SHUXUE HAOWAN

数学好玩丛书——初中生的书

数学好玩

——好玩的代数

李毓佩 著

长虹出版公司

SHUXUE HAOWAN

数学好玩丛书——初中生的书

数学好玩

——好玩的代数

李毓佩 著

长虹出版公司

图书在版编目(CIP)数据

好玩的代数/李毓佩著 .—北京:长虹出版公司,2004.1
ISBN 7-80063-119-2

Ⅰ.好… Ⅱ.李… Ⅲ.代数课-初中-课外读物
Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 066790 号

书　名:好玩的代数

著　者:李毓佩
出版者:长虹出版公司
[北京地安门西大街 40 号/邮政编码 100035]
印刷者:北京长宁印刷有限公司
发行者:解放军出版社发行部
经销者:新华书店

开　本:787×1092 毫米　1/32
印　张:5.75
印　数:1—5000 册
字　数:125 千字
版　次:2004 年 1 月第 1 版
印　次:2004 年 1 月(北京)第 1 次印刷

书号:ISBN 7-80063-119-2/G·38
(如有印装差错,请与本社调换)
定价:14.00 元

目　　录

“代数学”的发现

代数的威力

方程博览会

纵横闯关

代数的故事

“代数学”的发现

“代数学”的由来

“代数学”一词来自拉丁文，但是它又是从阿拉伯文变来的，这其中还有一段曲折的历史.

7 世纪初，穆罕默德创立伊斯兰教，并迅速传播开去. 他的继承者统一了阿拉伯，又不断向外扩张，建立了横跨欧、亚、非三洲的大帝国，我国史书上称为“大食国”.

大食国善于吸取被征服国家的文化，把希腊、波斯和印度的书籍译成阿拉伯文，设立许多学校、图书馆和观象台. 在这个时期出现了许多数学家，最著名的是 9 世纪的阿尔·花拉子模. 这个名字的原意是“花拉子模人摩西之子穆罕默德”，简称阿尔·花拉子模.

阿尔·花拉子模约生活于公元 780 ~ 850 年. 公元 820 年左右，他写了一本《代数学》. 到公元 1140 年左右，罗伯特把它译成拉丁文，书名是《‘ilm aljabr wa’l muquabalah》，其中 aljabr 是“还原”或“移项”的意思；

wa'l muquabalah是“对消”，即将两端相同的项消去或合并同类项．全名是“还原与对消的科学”，也可以译为“方程的科学”．后来第二个字渐渐被人遗忘，而 aljabr 这个字变成了 algebra，这就是拉丁文的“代数学”．

“代数学”这个名称，在我国是1859 年正式使用的．这一年，我国清代数学家李善兰和英国人伟烈亚力合作翻译英国数学家棣么甘所著的《Elements of Algebra》，正式定名为《代数学》．后来清代学者华蘅芳和英国人傅兰雅合译英国瓦里斯的《代数术》，卷首有“代数之法，无论何数，皆可以任何记号代之”，说明了所谓代数，就是用符号来代表数字的一种方法．

阿尔·花拉子模的《代数学》讨论了方程的解法，并第一次给出了二次方程的一般解法．书中承认二次方程有两个根，还允许无理根的存在．阿尔·花拉子模把未知数叫做“根”，是树根、基础的意思，后来译成拉丁文 radix，这个词有双重意义，它既可以指一个方程的解，又可以指一个数的方根，一直沿用到现在．

阿尔·花拉子模的《代数学》有一个重大的缺点，就是完全没有代数符号，一切算法都用语言来叙述．比如“$x^2+10x=39$”要说成“一个平方数及其根的十倍等于三十九”．如果把用符号和字母来代替文字说成是代数学的基本特征的话，阿尔·花拉子模的《代数学》恐怕名不符实．

赤字与负数

早在两千多年以前，我国就了解了正负数的概念，掌握了正负数的运算法则．那时候还没有纸，计算时使用一些小竹棍摆出各种数字．例如 378 摆成 ||| ╧ Ⅲ；6708 摆成 ⊥ ∏　Ⅲ 等等．这些小竹棍叫做“算筹”．

人们在生活中经常遇到各种具有相反意义的量．比如在记账时会有余有亏；在计算粮仓存米数时，有进粮食、出粮食．为了方便，就考虑用具有相反意义的数——正负数来记它们．把余钱记为正，亏钱记为负；进粮食记为正，出粮食记为负等等．

我国三国时期魏国学者刘徽，在建立正负数方面有重大贡献．

刘徽首先给出了正负数的定义．他说：“今两算得失相反，要令正负以名之．”意思是说，在计算过程中遇到具有相反意义的量，以正数和负数来区分它们．

刘徽第一次给出了区分正负数的方法．他说：“正算赤，负算黑．否则以邪正为异．”意思是说，用红色的棍摆出的数表示正数，黑色的棍摆出的数表示负数．也可以用斜摆的棍表示负数，用正摆的棍表示正数．

刘徽第一次给出了绝对值的概念．他说：“言负者未必负于少，言正者未必正于多．”意思是说，负数的绝对值不一定小，正数的绝对值不一定大．

我国两千年前的数学著作《九

章算术》中,记载了正负数加减法的运算法则,原话是:

“正负术曰:同名相除,异名相益,正无入负之,负无入正之;其异名相除,同名相益,正无入正之,负无入负之.”

这里“名”就是符号,“除”就是减,“相益”、“相除”就是两数绝对值相加、相减,“无”就是零.

用现代语言解释,就是:“正负数加减的法则是:同符号两数相减,等于其绝对值相减;异符号两数相减,等于其绝对值相加.零减正数得负数,零减负数得正数.异符号两数相加,等于其绝对值相减;同符号两数相加,等于其绝对值相加.零加正数得正数,零加负数得负数.”

这一段关于正负数加减法的叙述,是完全正确的.负数的引入是我国古代数学家杰出的创造之一.

用不同颜色的数来表示正负数的习惯一直保留到现在.现代一般用红色数表示亏钱,表示负数.报纸上有时登载某某国家经济上出现“赤字”,表明这个国家支出大于收入,财政上亏了钱.

无理数与谋杀案

无理数怎么和谋杀案扯到一起去了?这件事还要从公元前6世纪古希腊的毕达哥拉斯学派说起.

毕达哥拉斯学派的创始人是著名数学家毕达哥拉斯.他认为:“任何两条线段之比,都可以用两个整数的比来表示.”两个整数的比实际上包括了整数和分数.因此,毕达哥拉斯认为,世界上只存在整数和分数,除此以外,没有别的什么数了.

可是，不久就出现了一个问题(图1)，当一个正方形的边长是1的时候，对角线的长 m 等于多少？是整数呢，还是分数？

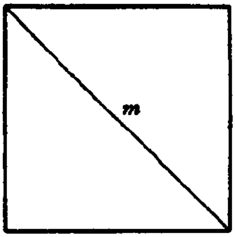


图1

根据勾股定理 $m^2 = 1^2 + 1^2 = 2$. m 显然不是整数，因为 $1^2 = 1, 2^2 = 4$，而 $m^2 = 2$，所以 m 一定比1大，比2小.那么 m 一定是分数了.可是，毕达哥拉斯和他的门徒费了九牛二虎之力，也找不出这个分数.

边长为1的正方形，它的对角线 m 总该有个长度吧！如果 m 既不是整数，又不是分数，m 究竟是个什么数呢？难道毕达哥拉斯错了，世界上除了整数和分数以外还有别的数？这个问题引起了毕达哥拉斯极大的苦恼.

毕达哥拉斯学派有个成员叫希伯斯，他对正方形对角线问题也很感兴趣，花费了很多时间去钻研这个问题.

毕达哥拉斯研究的是正方形的对角线和边长的比，而希伯斯却研究的是正五边形的对角线和边长的比.希伯斯发现，当正五边形的边长为1时，对角线既不是整数也不是分数，如图2.希伯斯断言：正五边形的对角线和边长的比，是人们还没有认识的新数.

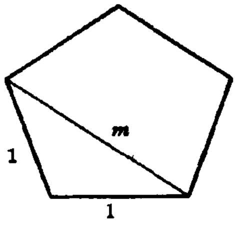


图2

希伯斯的发现，推翻了毕达哥拉斯认为数只有整数和分数的理论，动摇了毕达哥拉斯学派的基础，引起了毕达哥拉斯学派的恐慌.为了维护毕达哥拉斯的威信，他们下令严密封锁希伯斯的发

现,如果有人胆敢泄露出去,就处以极刑——活埋.

真理是封锁不住的.尽管毕达哥拉斯学派教规森严,希伯斯的发现还是被许多人知道了.他们追查泄密的人,追查的结果,发现泄密的不是别人,正是希伯斯本人!

这还了得!希伯斯竟背叛老师,背叛自己的学派.毕达哥拉斯学派按照教规,要活埋希伯斯.希伯斯听到风声逃跑了.

希伯斯在国外流浪了好几年,由于思念家乡,他偷偷地返回希腊.在地中海的一条海船上,毕达哥拉斯的忠实门徒发现了希伯斯,他们残忍地将希伯斯扔进地中海.无理数的发现人被谋杀了!

希伯斯虽然被害死了,但是无理数并没有随之而消灭.从希伯斯的发现中,人们知道了除去整数和分数以外,还存在着一种新数,$\sqrt{2}$ 就是这样的一个新数.给新发现的数起个什么名字呢?当时人们觉得,整数和分数是容易理解的,就把整数和分数合称"有理数";而希伯斯发现的这种新数不好理解,就取名为"无理数".

有理数和无理数有什么区别呢?

主要区别有两点.

第一,把有理数和无理数都写成小数形式时,有理数能写成有限小数或无限循环小数,比如

$$4 = 4.0,\ \frac{4}{5} = 0.8,\ \frac{1}{3} = 0.333\cdots\cdots$$

而无理数却只能写成无限不循环小数，比如

$$\sqrt{2} = 1.4142\cdots\cdots$$

根据这一点，人们把无理数定义为无限不循环小数.

第二，所有的有理数都可以写成两个整数之比；而无理数却不能写成两个整数之比. 根据这一点，有人建议给无理数摘掉"无理"的帽子，把有理数改叫"比数"，把无理数改叫"非比数". 本来嘛，无理数并不是不讲道理，只是人们最初对它不太理解罢了.

利用有理数和无理数的主要区别，可以证明$\sqrt{2}$是无理数，使用的方法是反证法.

证明$\sqrt{2}$是无理数.

证明：假设$\sqrt{2}$不是无理数，而是有理数.

既然$\sqrt{2}$是有理数，它必然可以写成两个整数之比的形式：

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}.$$

又由于 p 和 q 有公因数可以约去，所以可以认为$\dfrac{p}{q}$为既约分数.

把$\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$两边平方，

得 $\quad 2 = \dfrac{p^2}{q^2}$,

即 $\quad 2q^2 = p^2$.

由于 $2q^2$ 是偶数，p 必定为偶数，设 $p = 2m$.

由 $\quad 2q^2 = 4m^2$,

得 $\quad q^2 = 2m^2$.

同理，q 必然也为偶数，设 $q = 2n$.

即然 p 和 q 都是偶数，它们必有公因数 2，这与前面假设 $\frac{p}{q}$ 是既约分数矛盾．这个矛盾是由假设$\sqrt{2}$ 是有理数引起的，因此$\sqrt{2}$ 不是有理数，而应该是无理数．

无理数可以用线段长度来表示．如图 3 是在数轴上确定某些无理数的位置，其中$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$…… 都是无理数．具体做法是：

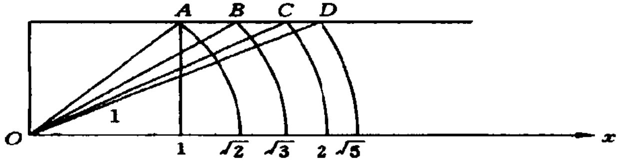


图 3

在数轴上，以原点 O 为一个顶点，以从 O 到 1 为边作一个正方形．根据勾股定理有

$$OA^2 = 1^2 + 1^2 = 2,$$

$$OA = \sqrt{2}.$$

以 O 为圆心、OA 为半径画弧与 OX 轴交于一点，该点的坐标为$\sqrt{2}$，也就是说在数轴上找到了表示$\sqrt{2}$ 的点；以$\sqrt{2}$ 点引垂直于 OX 轴的直线，与正方形一边的延长线交于 B，同理可得 $OB = \sqrt{3}$，可在数轴上同法得到$\sqrt{3}$．还可以得到$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{7}$ 等等无理数点．

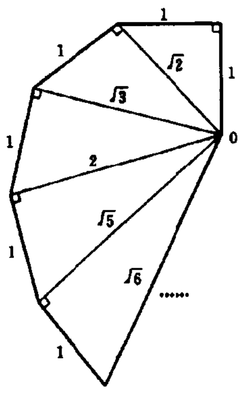


图 4

也可以用作直角三角形的方

法，得到表示$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$等无理数的线段，如图4所示.

有理数与无理数合称实数.初中阶段遇到的数都是实数.今后还要陆续学到许多无理数，如 e，$\sin 10^\circ$，$\log_{10}3$ 等等.

虚无缥缈的数

从自然数逐步扩大到了实数，数是否“够用”了?够不够用，要看能不能满足实践的需要.

在研究一元二次方程 $x^2+1=0$ 时，人们提出了一个问题：我们都知道在实数范围内 $x^2+1=0$ 是没有解的，如果硬把它解算一下，看看会得到什么结果呢?

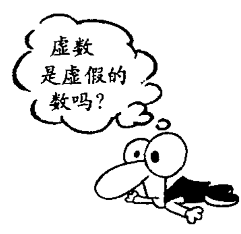
由 $x^2+1=0$，得 $x^2=-1$.

两边同时开平方，得 $x=\pm\sqrt{-1}$（通常把$\sqrt{-1}$记为 i）.

$\sqrt{-1}$是什么?是数吗?关于这个问题的正确回答，经历了一个很长的探索过程.

16世纪意大利数学家卡尔丹和邦贝利在解方程时，首先引进了$\sqrt{-1}$，对它还进行过运算.

17世纪法国数学家和哲学家笛卡儿把$\sqrt{-1}$叫做“虚数”，意思是“虚假的数”、“想像当中的，并不存在的数”.他把人们熟悉的有理数和无理数叫做“实数”，意思是“实际存在的数”.



数学家对虚数是什么样的数，一直感到神秘莫测.笛卡儿认为：虚数是“不可思议的”.大数学家莱布尼兹一直到18

世纪还以为“虚数是神灵美妙与惊奇的避难所，它几乎是又存在又不存在的两栖物”.

随着数学研究的进展，数学家发现像$\sqrt{-1}$这样的虚数非常有用，后来把形如$2+3\sqrt{-1}$，$6-5\sqrt{-1}$，一般地把

$$a+b\sqrt{-1}$$

记为$a+bi$，其中a，b为实数，这样的数叫做复数.

当$b=0$时，就是实数；

当$b\neq 0$时，叫做虚数；

当$a=0$，$b\neq 0$时，叫做纯虚数.

虚数作为复数的一部分，也是客观存在的一种数，并不是虚无缥缈的. 由于引进了虚数单位$\sqrt{-1}=i$，数学家的视野开阔了，许多数学问题解决了. 如负数在复数范围内可以开偶次方，因此在复数内加、减、乘、除、乘方、开方六种运算总是可行的；在实数范围内，一元n次方程不一定总是有根的，比如$x^2+1=0$在实数范围内就无根. 但是在复数范围内，它总有n个根. 复数的建立不仅解决了代数方面的问题，也为其他学科和工程技术解决了许多问题.

自然数、整数、有理数、实数、复数，人类认识的数，在不断地向外膨胀，如图5.

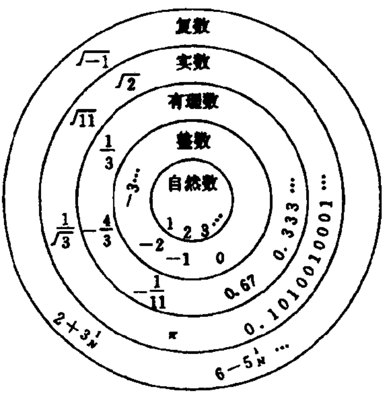


图5

随着数概念的扩大，数增添了许多新的性质，但是也减少了某些性质. 比如在

实数范围内，数之间是可以比较大小的，可是在复数范围内，数之间已经不能比较大小了.

所谓能比较大小，就是对于规定的“$>$”关系能满足下面四条性质：

(1) 对于任意两个不同的实数 a 和 b，或 $a > b$，或 $b > a$，两者不能同时成立.

(2) 若 $a > b, b > c$，则 $a > c$.

(3) 若 $a > b$，则 $a + c > b + c$.

(4) 若 $a > b, c > 0$，则 $ac > bc$.

对于实数范围内的数，“$>$”关系是满足这四条性质的.但对于复数范围内，数之间是否能规定一种“$>$”关系来满足上述四条性质呢？答案是不能的，也就是说复数不能比较大小.

为了证明这个结论，咱们还是先看看复数运算的部分内容，证明中要用到它.

(1) $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$,

$\sqrt{-1} \cdot 0 = 0$,

$(-\sqrt{-1}) \cdot 0 = 0$,

$(-\sqrt{-1}) \cdot (-\sqrt{-1}) = -1$,

$\sqrt{-1} + (-\sqrt{-1}) = 0$,

$0 + (-\sqrt{-1}) = -\sqrt{-1}$.

(2) 复数中的实数仍按实数的运算法则进行运算.

现在用反证法证明复数不能比较大小.