文通青年叢書

從算術到代數

（增　訂　本）

張　元　鼎　著

上海文通書局

從算術到代數

書號 2056 國產報紙本
32開 67頁 80000字

著者 張元鼎
出版者 上海文通書局
上海(5)中州路2號
發行者 上海文通書局
上海(5)中州路2號
印刷者 新光明記印刷所
上海(9)康定路162號

滬15(36001—40000) 1948年11月初版
印數 4000 1954年1月增訂2版11次印
新定價每册6,500元

再版自序

這一本小册子眞的出乎意外的據說還有些讀者。這也許因爲在字裏行間能看出一點與辯證法有關的地方，因而稍稍有助於敎學的緣故。

解放後，在學校的維持改造上，首先是要求能於各科敎學上，逐步做到密切配合思想政治敎育。數學，自來是「純技術觀點」的堅強堡壘，被認爲與政治思想敎育無關或至少是不好配合的一門學科。因之，我感覺到「在字裏行間」在今天來說是顯得太不够了，所以就原書增補了一些，修改了一些。希望熱心研究「如何在數學學習中進行政治思想敎育」的老師們與同學們，多多提供意見。

張元鼎 一九五一年十月

初版自序

這是一本供給初中生的課外讀物，編這一本書有三個動機：

第一初中生的數學課外讀物實在太少了。當然坊間不乏些什麼幾百解幾十解的或是些什麼升學指導和投考指南等一類的東西，汗牛充棟固然談不上，裝滿了一小間或半小間屋子總是可以的。可是，除去供教師參考及備學生查抄以外，對學生有什麼其他的幫助呢？那麼，用淺顯有趣的語句，談話或故事的方式，講一點數學方面的基本問題給他們聽一聽，該不是絕無意義的事吧？

其次我深覺在初中生升入二年級這階段，由算術改學代數，變換得似乎突兀一點，因爲代數比算術更抽象了，更形式化了，在其間多談一點關於兩者的關連和基本認識，這當然也不是無益的事。

復次有些初中二的學生，常請我介紹些數學方面的課外讀物給他們看，我便將劉薰宇先生著的馬二先生談算學，數學的園地，數學趣味等介紹給他們了，但他們有很多不懂。當然這些書並不是爲初中編的，不懂是應該的。於是，他們請我在

課外講一點給他們聽，講呀講的，成功這一本小册子了。

小朋友總喜愛吃糖的，越甜越愛。這一本書呢？當然不會對他們像一塊很甜的糖。但能像一片薄荷糖那樣辣一陣甜一陣地不馬上被吐出來，就算意外的成功了。

張元鼎 一九四八年十一月

目　錄

上　篇

下篇

上　篇

一　數的發生

科學起源於人類的勞動及實際需要，數學雖是最抽象的科學，當也不能例外。所以談到數的發生，就應該回想到原始人類的生活。

讀過社會發展史的都知道，在原始共產主義社會，人類最初是度着遊牧生活的，他們必須出外狩獵，以獲得生活的資料；踞守在營幕裏的婦女們，惦念着出外的有無收獲；即是那些狩獵者，也是惴惴於今天的有沒有辦法。因此可以說，他們對於數的最初概念，只是「有」或「沒有」。

「沒有」，只好餓着肚皮，期待明天，或是另覓一個有較多的野獸的地方去。有呢，那麼就要由首長來分配給大家了。甲的食量大，多得些，乙的年齡小，少給些，在他們中間，沒有階級，沒有剝削，所以對數的次一概念是「多」或「少」。

其後，跟着生產力的發展，進入奴隸社會，耕田代替了畋獵，生產分了工，需要互通有無，互相交換物品，以前的「有無」、「多少」概念，在此時就獲得了進一步的發展。他們認識

了外界事物間的區別及類同，仰首天空，白天有一個日頭，晚上有一個月亮，光度雖有很大差異，但總不曾看見過另一個日頭或月亮，於是他們有了「一」這個概念了。又在交換當中，拿五尺布換一斗米，(當然他們還不知道單位)，他們也約略的知道價值差不多相等，手指和足趾的數目恰恰相同，我有眼、耳、鼻、口，你也具有同數的眼、耳、鼻、口，外界事物以類羣呈現在他們面前，日、月為一羣，手、足為一羣。有大羣，有小羣。譬如手、足這一羣，就比日、月那一羣大。因為在這兩羣裏用「一對一」辦法處理一次，日、月那一羣已經無餘了。所謂「一對一」就是從甲羣取一個，乙羣也取一個，誰較遲的被取完，誰便是大羣。並且在小羣上加一個，可得次羣，再加一個，又可得次羣的次羣，於此，數的概念很完備了。他們已經認識了一、二、三……等等的自然數，並且認識了數的連續性。雖然這些術語，在他們的時代還沒有，但他們對客觀的認識，似乎應該這樣的。

人要生活，便要勞動，便要和自然搏鬥，認識自然，克服自然，利用自然。因勞動才有語言，才有文化，才有進步。數的發生及發展，也是隨着人類社會發展而繁榮滋長的。但有些學者們，偏說數學是離開現實獨立地存在的，是些思想銳敏的學者，從腦子裏想出來而構成的體系，我們能相信嗎？我們應該肯定地說「勞動創造了數學」。

二 抬槓子

上次，我們講過羣。三隻鳥，三隻狗，三顆豆子，叫做相似羣。那麽一隻鳥，一隻狗，和一顆豆子和攏來，算不算相似羣呢？認定「三」字講，不管是狗是鳥，或二狗一鳥，二鳥一狗，二豆一狗或一鳥，怎麽配都可以，應該是相似羣，若將狗鳥豆扯在裏面講，則二狗一鳥或二鳥一豆等，沒有一羣是相似的。在這裏我們自己和自巳抬起槓子來了。

抬槓子本非壞事。俗話說：鼓不敲不響。槓子愈抬得利害，愈能揭發眞理。狗、鳥、豆等這些事物，是具體的，「三」是牠們的數目，是抽象的。從狗鳥等看出「三」，而由「三」更看清楚狗鳥等這些事物。且更由此看出三個人，三本書等也具有相同的性質。於是拋開事物的本身，而專研究「三」這個數字的本身，問題在一番衝突激盪之後給解決了。是爲數的發展的基礎，這就是數學的抽象性與現實性的矛盾。

由有無進步到多少，由多少進步到類羣之認識，由類羣而認識羣的連續性，「一」的羣進而爲「二」的羣而三而四……於是發明了聲音和符號，以表達數目的觀念，是爲自然數列。這是一個巨大的進步。我們開始知道，三隻鳥，三隻狗，三顆豆子，其中有一些共同的東西，不是鳥，不是狗，不是豆子，而是那個「三」，離開物體而有其本身的興趣。這是具體與抽象抬槓子的結果。

符號的發明，從數的發展說，似乎先是零，因爲零就是沒有。有無是人類對數的最初概念，然後是一、二、三……至九。至於阿剌伯字碼或羅馬數字，是無多關係的。九以後呢？於此

我們發現一樁最有趣的問題。

我們假想倘使沒有進位法，則每一數有一符號，豈不要成爲符號世界嗎？我們又假想，假使把我們現在通用的十進法改變一下，又該成什麽現象呢？我們應該感謝我們的手指，牠恰巧是一共十個，我們應認識成千萬次對十進法的實踐的重要性。人們將九加一所成的數另立一名叫做十，再聚攏十個十叫做百，十個百叫千等等……尤其奇妙的，名目雖立，並未增加符號。滿十時向左進一個，這一位名叫十位，再左爲百千萬等等。若某一位沒有，便用零字補足，是爲十進法。有了這個方法，一切整數自零起以迄於無窮，均可用 1,2,3……9,0 等符號表示了，這不是數學上一大奇跡嗎？例如：三千零七十六即記做：

3	0	7	6
⋮	⋮	⋮	⋮
千位	百位	十位	個位

現在若我們換成七進法，將怎麽樣呢？則 25 便不是二十五，而是 $2\times7+5$ 等於十九了。字碼只要 0,1,2……5,6 便夠了。所以不管那一種記數法，應用起來，都是一樣，其所以感覺十進法之便當者，不過習慣罷了。十進法的創造，更有力地證明了勞動創造了數學。

三 零與一的特性

零就是沒有，牠在數學裏有很大的作用，牠是數的發展的

起點。沒有牠不好記數。307 裏去掉零，變爲 37，與原數相差很大。0.25 裏沒有零，顯不出整數和小數的界限。50 後面加一個零成爲 500，恰爲原來的十倍。由汽車號碼 00097，立知所在的都市至少有一萬輛以上的汽車。沒有零，整個數學體系，將不堪想像。

和零的重要性一樣，牠有很多可以利用的特性，例如：

a. $9827\times0=0\times9827=0$

b. $0+0+0+0+\cdots\cdots=0$

c. $0-0-0-0-\cdots\cdots=0$

d. $0\times0\times0\times0\times\cdots\cdots=0$

上面四個式子，用話說，即任意數乘零或零乘任意數仍得零，零自加若干次，自減若干次或自乘若干次，均得零。這些特性，是零以外的數不會有的。利用這些特性，可得速乘法，可以推知 $a\times b=0$ 中，a 或 b 至少有一者須爲零。在加、減、乘中只要零字愈多，算法便愈簡便。所以，零也是一個重要的數，而且是數的最初概念。

緊接在零後面的「一」，也是一位很了不起的英雄。牠是一切整數的基礎，在任便一個整數裏，都有牠的足跡。如 75，是七十五個一合攏來的，可寫成：$1+1+1+\cdots\cdots$加至七十五次，也可以寫成 $1\times75=75$。在人類對數的概念，零以後恐怕就是 1，因爲「沒有」是零，「有」呢，當然以「一」爲簡單易曉了。

沒有「一」便沒有整數，沒有整數，自然也不會有小數及分數的產生，則人類將停止在只知「有無」的階段，數學更談不

上了。

和零一樣,「1」也具有很多特性,如:

a. 任意數乘一或一乘任意數仍得原數

b. $1\times1\times1\times1\times\cdots\cdots\cdots=1$

c. 任意數÷1仍得任意數

d. $1\div1\div1\div1\div\cdots\cdots\cdots=1$

e. 1的倒數還是一

在乘法,我們喜愛含有較多的1的乘數或被乘數.在應用問題裏,1起着很大的作用,在分數應用上,1以代表整體的資格幫我們解決很多困難,牠有時是因數,如$72\times1=72$,有時表整體,如設某工程爲1。誰要不善利用這個1,誰便要在計算上遭到很多困難。

四 四大法則

人類社會愈進步,生活就愈複雜,數的運用便愈加擴展。由於財富的集積,人口的增加,產生了加法,由於食糧之消耗,收穫的盈歉,產生了減法,商品的交換,債務的糾葛,日月的盈缺,河海的變遷;有的在生長滋繁,有的在衰落退化,一切事物矛盾變化,都增強人們對加減二法的認識和運用,因之奠定了加法的基礎。

加法是求總數的方法,減法是求剩餘或求二不等的量的差的方法,這是誰都知道的。牠們彼此是相反的二法,這也是誰都知道的。但牠們爲什麼相反呢?在發生上說,有沒有先後

呢?這些問題,就不是誰都知道的了。如上節所說,我們周圍的一切事物,時刻在變化,促成這變化的動力,是事物的內在矛盾,則其所表現的量的變化,也就有矛盾,對這些量的處理方法,也就有了相反的二法。譬如說:有甲乙二人於此,甲以布換乙的米,假定甲討了便宜,那麼乙一定吃了虧。所以加法和減法之具有相反的性質,仍是客觀事物矛盾的反映,牠們表現同一變化的兩面,無所謂那一個在前,那一個在後。12+5=17,也可以被說成「12+?才是17呢?」同一句話,用前者的說法是加法,用後者是減法。普通誤認為加法在前者,是因為這加法的本身較易於運算,而且教科書也是從加法講起的緣故。

數學具有一種特性,即是最初雖發生於現實,但常常會離開現實,而自串成一套很熱鬧的戲法轉過來又指導現實。看哪!這戲法便開始了!第一齣是加法交換定律。

四斗米加五斗米等於九斗米,四塊錢加五塊錢等於九塊錢,所加的品種雖有差別,但得數總是九,此時九跑開米與錢的範束,而自己構成「四加五總是得九」這個結論了。若是五塊錢加四塊錢呢?便又可得到「4+5=5+4總是得9」的結論。這戲法雖簡單,也自分兩個步驟:第一步,4,5,9先離開事物的本體,第二步,4,5交換了一次位置,而得4+5=5+4=9。這戲法就是加法交換定律,把意義再普遍化一點,是a+b=b+a。這定律又指導着加法的運算。

有人問:減法有無交換定律呢?12−2−8不是等於12−8−2嗎?是的,確有些算術教本上,說減法也有交換定律的,

也是舉像 $12-8-2=12-2-8$ 這樣的例子的。但我們不應承認在算術裏減法有所謂交換定律（在代數是可以的），因爲這裏交換的，只限於減數 2 及 8，不曾分毫涉及被減數 12；並且，$12-2-8=12-(2+8)=12-(8+2)$，2 及 8 之所以能交換，也還是加法上一種活動，也還是加法交換定律。我們只能說，倘減數多於一個以上時，減數次序是可以隨便調動的。

又有人問：數學既具有離開現實的特性，是否眞的一去永不復返呢？是不是說五人加四斗米，仍有其意義呢？是的，這確是一個極有趣味的問題。我們答：數學雖與現實相離，我們卻不能不根據現實去理解牠。你們不是學過名數與不名數嗎？名數就是用現實規定了的數，是與現實分不開的數。五人，五是表示人這個量的數；四斗米，四是表示米這個量的數；五人加四斗米，在現實既無意義，則五人加四斗米便無意義。所以算術上有一條規則：異名數不能相加，和 $4+5=9$，不名數的處理方法大不相同。

加法的興趣很濃厚，第一齣戲法剛完，第二齣——結合定律又來了！這戲法說來很平常，是你們曾經不自覺的運用過的。舉個例子說：

$$\begin{array}{rcccc} & 3 & 5 & 8 & 2 \\ & 1 & 4 & 3 & 9 \\ & 2 & 5 & 2 & 8 \\ + & 6 & 6 & 7 & 1 \\ \hline \end{array}$$

這個題目，讀小學的小朋友們都做得很好的，不但答案不錯，並且會在末一行，將 2 與 8 先加攏，在心頭記一個 10，次

將9和1加攏，又在心頭記一個10，連前一共20；其餘三行，也會如上弧線所示，一一加攏而加以覆按，存入上位。這種算法，是交換定律和結合定律的合用。2先加8，9先加1，未照原來次序，是運用的交換定律。先求各部的和，次將部分和求得全和，這是結合定律。結合律者，簡單的說，就是有諸數相加，可先行部分的結合，再求各部分結合的總和。如式：

$a+b+c+d=a+(b+c)+d=(a+b)+(c+d)=(a+b+c)+d=\cdots\cdots$ 和先前講的一樣，在算術上，減法沒有結合定律，因為 $12-2-8=12-(2+8)$，是加法的活動。

數，由發生至發展，由記法和命法，由加減以至於交換和結合二大定律，也算得極其壯觀了。可是加法在得意之餘，忽遭到一個嚴重的困難。是怎樣的一個困難呢？

比如說：某甲每天用洋五十元，三天用好多？這是很容易解決的，$50+50+50$ 便行了，但假設問，二年用好多錢？啊呀！可不得了！我們必須連寫七百三十個50相加，要用比較大的紙，而且寫好以後，還須從頭細數一遍，深恐寫多了或是寫少了。假設又問：某乙每天用洋3935元，九年用好多？那更其可怕了。但現實上這樣的問題有的是，怎麼辦呢？

於是，乘法來解圍了，$50+50+50=50\times3=150$，$50+50+50+\cdots\cdots$加至730個$=50\times730$。被乘數表示要連加的數，乘數表示要加的個數。再把最基本的乘法，如 $5\times3=15$，$8\times4=32$ 等，製成歌訣，以便應用，這個困難給順利地解決了。我們可以說，乘法是加法的發展。不僅如此，乘法一方面解決了

連加法的困難，另一方面，乘法本身也包含着非同數的加法。丟掉了有礙數學發展的東西（連加法），保留了並發展了有用的一方面（非同數加法）。這話乍聽起來很難懂，舉個例就極其容易明白了。例如：在 325×16 這個運算式裏

$$
\begin{array}{r}
325 \\
\times\ 16 \\
\hline
1950 \\
+\ 325 \\
\hline
5200
\end{array}
$$

不是包含着非同數 1950 與 3250 的加法嗎？雖然仍是加法，但究竟是乘法裏的加法了，這不是加法的回老家，而是進一步的發展。

乘法旣胚生於加法，則凡加法所會變的戲法，乘法也會，而且要得更加巧妙，原來乘法也有交換律及結合律；而且牠還約了加法或減法，耍了一套新戲法，乘法分配定律。這些定律如下式：

1. $a\times b=b\times a$……………………交換定律

2. $a\times b\times c=a\times(b\times c)$……………結合定律

3. $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$………分配定律

最後一套，是一數乘兩數的和，等於以此數分乘兩數，再求牠們的積的和，如

$5\times(8+3)=?$可以算成

$5\times(8+3)=5\times 11=55.$ (1)

或$5\times(8+3)=5\times 8+5\times 3=40+15=55$ (2)