$。

根据已知条件，$\boldsymbol{l}$ 的方向卽同时垂直于曲面 $u=u(t, x, y)$ 的內法向矢量 $\boldsymbol{\nu}$ 和閉路 s 的那个方向。而閉路 s 的所有切向矢量 $\boldsymbol{s}$ 本身又垂直于法綫 $\boldsymbol{\nu}$ 以及閉路 s 在 xOy 平面上的投影的內法向單位矢量 $\boldsymbol{n}$，这是因为切綫 $\boldsymbol{s}$ 和 s 在 xOy 平面上的投影的切綫同在投影柱的切面內。

故可取矢量积

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\nu}$$

为矢量 $\boldsymbol{s}$。考慮由下式所定义的矢量 $\boldsymbol{l}_1$:

$$\boldsymbol{l}_1=(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\nu})\times\boldsymbol{\nu}。$$

根据解析几何的公式我們有

$$\boldsymbol{l}_1=-\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{\nu}^2+\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{n}\,\boldsymbol{\nu})。$$

注意矢量 $\boldsymbol{n}$ 有分量 $\cos(n, x)$, $\cos(n, y)$, 0, 而矢量 $\boldsymbol{\nu}$ 的分量为 $-\frac{\partial u}{\partial x}$, $-\frac{\partial u}{\partial y}$, 1, 我們舍去包含 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$ 和 $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}$ 的二級无穷小量，就得到 $\boldsymbol{l}_1$ 分量的表示式:

$$-\cos(n, x),\quad -\cos(n, y),\quad -\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, x)-\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, y)。$$

矢量 $\boldsymbol{l}_1$ 的長度，准确到差一个高級无穷小时，等于 1。因此，在同样的准确度下，我們可以認为 $\boldsymbol{l}_1$ 就是張力作用綫方向的單位矢量 $\boldsymbol{l}$。

将以上表示式代入膜的平衡方程中，在目前的情形下卽代入形如

$$\iint_\omega p(x, y)\,dx\,dy+\int_s T\cos(\boldsymbol{l}, u)ds=0$$

的方程中，其中 $p(x, y)$ 表示單位面积上横向作用力的大小，而 ω 表示 S 在 xOy 平面上的投影，我們得到

$$\iint_\omega p(x, y)dx\,dy-\int_s\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, y)\right)T\,ds=0,$$

或者根据引理 1

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial u}{\partial y}\right)+p(x, y)=0。\tag{I.11}$$

膜的振动方程則可写为

$$\iint_\omega\left(p(x, y)-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)dx\,dy-\int_s T\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos(n, x)+\frac{\partial u}{\partial y}\cos(n, y)\right)ds=0,$$

其中 $\rho=\rho(x, y)$ 是膜的面积密度，或者按照引理 1 有:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(T\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(T\frac{\partial u}{\partial y}\right)+p(x, y)-\rho(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0。\tag{I.12}$$

当 T 和 ρ 为常数时，由 (I.12) 可得

$$T\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+p(x, y)=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}。\tag{I.13}$$

和 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，或者在三維空間中的

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

我們常名之为拉普拉斯算子，而用符号表为 Δu。这样方程(I.13)可写成

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\Delta u+\frac{\varphi(x, y)}{\rho}, \tag{I.14}$$

其中

$$a^2=\frac{T}{\rho}=\text{const}.$$

§4. 流体运动的連續性方程和拉普拉斯方程

在着手推导所謂連續性方程之前，我們先推出一个数学分析中的重要公式。考虑某个封閉的，分塊平滑的曲面 $S(t)$，它依賴于参数 t 而限定了可变的体积 $\Omega(t)$。設 $\rho(x, y, z, t)$ 是时間 t 和坐标的某个函数。考虑积分

$$Q(t)=\iiint\limits_{\Omega(t)}\rho\,dx\,dy\,dz,$$

我們要計算这个式子对时間的微商。

先考虑特殊情形：体积 $\Omega(t)$ 的表面是具有平行于 z 軸的母綫的柱面及曲面 $z=0$ 与 $z=\varphi(x,y,t)$，而 $z=\varphi(x,y,t)$ 是分塊平滑的曲面 $S(t)$ 的方程；微商 $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ 是有界的：$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|\leqslant M$。

在这种情况下有：

$$Q(t)=\iint\limits_{\Omega_1}\left[\int_0^{\varphi}\rho(x, y, z, t)\,dz\right]dx\,dy,$$

其中平面域 Ω_1 是体积 Ω 的表面位于 xOy 平面中的那部份。

为計算 $\frac{dQ}{dt}$，立出差分的比：

$$\begin{aligned}\frac{\Delta Q}{\Delta t}&=\frac{1}{\Delta t}\iint\limits_{\Omega_1}\left[\int_{\varphi(x,y,t)}^{\varphi(x,y,t+\Delta t)}\rho(x, y, z, t+\Delta t)\,dz\right]dx\,dy+\\&\quad+\frac{1}{\Delta t}\iint\limits_{\Omega_1}\left\{\int_0^{\varphi(x,y,t)}[\rho(x, y, z, t+\Delta t)-\rho(x, y, z, t)]\,dz\right\}dx\,dy=\\&=\iint\limits_{\Omega_1}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}\cdot\frac{1}{\Delta\varphi}\left[\int_{\varphi}^{\varphi+\Delta\varphi}\rho(t+\Delta t)\,dz\right]dx\,dy+\iint\limits_{\Omega_1}\left[\int_0^{\varphi}\frac{\rho(t+\Delta t)-\rho(t)}{\Delta t}dz\right]dx\,dy.\end{aligned}$$

取当 $\Delta t\to 0$ 时的極限，我們得到：

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\iint\limits_{\Omega_1}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\rho(x, y, \varphi)\,dx\,dy+\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}dx\,dy\,dz,$$

或

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}&=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz+\iint\limits_{z=\varphi}\rho\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}dx\,dy=\\&=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx\,dy\,dz-\iint\limits_{S}\rho\,\frac{\partial\varphi}{\partial t}\cos(n, z)\,dS,\end{aligned}$$

其中 n 是曲面 S 的内法綫方向。

表达式 $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ 叫做曲面 $S(t)$ 沿 z 軸方向的外观速度。可給它以很直观的解釋：$\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ 就是曲面 $z=\varphi$ 与直綫 $x=\text{const}$, $y=\text{const}$ 的交点沿着这直綫运动的速度。

我們来把外观速度写成别的样子。为此，我們把曲面族 $S(t)$ 表示成对 t 解出了的形式：

$$t=S(x, y, z)。$$

于是

$$\frac{\partial z}{\partial t}=-\frac{1}{\frac{\partial t}{\partial z}}。$$

但 $\frac{\partial t}{\partial z}$ 是矢量 $\operatorname{grad} t$ 在 z 軸上的分量，該矢量系沿曲面 S 的法綫方向且有分量：

$$\frac{\partial t}{\partial n}\cos(n, x), \quad \frac{\partial t}{\partial n}\cos(n, y), \quad \frac{\partial t}{\partial n}\cos(n, z)。$$

从而

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{\partial z}{\partial t}=-\frac{1}{\frac{\partial t}{\partial z}}=-\frac{1}{\frac{\partial t}{\partial n}\cos(n, z)}。$$

表达式 $\frac{1}{\frac{\partial t}{\partial n}}$ 叫做曲面沿法綫方向运动的外观速度。我們用 v_n 来表示它。对曲面沿 z 軸方向运动的外观速度而言（这个量我們用 v_z 来表示）我們有

$$v_z=\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{v_n}{\cos(n, z)}。$$

假如曲面 S 由以速度 v 运动着的質点所組成，则法向速度为

$$v_n=v_x\cos(n, x)+v_y\cos(n, y)+v_z\cos(n, z),$$

而我們的公式可以写为

$$\frac{d}{dt}\iiint\limits_{\Omega(t)}\rho\, dx\, dy\, dz=\iiint\limits_{\Omega(t)}\frac{\partial\rho}{\partial t}\, dx\, dy\, dz-\iint\limits_{S(t)}\rho\, v_n\, dS。\qquad (\text{I}.15)$$

在一般的情形，当曲面 $S(t)$ 有任意的表示式时，我們可得到同样的公式，因为 $S(t)$ 总可以分成有限多塊，使得对每一塊上的点說来，它的空間坐标的任何一个是另外两个的單值函数。

給公式(I.15)一个直观的物理解釋是很有用的。我們在某个瞬时于曲面 S 上分划出某一小塊 dS，而作 dS 上的各点在时間間隔 $(t, t+\Delta t)$ 内的軌道。这一小面积扫出了一塊体积，它几乎和以 $\boldsymbol{v}dt$ 为母綫的小斜柱体重合，这里 $\boldsymbol{v}$ 是曲面运动的速度矢量。这个柱体的体积等于底面积和高的乘积，即是 $v_n\, dt\, dS$。由曲面 S 的变位所引起的积分 $\iiint\rho\, d\Omega$ 的增加近似地等于积分

$$\iint\limits_{S}\rho\, v_n\, dt\, dS。$$

将上式除以 dt，再另外計算出由 ρ 的改变而引起的 Q 的增加，我們就得到公式(I,15)。

利用公式(1.15)我們可求得表示液体或气体的量在运动中的不变性方程。設流体的运动發生在空間的某一部份，而速度的分量 $v_x(x, y, z, t)$，$v_y(x, y, z, t)$ 和 $v_z(x, y, z, t)$ 是坐标和时間的給定函数。考慮一物質面 $S(t)$，它由一些一定的运动質点組成而限定某一个变动的体积 $\Omega(t)$。包含在体积 $\Omega(t)$ 内的流体的量等于

$$Q=\iiint\limits_{\Omega(t)} \rho(x, y, z, t)dx\,dy\,dz,$$

其中 $\rho(x, y, z, t)$ 是流体的密度。

因为流体不由外界添入也不会自行消灭，則它在这样一个体积中的量須保持为常数。对 t 求微商，可得

$$\frac{dQ}{dt}=\iiint\limits_{\Omega(t)}\frac{\partial\rho}{\partial t}d\Omega-\iint\limits_{S(t)}\rho\, v_n\, dS=0。$$

这个方程必須对任何曲面 S，在任何瞬时 t 都成立。应用引理1，可得

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{v})=0; \tag{I.16}$$

或者展开来就是：

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v_y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)=0。$$

这就是所謂的連續性方程，讓我們指出这个方程对不可压縮的均勻（即液体密度为常数）流体的运动情形的一种应用。不可压縮流体的有位勢运动的問題就是求一个未知函数 V 的問題，这个函数使得

$$\boldsymbol{v}=\mathrm{grad}\,V \text{ 或者 } v_x=\frac{\partial V}{\partial x},\quad v_y=\frac{\partial V}{\partial y},\quad v_z=\frac{\partial V}{\partial z}。$$

将速度的表示式代入連續性方程，可得

$$\rho\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right)=0,$$

或者

$$\Delta V=0, \tag{I.17}$$

其中 Δ 表示前面所引进的拉普拉斯算子 $\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$。方程(I.17)叫做拉普拉斯方程。往后，在我們定出了流体运动方程的完全組时，我們就可以确信滿足方程(I.17)的任意函数 V 事实上描写了流体的某种可能的运动。由此可見，在解决这种問題时，只要能求出所需要的方程(I.17)的解就够了。有时候速度 $\boldsymbol{v}$，因而函数 V，与时間无关。这种运动叫做稳定的。

§5. 傳热方程

由物理課程已知，热就是物質的質点作无秩序运动的結果。物体暖热的程度是由其温度决定的。在任一物体的热能 Q 和温度 T 之間存在以下簡單的关系：