College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

概率论与数理统计教程

（第四版）

学习辅导与习题选解

沈恒范

高等教育出版社

大学数学学习辅导丛书

概率论与数理统计教程(第四版)学习辅导与习题选解

沈恒范

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育"十五"国家级规划教材——《概率论与数理统计教程(第四版)》的配套辅助用书,内容包括概率论与数理统计的基本内容.与主教材相对应,每章包括内容要点,教学基本要求,例题分析与详解,以及习题选解等模块,针对学生学习中的问题和需要进行答疑和辅导.本书内容切合学生实际,针对性强,注重帮助学生掌握概率统计的基本知识、基本理论和基本技能,可供高等学校工科和其他非数学类专业学生选用,也可供使用主教材的教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计教程学习辅导与习题解答/沈恒范
—4版.—北京:高等教育出版社,2003.11
ISBN 7-04-012959-0

Ⅰ.概... Ⅱ.沈... Ⅲ.①概率论-高等学校-教学参考资料②数理统计-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.021

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第083134号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	高等教育出版社印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003年11月第1版
印　　张	16.5	印　　次	2003年11月第1次印刷
字　　数	300 000	定　　价	17.60元

序　言

本书是为学习《概率论与数理统计教程(第四版)》(以下简称《教程(第四版)》)的读者编写的学习指导书.

作为与《教程(第四版)》配套使用的辅助教材,本书共分九章,各章的顺序和内容与《教程(第四版)》保持一致.每章的内容分为四个部分:

(一) 内容要点

把《教程(第四版)》中本章讲述的内容(包括基本概念、定理、公式、计算方法等)予以归纳总结,便于读者复习和查阅.

(二) 教学基本要求

以教育部1995年颁发的《高等工业学校概率论与数理统计课程教学基本要求》为基础,并参考教育部考试中心《2003年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》中有关概率论与数理统计部分的考试内容及要求,提出本章的教学基本要求,便于读者学习时注意理解和掌握本章的重点.

(三) 例题分析与详解

按照本章的教学基本要求,在《教程(第四版)》原有例题和习题的基础上,适当补充少量概念性、启发性或综合性较强的例题,对所有例题先进行分析,再给出详细解答.

(四) 习题选解

从《教程(第四版)》本章的习题中选取一部分(约占总量的三分之一)较难或具有典型性的习题作出分析与详细解答,所有习题都保留《教程(第四版)》中原有的编号,便于读者参阅.

本书编写过程中,曾经得到湖北汽车工业学院领导的关心和支持,编者谨致以衷心的谢意.

限于编者的水平,本书难免存在某些缺点和错误,诚恳希望读者批评指正.

沈恒范

2003年5月

目　录

本课程学习方法指导

概率论与数理统计是研究随机现象的统计规律性的数学学科. 由于随机现象广泛地存在于自然科学、社会科学和工程技术的众多领域中,所以概率统计的理论和方法在这些领域中有着重要的应用.

概率论与数理统计课程在高等工业学校的本科教学计划中是一门必修的基础课. 初学本课程的读者往往会在学习中遇到某些困难,这里简要介绍本课程的一般学习方法,以便帮助读者初步理解和掌握概率论与数理统计的基本概念和基本理论,以及处理随机现象的基本思想和基本方法,并培养读者运用概率统计的理论和方法分析和解决实际问题的能力.

学习概率论部分时,应着重理解或了解的基本概念有:随机事件的频率与概率,随机变量的概率函数、概率密度、分布函数,二维随机变量的联合概率函数、联合概率密度、联合分布函数、边缘概率函数、边缘概率密度、边缘分布函数,数学期望与方差、原点矩与中心矩、协方差与相关系数,等等;应重点掌握或会运用的基本定理、公式和方法有:概率加法定理、概率乘法定理、全概率公式,概率函数与概率密度的性质以及它们与分布函数的关系,随机变量函数的概率分布,关于数学期望与方差的定理,切比雪夫不等式、大数定律,中心极限定理,等等. 此外,还应熟悉某些常用分布,如:二项分布、超几何分布、泊松分布、均匀分布、指数分布、正态分布,等等;其中正态分布是概率论与数理统计中最常用,因而也是最重要的分布,读者必须掌握正态分布的定义、性质及其在实际问题中的应用.

学习数理统计部分时,应着重理解或了解的基本概念有:总体、个体、样本、统计量,参数点估计的无偏性、有效性、一致性,参数区间估计的置信水平与置信区间,假设检验的基本思想及推理方法,方差分析中有关的统计量,回归分析中的回归函数与回归方程,等等. 应重点掌握或会运用的基本理论和方法有:正态总体统计量的分布,参数的矩估计法与最大似然估计法,正态总体参数的区间估计,关于正态总体参数的假设检验,总体分布的拟合检验,单因素试验及双因素试验的方差分析,一元线性相关的显著性检验,一元线性及非线性回归方程的求法,等等. 此外,还应熟悉数理统计中的某些常用分布,除正态分布外,还有:χ^2 分布、t 分布、F 分布. 这里强调指出,读者必须熟练掌握利用电子计算器或电子计算机及有关软件进行统计计算.

读者学习本课程时,最重要的环节当然是听课,课后应仔细阅读、认真钻研教材中每章、每节的内容. 阅读应当按顺序逐章、逐节地进行,搞清每个概念,弄

懂每个定理(或公式)的条件、结论及其证明. 对于教材中的例题,就不仅是阅读,还应当进行必要的分析、推理及计算. 关于重点和难点,可以结合本书中的"例题分析与详解"一起来阅读,读者将从中获得更多的帮助.

在阅读每章、每节的内容的基础上,通过解答教材中该章后面的习题可以加深对所学内容的理解. 解题时要独立思考,严格认真,才能增强学习效果. 对于某些较难的习题,可以适当参看教材中的习题答案或提示,也可以查阅本书中的"习题选解".

在学完教材的每一章之后,应当对该章的主要内容(包括基本概念、定理、公式、方法等)进行小结. 虽然本书已列举了各章的"内容要点",但是仍建议读者最好自己能独立地完成这项工作,这样可以更好地巩固所学的知识.

总之,本课程研究的对象是随机现象,正如在教材中指出的那样,随机现象既有偶然性的方面,又有必然性的方面,它们互相对立而又互相联系,科学的任务就在于要从看起来是错综复杂的偶然性中揭露出潜在的必然性,即随机现象的统计规律性. 这就是本课程区别于其他课程的主要特点. 为此,我们必须用自然辩证法的观点学习本课程,这样才能深入理解和掌握本课程的基本概念、基本理论和基本方法,并且更好地把它们应用于分析和解决实际问题.

第一章　随机事件及其概率

内容要点

概率论与数理统计是研究随机现象的一门学科.随机事件的发生既有偶然性、又有必然性,即随机事件的频率的稳定性,这是一种统计规律性,它是在大量现象中被发现的.正是由于大量现象中随机事件的统计规律性是客观存在的,才使得数学家和统计学家们对各种随机现象进行深入的研究,并取得了极其丰富的重要成果.概率论与数理统计的理论与方法在自然科学、社会科学、工农业生产、国家经济建设中有着广泛的应用.

本章内容是概率论与数理统计课程的基础知识.随机试验、样本空间、随机事件、事件的关系及运算、随机事件的频率、概率及条件概率、随机事件的独立性、独立试验序列等是本章的基本概念.概率加法定理、概率乘法定理、全概率公式、二项概率公式等是本章的基本理论与基本公式.根据概率的古典定义计算随机事件的概率时,往往需要用到排列与组合的知识.了解事件的关系及运算,把复杂事件分解为若干个简单事件的并或交,从而利用概率论的基本定理与基本公式计算随机事件的概率,是读者应该掌握的基本方法,也是本章的重点和难点.本章讲述的基本概念、基本理论与基本公式将贯穿于全课程之中,所以理解并掌握所有这些内容才能为学习本课程奠定良好的基础.

一、随机试验、样本空间与随机事件

随机试验(简称试验)就是一定的综合条件的实现,假定这种综合条件可以任意多次地重复实现.

试验的结果中所发生的现象叫做事件.在试验的结果中,可能发生、也可能不发生的事件叫做随机事件,记作 $A,B,C,\cdots$;一定发生的事件叫做必然事件,记作 U;一定不发生的事件叫做不可能事件,记作 V.

试验的结果中每一个可能发生的事件叫做试验的样本点(或基本事件),记作 ω;试验的所有样本点的集合叫做试验的样本空间,记作 $\Omega=\{\omega\}$.

任一随机事件 A 都是样本空间 Ω 的一个子集.必然事件 U 就是样本空间 Ω,今后就把必然事件记作 Ω.不可能事件 V 就是空集 $\varnothing$,今后就把不可能事件

记作 $\varnothing$.

二、事件的关系及运算

1. 包含:如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生,则称事件 B 包含事件 A,记作 $B \supset A$(或称事件 A 包含于事件 B,记作 $A \subset B$).

2. 相等:如果事件 B 包含事件 A,且事件 A 包含事件 B,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A = B$.

3. 并:"二事件 A 与 B 中至少有一事件发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的并,记作 $A \cup B$;"n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一事件发生"这一事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并,记作 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$(简记为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$).

4. 交:"二事件 A 与 B 都发生"这一事件称为事件 A 与事件 B 的交,记作 $A \cap B$(简记为 AB);"n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都发生"这一事件称为事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交,记作 $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$(简记为 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 或 $A_1 A_2 \cdots A_n$).

5. 互不相容(或互斥):如果二事件 A 与 B 不可能同时发生,即 $AB = \varnothing$,则称事件 A 与 B 是互不相容的(或互斥的);如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件不可能同时发生,即

$$A_i A_j = \varnothing (1 \leqslant i < j \leqslant n),$$

则称这 n 个事件是互不相容的(或互斥的).

"二互不相容事件 A 与 B 的并"记作 $A + B$;"n 个互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并"记作 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$(简记为 $\sum_{i=1}^{n} A_i$).

6. 对立(或互逆):如果二事件 A 与 B 互不相容,并且它们中必有一事件发生,即

$$AB = \varnothing, A + B = \Omega,$$

则称事件 A 与 B 是对立的(或互逆的).事件 A 的对立事件(或逆事件)记作 $\bar{A}$.于是有

$$A\bar{A} = \varnothing, A + \bar{A} = \Omega.$$

7. 完备组:如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一事件一定发生,即 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$,则称这 n 个事件构成完备事件组.

事件的关系及运算的性质:事件的并与交,除满足交换律、结合律、分配律外,还满足德摩根(De Morgan)定律:

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}.$$

三、频率与概率的定义

1. 频率的定义:设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 m 次,则比值 $\frac{m}{n}$ 叫做随机事件 A 的频率,记作 $f_n(A)$,即

$$f_n(A)=\frac{m}{n}. \tag{1.1}$$

2. 概率的统计定义:在大量重复试验中,随机事件 A 的频率具有稳定性,即当试验次数 n 很大时,频率 $f_n(A)$ 常在一个确定的数字 $p(0<p<1)$ 的附近摆动,这个刻画随机事件 A 在试验中发生的可能性大小的数字 p 叫做随机事件 A 的概率,记作 $P(A)$,即

$$P(A)=p\approx f_n(A). \tag{1.2}$$

3. 概率的古典定义:设试验的样本空间总共有 N 个等可能的基本事件,其中有且仅有 M 个基本事件是包含于随机事件 A 的,则随机事件 A 所包含的基本事件数 M 与基本事件的总数 N 的比值叫做随机事件 A 的概率,记作 $P(A)$,即

$$P(A)=\frac{M}{N}. \tag{1.3}$$

必然事件的概率等于一,即

$$P(\Omega)=1. \tag{1.4}$$

不可能事件的概率等于零,即

$$P(\varnothing)=0. \tag{1.5}$$

***4. 几何概型**:设试验的基本事件有无穷多个,但是可用某种几何特征(如长度、面积、体积)来表示其总和,设为 S;并且其中的一部分,即随机事件 A 所包含的基本事件数,也可用同样的几何特征来表示,设为 s;则随机事件 A 的概率

$$P(A)=\frac{s}{S}. \tag{1.6}$$

***5. 概率的公理化定义**:设试验的样本空间为 Ω,随机事件 A 是 Ω 的子集,$P(A)$ 是实值函数,如果满足下述三条公理:

公理 1 (非负性) 对于任一随机事件 A,有

$$P(A)\geqslant 0; \tag{1.7}$$

公理 2 (规范性) 对于必然事件 Ω,有

$$P(\Omega)=1; \tag{1.8}$$

公理 3 (完全可加性) 对于可数无穷多个互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots,$

$A_n, \cdots$，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i), \tag{1.9}$$

则称 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率.

四、概率加法定理

对于任意二事件 A 与 B，有

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB). \tag{1.10}$$

特别是，对于二互不相容事件 A 与 B，有

$$P(A + B) = P(A) + P(B). \tag{1.11}$$

对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = & \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_i A_j A_k) \\ & - \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n). \end{aligned} \tag{1.12}$$

特别是，对于 n 个互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.13}$$

对于事件 A 及其对立事件 $\bar{A}$，有

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}). \tag{1.14}$$

五、条件概率、事件的独立性

事件 A 在事件 B 已发生的条件下的概率叫做条件概率，记作 $P(A|B)$. 设 $P(B) > 0$，则有

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}. \tag{1.15}$$

如果 $P(A|B) = P(A)$ 或 $P(B|A) = P(B)$，则称二事件 A 与 B 是独立的.

如果事件 A 与 B 独立，则 A 与 $\bar{B}$，$\bar{A}$ 与 B，$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也分别是独立的.

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任一事件 $A_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 与其他任意 m $(m = 1, 2, \cdots, n-1)$ 个事件的交是独立的，即

$$P(A_i | \underbrace{A_j A_k \cdots}_{m}) = P(A_i),$$

则称这 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是相互独立的.

六、概率乘法定理

对于任意二事件 A 与 B，如果 $P(A) > 0$，$P(B) > 0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B). \tag{1.16}$$

特别是,对于二独立事件 A 与B,有

$$P(AB)=P(A)P(B). \tag{1.17}$$

对于任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,如果 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \tag{1.18}$$

特别是,对于 n 个相互独立的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n). \tag{1.19}$$

七、全概率公式

设事件 A 当且仅当 n 个互不相容事件 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 中的任一事件发生时才可能发生,已知概率 $P(B_i)>0$ 及条件概率 $P(A|B_i)(i=1,2,\cdots,n)$,则有

1. 全概率公式:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A|B_i). \tag{1.20}$$

***2. 贝叶斯公式:**

$$P(B_i|A)=\frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A|B_j)}, \tag{1.21}$$

其中 $i=1,2,\cdots,n$.

八、独立试验序列、二项概率公式

进行一系列试验,每次试验的结果与其他各次试验的结果无关,事件 A 的概率 $P(A)$ 在各次试验中保持不变,这样的一系列试验叫做独立试验序列.设每次试验只有两个互相对立的结果 A 与 $\bar{A}$,且

$$P(A)=p,P(\bar{A})=q,0<p<1,p+q=1,$$

则在 n 次试验中事件 A 恰发生 m 次的概率

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m}, \tag{1.22}$$

公式(1.22)叫做二项概率公式.

在 n 次独立试验中事件 A 发生的次数 m 介于 m_1 与 m_2 之间的概率为

$$P(m_1\leqslant m\leqslant m_2)=\sum_{m=m_1}^{m_2}C_n^m p^m q^{n-m}. \tag{1.23}$$

在 n 次独立试验中事件 A 至少发生一次的概率为

$$P(m\geqslant 1)=1-(1-p)^n. \tag{1.24}$$

教学基本要求

1. 理解随机事件的概念，了解样本空间的概念，掌握事件之间的关系与运算.

2. 理解事件频率的概念，了解概率的统计定义.

3. 理解概率的古典定义，会计算简单的古典概率.

4. 了解概率的基本性质，掌握概率加法定理.

5. 理解条件概率的概念，掌握概率乘法定理、全概率公式.

6. 理解事件的独立性概念，掌握独立事件的概率乘法定理.

7. 理解独立重复试验的概念，掌握二项概率的计算.

例题分析与详解

例 1.1 把 n 个不同的质点随机地投入 $N(N\geqslant n)$ 个格子中，求下列事件的概率：

(1) 事件 A——指定的 n 个格子中各有 1 个质点；

(2) 事件 B——任意的 n 个格子中各有 1 个质点；

(3) 事件 C——指定的某个格子中恰有 $m(m\leqslant n)$ 个质点；

(4) 事件 D——指定的某个格子中有质点.

分析 每一个质点随机地被投入 N 个格子中的任意一个格子，各有 N 种不同的投法，所以 n 个不同的质点共有 N^n 种不同的投法.

(1) 关于事件 A，就等于 n 个不同的质点在指定的 n 个格子中进行全排列，所以有 $\mathrm{P}_n^n=n!$ 种不同的投法.

(2) 关于事件 B，我们可以先从 N 个格子中任选 n 个格子，然后再把 n 个不同的质点随机地投入选定的 n 个格子中，所以共有 $\mathrm{C}_N^n\cdot n!$ 种不同的投法.

(3) 关于事件 C，我们可以先从 n 个不同的质点中任选 m 个质点投入指定的某个格子中，然后再把其余的 $n-m$ 个质点随机地投入其他 $N-1$ 个格子中，这 $n-m$ 个质点中的每一个质点各有 $N-1$ 种不同的投法，所以共有 $\mathrm{C}_n^m\cdot(N-1)^{n-m}$ 种不同的投法.

(4) 关于事件 D，因为某个格子有质点就等于这个格子中至少有一个质点，也就等于这个格子中可能恰有 1 个质点、或 2 个质点、…、或 n 个质点；所以，如果我们把上面(3)中的事件 C 记为 C_m，则事件 D 可以分解为 n 个互不相容事件 C_1、C_2、…、C_n 的并，于是根据(3)的结论求得事件 C_1、C_2、…、C_n 的概率，然后

利用概率加法定理求解．另一方面，事件 D 的对立事件就是这个格子中没有质点，也就是事件 C_0，于是根据(3)的结论求得事件 C_0 的概率，然后利用公式(1.14)求解．

解 基本事件的总数为 N^n．

(1) 因为事件 A 包含的基本事件数为 $n!$，所以按公式(1.3)得所求概率

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}.$$

(2) 因为事件 B 包含的基本事件数为 $C_N^n\cdot n!$，所以按公式(1.3)得所求概率

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}=\frac{(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)}{N^n}.$$

(3) 因为事件 C 包含的基本事件数为 $C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}$，所以按公式(1.3)得所求概率

$$P(C)=\frac{C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}}{N^n}=C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-m}.$$

(4) 把(3)中的事件 C 改记为 $C_m(m=0,1,2,\cdots,n)$，则有

$$D=\sum_{m=1}^{n}C_m.$$

于是按概率加法公式(1.13)得所求概率

$$P(D)=\sum_{m=1}^{n}P(C_m)=\sum_{m=1}^{n}C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-m}.$$

另一种解法是：因为

$$\bar{D}=C_0,$$

所以按公式(1.14)得所求概率

$$\begin{aligned}P(D)&=1-P(\bar{D})=1-P(C_0)\\&=1-C_n^0\left(\frac{1}{N}\right)^0\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-0}=1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^n.\end{aligned}$$

容易证明上述两种解法得到的结果是相等的，事实上，因为

$$\begin{aligned}&C_n^0\left(\frac{1}{N}\right)^0\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-0}+\sum_{m=1}^{n}C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-m}\\&=\sum_{m=0}^{n}C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-m}=\left(\frac{N-1}{N}+\frac{1}{N}\right)^n=1,\end{aligned}$$

所以有

$$\sum_{m=1}^{n}C_n^m\left(\frac{1}{N}\right)^m\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-m}=1-\left(\frac{N-1}{N}\right)^n.$$

例 1.2 从 000，001，…，998，999 共 1 000 个由 3 个数字组成的号码中任取

一个号码,求取出的号码的 3 个数字之和恰为 15 的概率.

分析一 因为每个号码由 3 个数字组成,每个数字可以是 0,1,2,…,9 中的任一个数字,这是 10 个元素在 3 个位置上的可重复排列,共有 10^3 种排法.

取出的号码的 3 个数字之和恰为 15,可以分为下列各种不同的情形,这 3 个数字可能是:

$$\begin{aligned}&0,6,9;\quad 0,7,8;\quad 1,5,9;\quad 1,6,8;\quad 1,7,7;\\&2,4,9;\quad 2,5,8;\quad 2,6,7;\quad 3,3,9;\quad 3,4,8;\\&3,5,7;\quad 3,6,6;\quad 4,4,7;\quad 4,5,6;\quad 5,5,5.\end{aligned}$$

上述各种情形中,如果 3 个数字都不相同,则它们的全排列可以组成 3! 个不同的号码;如果恰有 2 个数字相同,则可以组成$\frac{3!}{2!}$个不同的号码;如果 3 个数字都相同,则只能组成 1 个号码(即 555). 计算出所有可能的号码的个数后即不难求解.

解法一 基本事件的总数 $N=10^3$. 设事件 A 表示取出的号码的 3 个数字之和恰为 15,则 A 包含的基本事件数

$$M=10\times 3!+4\times\frac{3!}{2!}+1=73.$$

于是按公式(1.3)得所求概率

$$P(A)=\frac{73}{10^3}=0.073.$$

分析二 上述分析一的方法对于由 3 个数字组成的号码还比较简单易行,但是对于由更多个数字组成的号码就相当复杂了. 为此,我们应当考虑多项式

$$(x^0+x^1+x^2+\cdots+x^9)^3=(1+x+x^2+\cdots+x^9)^3$$

的展开式. 因为上述多项式的展开式就是在 3 个完全相同的多项式

$$1+x+x^2+\cdots+x^9$$

中各取一项相乘,再合并同类项相加得到的,所以展开式中所有各项系数的和就是所有由 3 个数字组成的号码的个数,即 10^3;而展开式中 x^{15} 的系数就是 3 个数字的和恰为 15 的那些号码的个数. 这样计算不仅比分析一中的计算简便,而且不难推广到由更多个数字组成的号码的情形.

解法二 基本事件的总数 $N=10^3$. 因为

$$\begin{aligned}&(1+x+x^2+\cdots+x^9)^3\\&=\left(\frac{1-x^{10}}{1-x}\right)^3=(1-x^{10})^3(1-x)^{-3}\\&=(1-3x^{10}+\cdots)(1+\cdots+21x^5+\cdots+136x^{15}+\cdots),\end{aligned}$$

所以 x^{15} 的系数为

$$1\times 136-3\times 21=73,$$

即事件 A 包含的基本事件数 $M=73$. 于是,按公式(1.3)得所求概率

$$P(A)=\frac{73}{10^3}=0.073.$$

例 1.3 平面上画有很多条平行直线,每两条相邻直线之间的距离都是 a. 向该平面上随机地掷一根长度为 $l(l<a)$ 的针,求这根针能与平面上任一条直线相交的概率.

分析 设 x 表示针落在平面上后针的中点 M 到最近的一条直线的距离,θ 表示针与直线所成的角(图 1.1),则

$$0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},0\leqslant\theta\leqslant\pi.$$

易知针与某一条直线相交的充分必要条件是

$$x\leqslant\frac{l}{2}\sin\theta.$$

我们把 (θ,x) 表示为平面上一点的直角坐标,则所有基本事件可以用边长为 π 及 $\frac{a}{2}$ 的矩形域内的点来表示,而"针与某一条直线相交"这一事件所包含的基本事件就可以用图 1.2 中阴影部分区域内的点来表示. 由此不难利用几何概型来求解.

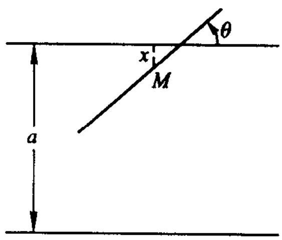

图 1.1

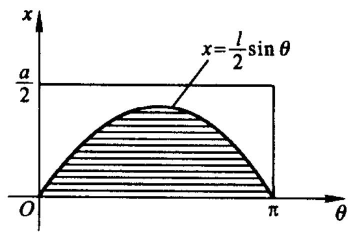

图 1.2

解 基本事件的总数可以用图 1.2 中矩形的面积 S 来表示,即有

$$S=\pi\cdot\frac{a}{2}=\frac{\pi a}{2}.$$

设事件 A 表示针与某一条直线相交,则 A 包含的基本事件数可以用图 1.2 中阴影部分区域的面积 s 来表示,即有

$$s=\int_0^\pi\frac{l}{2}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta=l.$$

于是,按公式(1.6)得所求概率

$$P(A)=\frac{l}{\frac{\pi a}{2}}=\frac{2l}{\pi a}.$$