研究生入学考试

线性代数试题选解

魏宗宣 编

中南工业大学出版社

研究生入学考试

线性代数试题选解

魏宗宣 编

中南工业大学出版社
一九八六年·长沙

内 容 提 要

本书从全国一百多所高等院校自1980年至1986年招考硕士学位研究生的线性代数试题中，精选出404道题作了详细的解答。该书所选试题题型新颖，内容丰富，解答明确，条理清楚，能帮助读者加深对线性代数各种基本概念的理解，有利于读者掌握线性代数的解题基本方法和技巧。

本书可供大专院校学生、工程技术人员和广大数学爱好者学习线性代数时参考；对从事线性代数教学的教师也有一定的参考价值。

研究生入学考试线性代数试题选解

魏宗宣 编

中南工业大学出版社出版

湘潭市东平印刷厂印刷 湖南省新华书店发行

开本 787×1092 1/32 印张 10.75 字数 239千字

1986年8月第一版 1986年8月第一次印刷

印数 0001—8,000

统一书号：17442·006 定价：2.55元

前　　言

线性代数是高等院校理工科多数专业招收硕士学位研究生必考科目之一。为了帮助报考研究生的广大读者复习线性代数，从全国一百多所高等院校自1980年至1986年招考硕士学位研究生的线性代数试题中，精选出404道题作了详细的解答，编成《研究生入学考试线性代数试题选解》一书。

全书共分七章，着重于基本解题方法和技巧的阐述与归类。所选试题题型新颖，其内容涉及了线性代数的各个方面。从本书不仅可以看出招考硕士学位研究生对线性代数的基本要求，而且对高等院校、电视大学、职工业余大学的广大学生学习线性代数也可起到复习巩固和提高的辅导作用。此外，它对从事线性代数教学的教师也有一定的参考价值。

在编写本书的过程中，武汉大学熊全淹教授给予了热情的支持，并审阅了该书的初稿，提了不少宝贵意见，特在此表示衷心的感谢。

限于水平，不妥和错误之处在所难免，万望广大读者不吝指正。

编　者

1986年6月

常 用 符 号

$(f(x), g(x))=1$；$f(x)$与$g(x)$互素.

$f(x)|g(x)$；$f(x)$整除$g(x)$.

$f(x)\nmid g(x)$；$f(x)$不整除$g(x)$.

$|A|$或$\det A$；方阵A的行列式.

A^*；方阵A的伴随矩阵.

A'或A^T；矩阵A的转置矩阵.

$\overline{A}'$或A^H；矩阵A的共轭转置矩阵.

E或I；单位矩阵.

秩A或$\mathrm{rank}A$；矩阵A的秩.

$\mathrm{Tr}A$；矩阵A的迹.

$L(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$；向量$\alpha_1, \cdots, \alpha_m$生成的子空间.

$\dim V$或维V；向量（线性）空间V的维数.

$V\oplus W$；向量空间V与W的直和.

$\mathrm{Im}f$或fV；线性变换f的象（值域）.

$\mathrm{Ker}f$或$f^{-1}(0)$；线性变换f的核.

$\sigma|_V$；线性变换σ在向量空间V上的限制.

(α, β)；内积空间中向量α与β的内积.

$W^\perp$；欧氏空间（或酉空间）V的子空间W的正交补.

目　　录

第一章　行列式和线性方程组

1. 计算

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & \cdots & n\\ x & 1 & 2 & \cdots & n-1\\ x & x & 1 & \cdots & n-2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ x & x & x & \cdots & 1\end{vmatrix}.$$

解　从D的第二行开始，每行乘-1往上一行加，然后在右下角令$1=x+(1-x)$，将行列式表为两个行列式之和，

$$D=\begin{vmatrix}1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1-x & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1\\ x & x & x & \cdots & x & 1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0\\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 0\\ x & x & x & \cdots & x & 1-x\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1-x & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & 1-x & 1 & \cdots & 1 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1-x & 1\\ x & x & x & \cdots & x & x\end{vmatrix}.$$

把上式右端后一个行列式的最后一列乘-1往其他各列加，即得　$D=(1-x)^n+(-1)^{n-1}x^n=(-1)^n[(x-1)^n-x^n]$。

2. 计算下列行列式

(1) $$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin\varphi_1 & 1+\sin\varphi_2 & 1+\sin\varphi_3 & 1+\sin\varphi_4 \\ \sin\varphi_1+\sin^2\varphi_1 & \sin\varphi_2+\sin^2\varphi_2 & \sin\varphi_3+\sin^2\varphi_3 & \sin\varphi_4+\sin^2\varphi_4 \\ \sin^2\varphi_1+\sin^3\varphi_1 & \sin^2\varphi_2+\sin^3\varphi_2 & \sin^2\varphi_3+\sin^3\varphi_3 & \sin^2\varphi_4+\sin^3\varphi_4 \end{vmatrix}$$

(2) $$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & a & a & \cdots & a & a \\ \beta & x_2 & a & \cdots & a & a \\ \beta & \beta & x_3 & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & x_n \end{vmatrix}.$$

解 (1) 将第一行的 -1 倍加到第二行；将新的第二行的 -1 倍加到第三行；再将新的第三行的 -1 倍加到第四行，得

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \sin\varphi_1 & \sin\varphi_2 & \sin\varphi_3 & \sin\varphi_4 \\ \sin^2\varphi_1 & \sin^2\varphi_2 & \sin^2\varphi_3 & \sin^2\varphi_4 \\ \sin^3\varphi_1 & \sin^3\varphi_2 & \sin^3\varphi_3 & \sin^3\varphi_4 \end{vmatrix}.$$

应用范得蒙行列式公式，得

$$\Delta=(\sin\varphi_2-\sin\varphi_1)(\sin\varphi_3-\sin\varphi_1)(\sin\varphi_4-\sin\varphi_1)\cdot(\sin\varphi_3-\sin\varphi_2)(\sin\varphi_4-\sin\varphi_2)\cdot(\sin\varphi_4-\sin\varphi_3).$$

(2)

$$D_n=\begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & x_2 & \alpha & \cdots & \alpha & 0 \\ \beta & \beta & x_3 & \cdots & \alpha & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \beta & x_n-\alpha \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x_1 & \alpha & \alpha & \cdots & \alpha \\ \beta & x_2 & \alpha & \cdots & \alpha \\ \beta & \beta & x_3 & \cdots & \alpha \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}$$

$$=(x_n-\alpha)D_{n-1}+\begin{vmatrix} x_1-\beta & \alpha-x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2-\beta & \alpha-x_3 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3-\beta & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix}$$

$$=(x_n-\alpha)D_{n-1}+\alpha\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-\beta).$$

由α，β的对称性，可得 $D_n=(x_n-\beta)D_{n-1}+\beta\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-\alpha)$。于是得到

$$\begin{aligned} D_n&=(x_n-\alpha)D_{n-1}+\alpha\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-\beta) \\ D_n&=(x_n-\beta)D_{n-1}+\beta\prod_{j=1}^{n-1}(x_j-\alpha). \end{aligned} \qquad (1)$$

当 $\alpha\neq\beta$ 时，由(1)式得

$$D_n=\frac{\alpha\prod_{j=1}^{n}(x_j-\beta)-\beta\prod_{j=1}^{n}(x_j-\alpha)}{\alpha-\beta};$$

当$\alpha=\beta$时，由(1)式得

$$D_n=\prod_{j=1}^{n}(x_j-\alpha)+\alpha\sum_{j=1}^{n}\Big[\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}(x_i-\alpha)\Big]$$

3. 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a \\ b & x & a & \cdots & a \\ b & b & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & b & b & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 仿本章第2题可得

$$D_n=(x-a)D_{n-1}+a(x-b)^{n-1}$$
$$D_n=(x-b)D_{n-1}+b(x-a)^{n-1}. \qquad (1)$$

当 $a\neq b$时，由（1）式得

$$D_n=\frac{a(x-b)^n-b(x-a)^n}{a-b},$$

当 $a=b$时，由（1）式得

$$D_n=(x-a)^{n-1}[x+(n-1)a].$$

4. 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y \\ -y & x & y & \cdots & y \\ -y & -y & x & \cdots & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -y & -y & -y & \cdots & x \end{vmatrix}.$$

解 仿本章第2题可得

$$D_n=(x-y)D_{n-1}+y(x+y)^{n-1} \qquad (1)$$

$$D_n = (x+y)D_{n-1} - y(x-y)^{n-1} \qquad (2)$$

那末（1）$\cdot(x+y)$ －（2）$\cdot(x-y)$，得

$$D_n = \frac{(x+y)^n + (x-y)^n}{2} .$$

5. 计算 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 7 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} .$$

解 将 D_n 按第一列展开得

$$D_n = 7D_{n-1} - 10D_{n-2} .$$

因为 $D_2 = 39$，$D_1 = 7$，所以有

$$\begin{aligned} D_n - 5D_{n-1} &= 2(D_{n-1} - 5D_{n-2}) \\ &= \cdots = 2^{n-2}(D_2 - 5D_1) = 2^n; \\ D_n - 2D_{n-1} &= 5(D_{n-1} - 2D_{n-2}) \\ &= \cdots = 5^{n-2}(D_2 - 2D_1) = 5^n . \end{aligned}$$

于是得到

$$\begin{aligned} D_n - 5D_{n-1} &= 2^n \\ D_n - 2D_{n-1} &= 5^n \end{aligned} \qquad (1)$$

由（1）式易得

$$D_n = \frac{1}{3}(5^{n+1} - 2^{n+1})$$

6. 解方程式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & (n-1)-x \end{vmatrix} = 0$$

解 将左端的行列式记为D，用D的第一行乘-1加到其余各行，得

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x & 1-x & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & (n-2)-x \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1}x(x-1)(x-2)\cdots[x-(n-2)] .$$

所以原方程的解为 $x_1 = 0$，$x_2 = 1$，$\cdots$，$x_{n-1} = n-2$.

7. 计算行列式的值

$$\triangle_n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix}_{(n)} .$$

解 将$\triangle_n$按第一列展开，得

$$\triangle_n = \cos\alpha \begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha \end{vmatrix}_{(n-1)}$$

$$
-\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha \end{vmatrix}_{(n-2)}.
$$

令

$$
D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\alpha \end{vmatrix}.
$$

当 $n=1$时，$D_n=2\cos\alpha=\dfrac{\sin2\alpha}{\sin\alpha}$（$\sin\alpha\neq0$）。假设当$n\leqslant k-1$并且 $\sin\alpha\neq0$ 时，有 $D_n=\dfrac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}$. 考虑行列式 D_k，按 D_k 的第一行展开得

$$
\begin{aligned}
D_k&=2\cos\alpha D_{k-1}-D_{k-2}\\
&=2\cos\alpha\frac{\sin k\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin\alpha}\\
&=\frac{\sin(k+1)\alpha+\sin(k-1)\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\sin(k-1)\alpha}{\sin\alpha}\\
&=\frac{\sin(k+1)\alpha}{\sin\alpha}.
\end{aligned}
$$

所以对一切的自然数n，并且$\sin\alpha\neq0$，则

$$
D_n=\frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin\alpha}.
$$

于是当 $\sin\alpha\neq 0$时，

$$\begin{aligned}\triangle_n &= \cos\alpha D_{n-1} - D_{n-2}\\ &= \cos\alpha\frac{\sin n\alpha}{\sin\alpha} - \frac{\sin(n-1)\alpha}{\sin\alpha}\\ &= \cos n\alpha .\end{aligned}$$

当 $\sin\alpha = 0$时，直接验算，也有$\triangle_n = \cos n\alpha$.

8. 计算行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

解 从第二行开始，每一行减去第一行，得

$$D_n = \frac{\prod\limits_{i=2}^{n}(a_1-a_i)}{\prod\limits_{i=2}^{n}(a_1+b_i)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

将右端的行列式从第二列开始，每列减去第一列，得

$$D_n = \frac{\prod\limits_{i=2}^{n}(a_1-a_i)(b_1-b_i)}{\prod\limits_{i=2}^{n}(a_1+b_i)(b_1+a_i)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

$$=\frac{\prod\limits_{i=2}^{n}(a_1-a_i)(b_1-b_i)}{\prod\limits_{i=2}^{n}(a_1+b_i)(b_1+a_i)}D_{n-1}.$$

继续递推下去，最后可得

$$D_n=\frac{\prod\limits_{1\leq i<j\leq n}(a_i-a_j)(b_i-b_j)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\prod\limits_{j=1}^{n}(a_i+a_j)}.$$

9. 计算

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n\end{vmatrix}.$$

解 根据最后一列，把D_n拆成两个行列式相加：

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1+a_1 & 1 & \cdots & 1 & 0\\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_{n-1} & 0\\ 1 & 1 & \cdots & 1 & a_n\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & a_2 & \cdots & 0 & 1\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 1\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1\end{vmatrix}+a_nD_{n-1}$$

$$=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_nD_{n-1}.$$

同理，$D_{n-1}=a_1a_2\cdots a_{n-2}+a_{n-1}D_{n-2}$ 。于是

$$D_n=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_1a_2\cdots a_{n-2}a_n+a_na_{n-1}D_{n-2}\ .$$

如此继续下去，可得

$$\begin{aligned}D_n&=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_1a_2\cdots a_{n-2}a_n+\cdots+a_1a_2a_4\cdots a_n+\\&\quad a_na_{n-1}\cdots a_3D_2\\&=a_1a_2\cdots a_{n-1}+a_1a_2\cdots a_{n-2}a_n+\cdots+a_1a_2a_4\cdots a_n+\\&\quad a_na_{n-1}\cdots a_3(a_1+a_2+a_1a_2)\\&=a_1a_2\cdots a_n+(a_1a_2\cdots a_{n-1}+\cdots+a_1a_3\cdots a_n+\\&\quad a_2a_3\cdots a_n).\end{aligned}$$

当 $a_1a_2\cdots a_n\neq0$时，还可以改写成

$$D_n=a_1a_2\cdots a_n\left(1+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right).$$

10. 计算下面的行列式

$$\triangle=\begin{vmatrix}x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x\end{vmatrix}.$$

解 △为$n+1$阶行列式，记为$\triangle_{n+1}$，令其右下角的元素$x=(x-a_n)+a_n$，则可把$\triangle_{n+1}$分拆成两个行列式之和：

$$\triangle_{n+1}=\begin{vmatrix}x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 0\\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 0\\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n & x-a_n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n\\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\end{vmatrix}.$$

将右边第二个行列式，除最后一行外，其余各行减去最后一行，得

$$\triangle_{n+1}=(x-a_n)\triangle_n+a_n(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\ .$$

又因为$\triangle_2=x^2-a_1^2=(x-a_1)x+a_1(x-a_1)$，所以继续递推下去，最后可得

$$\begin{aligned}\triangle_{n+1}&=(x-a_n)(x-a_{n-1})\triangle_{n-1}+(a_n+a_{n-1})(x-a_1)\\&\quad(x-a_2)\cdots(x-a_n)\\&=\cdots=(x-a_n)(x-a_{n-1})\cdots(x-a_2)\triangle_2+(a_n+a_{n-1}\\&\quad+\cdots+a_2)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)\\&=(x-a_n)(x-a_{n-1})\cdots(x-a_1)(x+a_1+a_2+\cdots+a_n)\\&=\left(x+\sum_{i=1}^n a_i\right)\prod_{i=1}^n(x-a_i)\ .\end{aligned}$$

11．计算$n(\geqslant 2)$阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}1+a_1x_1 & 2+a_2x_1 & \cdots & n+a_nx_1\\ 1+a_1x_2 & 2+a_2x_2 & \cdots & n+a_nx_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1+a_1x_n & 2+a_2x_n & \cdots & n+a_nx_n\end{vmatrix}.$$

解 原行列式可化为

$$D_n=\begin{vmatrix}1 & 2+a_2x_1 & \cdots & n+a_nx_1\\ 1 & 2+a_2x_2 & \cdots & n+a_nx_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 1 & 2+a_2x_n & \cdots & n+a_nx_n\end{vmatrix}$$
$$+\begin{vmatrix}a_1x_1 & 2+a_2x_1 & \cdots & n+a_nx_1\\ a_1x_2 & 2+a_2x_2 & \cdots & n+a_nx_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_1x_n & 2+a_2x_n & \cdots & n+a_nx_n\end{vmatrix}.$$