高等学校数学教材配套辅导用书

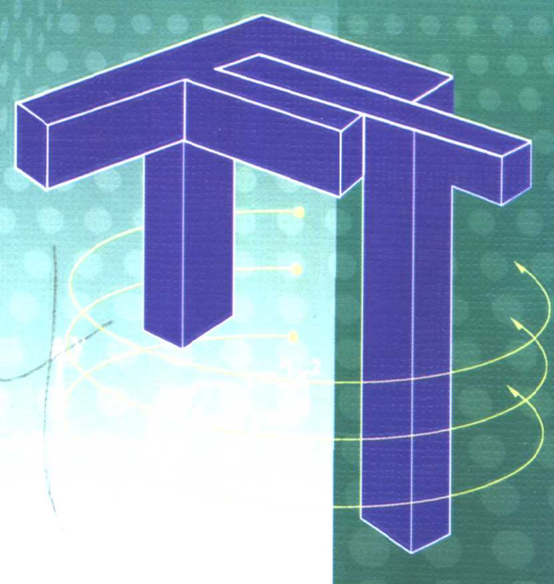
BEIDALONG

高等数学

习题解答

同济五版《高等数学》配套习题解答（下册）

主编：清华大学数学系　汪国柄



当代世界出版社

高等数学习题解答

同济五版《高等数学》配套习题解答

（下册）

主　编　清华大学数学系　汪国柄

当代世界出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题解答/汪国柄主编. —北京:当代世界出版社,2003.9
ISBN 7-80115-687-0

Ⅰ.高… Ⅱ.汪… Ⅲ.高等数学-高等教育-自学考试-解题
Ⅳ.013-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 080558 号

高等数学习题解答

出版发行:	当代世界出版社	**印　张:**	30 印张
地　址:	北京市复兴路 4 号	**字　数:**	80 千字
邮政编码:	100860	**版　次:**	2003 年 9 月第 1 版
网　址:	http:/www.worldpress.com.cn	**印　次:**	2003 年 9 月第 1 版
编务电话:	(010) 83908404	**印　数:**	1～5000 册
发行电话:	(010) 83908404	**书　号:**	ISBN7-80115-687-0/O·1
经　销:	全国新华书店	**定　价:**	32.00 元(上、下册)
印　刷:	北京市昌平北七家印刷厂印制	**本册定价:**	16.00 元
开　本:	850 毫米×1168 毫米 1/32		

前　言

同济大学应用数学系主编的《高等数学》,在全国许多高校被广泛采用,成人教育系统和高自考系统也多采用这套教材,影响较大。修改后的第五版,日臻完善。为使广大读者能更深入地理解高等数学的概念和理论,更好地掌握高等数学的解题方法,我们特聘请清华大学数学系汪国柄教授主编了这套与五版相配套的高等数学习题详解,全书与五版教材一致,也分为上、下两册。本书有以下特点:

第一,解题思路清晰,步骤详细,便于自学。

第二,对于一些难度较大的习题,先分析解题思路,再给出详细解答,这样可使读者学会怎样下手去解题。

第三,对于一些容易出错的解法,均给出点评,这样可使读者对于高等数学的概念和理论有更深入的理解。

第四,图文并茂。可使读者从几何意义出发去深入理解高等数学的概念和理论。

第五,不少习题,从不同角度出发,给出多种解法,可使读者的解题思路更为开阔。

本书是正在学习高等数学读者良师益友,希望读者在学习高等数学时,首先要独立思考,把有关概念和理论搞清楚,作题后再与本书相对照,这样就一定会有所收获,有所提高。如果不求甚解,照抄本书解答,那么,效果就会适得其反。

为了本书不断完善,欢迎广大读者在使用过程中提出宝贵意见。

策划组

2004 年 1 月

目　录

第八章　多元函数微分法及其应用

习题 8－1

1. 判定下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所成的点集(称为导集)和边界.

(1) $\{(x,y)\mid x\neq 0,y\neq 0\}$；　　(2) $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant 4\}$；

(3) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$；

(4) $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\geqslant 1\}\cap\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2\leqslant 4\}$.

解　(1)是开集,无界集;导集为 $\mathbf{R}^2$;边界为 $\{(x,y)\mid x=0$ 或 $y=0\}$；

(2)既非开集,又非闭集;是有界集;导集为 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$;边界为 $\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}$；

(3)是开集,无界集;导集为 $\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$;边界是 $\{(x,y)\mid y=x^2\}$;是区域(开区域)；

(4)是闭集,有界集;导集为集合自身;边界是 $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2=4\}$.

2. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$,试求 $f(tx,ty)$.

解　
$$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)\tan\frac{tx}{ty}$$
$$=t^2\left(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y}\right)$$
$$=t^2f(x,y).$$

3. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式：
$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

证　
$$F(xy,uv)=\ln(xy)\cdot\ln(uv)$$
$$=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)$$
$$=\ln x\cdot\ln u+\ln x\cdot\ln v+\ln y\cdot\ln u+\ln y\cdot\ln v$$
$$=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v).$$

4. 已知函数 $f(u,v,w)=u^w+w^{u+v}$,试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

解 $f(x+y,x-y,xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{(x+y)+(x-y)}$

$$=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}.$$

5. 求下列各函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$；

(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；

(4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}\quad(R>r>0)$；

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1)定义域是 $D=\{(x,y)\mid y^2-2x+1>0\}$；

(2)定义域是 $D=\{(x,y)\mid -x<y<x,x>0\}$；

(3)定义域是 $D=\{(x,y)\mid y\geqslant 0,x\geqslant\sqrt{y}\}$；

(4)定义域是 $D=\{(x,y)\mid y>x\geqslant 0,x^2+y^2<1\}$；

(5)定义域是 $D=\{(x,y,z)\mid r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}$；

(6)定义域是 $D=\{(x,y,z)\mid 0\neq x^2+y^2\geqslant z^2\}$.

6. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin xy}{y}$；　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)x^2y^2}$.

解 (1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}=\dfrac{1-0\times 1}{0^2+1^2}=1$；

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1^2+0^2}}=\ln 2$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{(2-\sqrt{xy+4})(2+\sqrt{xy+4})}{xy(2+\sqrt{xy+4})}$

$$= -\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1}{2+\sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4};$$

(4) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(\sqrt{xy+1}-1)(\sqrt{xy+1}+1)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} (\sqrt{xy+1}+1) = 2;$$

(5) $$\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin(xy)}{y} = \lim_{(x,y)\to(2,0)} x\cdot\frac{\sin(xy)}{xy}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(2,0)} x\cdot \lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin(xy)}{xy} = 2\times 1 = 2;$$

(6)当$(x,y)\to(0,0)$时，$1-\cos(x^2+y^2)\sim\dfrac{(x^2+y^2)^2}{2}$.

所以

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\frac{(x^2+y^2)^2}{2}}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{e^{x^2y^2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{0^2+0^2}{e^0} = 0.$$

7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$； (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

证 (1)当(x,y)沿x轴，即$y=0$趋于$(0,0)$时

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y} = 1,$$

当(x,y)沿y轴，即$x=0$趋于$(0,0)$时

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{x-y} = -1.$$

由于两条路线的结果不同，所以$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$不存在.

(2)当(x,y)沿$y=x$趋于$(0,0)$时

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4} = 1.$$

当(x,y)沿$y=-x$趋于$(0,0)$时

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4}{x^4+4x^2} = 0.$$

因为两条路线的结果不同，所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ 不存在.

8. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 在何处间断？

解 当 $y^2-2x=0$ 时，即在抛物线 $y^2=2x$ 上，函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$ 间断.

9. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证 因为 $|xy|\leqslant\dfrac{x^2+y^2}{2}$，所以

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant\frac{x^2+y^2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2},$$

于是，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=2\varepsilon>0$，当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，恒有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

10. 设 $F(x,y)=f(x)$，$f(x)$ 在 x_0 处连续，证明：对任意 $y_0\in\mathbf{R}$，$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

证 $f(x)$ 作为一元函数，在 x_0 连续，故 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$ 时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

设 $P_0(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2$，对于同一 ε，以上述 δ 作 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 邻域 $U(P_0,\delta)$，则当 $P(x,y)\in U(P_0,\delta)$ 时，显然

$$|x-x_0|\leqslant P(P,P_0)<\delta,$$

从而

$$|F(x,y)-F(x_0,y_0)|=|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

即 $F(x,y)=f(x)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

习题 8-2

1. 求下列函数的偏导数：

(1) $z=x^3y-y^3x$;　　(2) $s=\dfrac{u^2+v^2}{uv}$;

(3) $z=\sqrt{\ln(xy)}$;　　(4) $z=\sin(xy)+\cos^2(xy)$;

(5) $z=\ln\tan\dfrac{x}{y}$;　　(6) $z=(1+xy)^y$;

(7) $u=x^{\frac{y}{z}}$;　　(8) $u=\arctan(x-y)^z$.

解　(1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y-y^3$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^3-3xy^2$；

(2) $s=\dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}$，$\dfrac{\partial s}{\partial u}=\dfrac{1}{v}-\dfrac{v}{u^2}$，$\dfrac{\partial s}{\partial v}=-\dfrac{u}{v^2}+\dfrac{1}{u}$；

(3) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{2\sqrt{\ln(xy)}}\cdot\dfrac{1}{xy}\cdot y=\dfrac{1}{2x\sqrt{\ln(xy)}}$，

由对称性知

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{2y\sqrt{\ln(xy)}};$$

(4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\cos(xy)\cdot y+2\cos(xy)[-\sin(xy)\cdot y]$

$=y[\cos(xy)-\sin(2xy)]$，

由对称性知

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x[\cos(xy)-\sin(2xy)];$$

(5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{y}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{y\sin\dfrac{x}{y}\cos\dfrac{x}{y}}=\dfrac{2}{y}\csc\dfrac{2x}{y}$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{\tan\dfrac{x}{y}}\cdot\sec^2\dfrac{x}{y}\cdot\left(-\dfrac{x}{y^2}\right)=-\dfrac{2x}{y^2}\csc\dfrac{2x}{y}$；

(6) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=y(1+xy)^{y-1}\cdot y=y^2(1+xy)^{y-1}$，

$\ln z=y\ln(1+xy)$，

$\dfrac{1}{z}\cdot z_y=\ln(1+xy)+y\cdot\dfrac{1}{1+xy}\cdot x$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=z_y=(1+xy)^y\left[\ln(1+xy)+\dfrac{xy}{1+xy}\right]$；

(7) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$，

$$\frac{\partial u}{\partial y}=x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x\cdot\frac{1}{z}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=x^{\frac{y}{z}}\cdot\ln x\cdot\left(-\frac{y}{z^2}\right)=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x;$$

(8) $$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+[(x-y)^z]^2}\cdot z(x-y)^{z-1}\cdot 1=\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{1+[(x-y)^z]^2}\cdot z(x-y)^{z-1}\cdot(-1)=-\frac{z(x-y)^{z-1}}{1+(x-y)^{2z}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{1+[(x-y)^z]^2}\cdot(x-y)^z\ln(x-y)$$
$$=\frac{(x-y)^z\ln(x-y)}{1+(x-y)^{2z}}.$$

2. 设 $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$,求证 $l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=0$.

证 $T=2\pi l^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}$,因为

$$\frac{\partial T}{\partial l}=2\pi\cdot\frac{1}{2}l^{-\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}=\pi(lg)^{-\frac{1}{2}},$$

$$\frac{\partial T}{\partial g}=2\pi l^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)g^{-\frac{3}{2}}=-\pi l^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{3}{2}},$$

所以

$$l\frac{\partial T}{\partial l}+g\frac{\partial T}{\partial g}=l\pi(lg)^{-\frac{1}{2}}+g(-\pi l^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{3}{2}})$$
$$=\pi l^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}-\pi l^{\frac{1}{2}}g^{-\frac{1}{2}}$$
$$=0.$$

3. 设 $z=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}$,求证 $x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z$.

证 因为

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}\cdot(-1)\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{z}{x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=e^{-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}(-1)\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{z}{y^2},$$

所以

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=2z.$$

4. 设 $f(x,y)=x+(y-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{y}}$，求 $f_x(x,1)$.

解 $f_x(x,y)=1+(y-1)\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{\frac{x}{y}})^2}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{y}$；

$\cdot f_x(x,1)=1$.

实际上，$f(x,y)$对 x 求导时，将 y 看作常量，因此，可以先将 $y=1$ 代入，再对 $f(x,1)$求导即可.因为

$$f(x,1)=x,$$

所以

$$f_x(x,1)=1.$$

5. 曲线$\begin{cases} z=\frac{x^2+y^2}{4} \\ y=4 \end{cases}$在点(2,4,5)处的切线与正向 x 轴所成的倾角是多少？

解 设 α 为此切线与 x 轴正向所成的倾角，则

$$\tan\alpha=z_x\Big|_{(2,4,5)}=\frac{1}{2}x\Big|_{x=2}=1,$$

所以

$$\alpha=\frac{\pi}{4}.$$

6. 求下列函数的$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$：

(1) $z=x^4+y^4-4x^2y^2$；　　(2) $z=\arctan\frac{y}{x}$；

(3) $z=y^x$.

解 (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-8xy^2$；　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=12x^2-8y^2$.

由对称性知

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=12y^2-8x^2,$$

而

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial y}(4x^3-8xy^2)=-16xy;$$

(2) $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=-\frac{y}{x^2+y^2}$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-y\cdot[-\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2x]=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x[-\frac{1}{(x^2+y^2)^2}\cdot 2y]=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)=-\frac{(x^2+y^2)\cdot 1-y\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};$$

(3) $\frac{\partial z}{\partial x}=y^x\ln y$, $\qquad\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=y^x\ln^2 y$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}=xy^{x-1},\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x(x-1)y^{x-2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(y^x\ln y)=xy^{x-1}\ln y+y^x\cdot\frac{1}{y}=y^{x-1}(1+x\ln y).$$

$$=y^{x-1}(1+x\ln y).$$

7. 设 $f(x,y,z)=xy^2+yz^2+zx^2$，求 $f_{xx}(0,0,1)$，$f_{xz}(1,0,2)$，$f_{yz}(0,-1,0)$ 及 $f_{zzx}(2,0,1)$.

解 $f_x(x,y,z)=y^2+2zx$，$f_{xx}(x,y,z)=2z$，$f_{xx}(0,0,1)=2$；

$f_{xz}(x,y,z)=2x$，$f_{xz}(1,0,2)=2$；

$f_y(x,y,z)=2xy+z^2$，$f_{yz}(x,y,z)=2z$，$f_{yz}(0,-1,0)=0$；

$f_{zz}(x,y,z)=2x$，$f_{zzx}(x,y,z)=0$，$f_{zzx}(2,0,1)=0$.

8. 设 $z=x\ln(xy)$，求 $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}$ 及 $\frac{\partial^3 z}{\partial x\partial y^2}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x}=\ln(xy)+x\cdot\frac{1}{xy}\cdot y=1+\ln(xy)$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{1}{xy}\cdot y=\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x}\right)=0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}[1+\ln(xy)]=\frac{1}{xy}\cdot x=\frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial^3 \partial}{\partial x\partial y^2}=-\frac{1}{y^2}.$$

9. 验证:

(1) $y=e^{-kn^2t}\sin nx$　满足$\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$;

(2) $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$　满足$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{r}$.

证　(1)因为$\frac{\partial y}{\partial t}=-kn^2e^{-kn^2t}\sin nx$,

$\frac{\partial y}{\partial x}=ne^{-kn^2t}\cos nx,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-n^2e^{-kn^2t}\sin nx$.

所以, $y=e^{-kn^2t}\sin nx$　满足

$$\frac{\partial y}{\partial t}=k\frac{\partial^2 y}{\partial x^2};$$

(2)因为$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$,

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{r-x\frac{\partial r}{\partial x}}{r^2}=\frac{r-x\cdot\frac{x}{r}}{r^2}=\frac{r^2-x^2}{r^3},$$

由对称性,知

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{r^2-y^2}{r^3},\qquad \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{r^2-z^2}{r^3},$$

所以

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}&=\frac{r^2-x^2}{r^3}+\frac{r^2-y^2}{r^3}+\frac{r^2-z^2}{r^3}\\&=\frac{3r^2-(x^2+y^2+z^2)}{r^3}\\&=\frac{3r^2-r^2}{r^3}\\&=\frac{2}{r}.\end{aligned}$$

习题 8－3

1. 求下列函数的全微分:

(1) $z=xy+\frac{x}{y}$;　　　　(2) $z=e^{\frac{y}{x}}$;

(3) $z=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$;　　　　(4) $u=x^{yz}$.

解 (1) $dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=(y+\dfrac{1}{y})dx+\left(x-\dfrac{x}{y^2}\right)dy$;

(2) $$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=e^{\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)dx+e^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}dy$$
$$=-\frac{1}{x^2}e^{\frac{y}{x}}(ydx-xdy);$$

(3) $$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy$$
$$=-\frac{y}{x^2+y^2}\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}dx$$
$$+\frac{\sqrt{x^2+y^2}\cdot 1-y\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}dy$$
$$=-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}dx+\frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}dy$$
$$=-\frac{x}{(x^2+y^2)^{3/2}}(ydx-xdy);$$

(4) $$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz$$
$$=yz\cdot x^{yz-1}dx+x^{yz}\cdot\ln x\cdot zdy+x^{yz}\cdot\ln x\cdot ydz$$
$$=x^{yz-1}(yzdx+xz\ln xdy+xy\ln xdz).$$

2. 求函数 $z=\ln(1+x^2+y^2)$ 当 $x=1,y=2$ 时的全微分.

解 $$dz=\frac{2x}{1+x^2+y^2}dx+\frac{2y}{1+x^2+y^2}dy,$$
$$dz\Big|_{\substack{x=1\\y=2}}=\frac{2\cdot 1}{1+1^2+2^2}dx+\frac{2\cdot 2}{1+1^2+2^2}dy$$
$$=\frac{1}{3}dx+\frac{2}{3}dy.$$

3. 求函数 $z=\dfrac{y}{x}$ 当 $x=2,y=1,\Delta x=0.1,\Delta y=-0.2$ 时的全增量和全微分.

解 $$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)=\frac{y+\Delta y}{x+\Delta x}-\frac{y}{x},$$