方程论初步

余元庆编著

上海教育出版社

方 程 论 初 步

余元庆编著

上海教育出版社

方　程　论　初　步

余元庆编著

上海教育出版社出版

（上海永福路123号）

新华书店上海发行所发行　　上海崇明印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张3.5　字数[illegible]9,000

1[illegible]4年8月第1版　1979年2月第3次印刷

印数 155,001—275,000本

统一书号：7150.1530　　定价：0.30元

編者的話

方程論是代数的一个分支．方程論中的一些重要定理和方法，在进一步学习和解决实际問題时常要用到．方程論中的一些論証和思考問題的方法，对于进一步学习也很有启发作用．在中学代数課本里，也讲到了有关这方面的一些初步知識．因此編写这本小册子以供教师了解这些知識时参考．

这本书里，对方程論的初步知識，作了比較詳細的闡述．在第一章里，闡述了有关多項式的一些重要知識．这些知識是学习后两章内容的重要基础．第二章是本书的主要部分．在这一章里，詳細闡述了高次方程的一些重要性质，并且举例指出了它們的应用．在第三章里，闡述了一些特殊的高次方程的解法和三次、四次方程的一般解法．

求高次方程的根的近似值，也是方程論的一个重要內容，并且有一定的实用价值．关于这方面的知識，准备在另一本书里再作詳細闡述．在这本书里，对于这个內容以及与这个內容有关的一些知識，如笛卡儿符号法則、无理根的勘定等，都沒有涉及．

本书里举了一些有代表性的例題，并且編选了一定数量的练习題，企图通过这些例題和练习題来說明一些思考問題的方法．为了便于讀者自己检驗，书里的一些练习題都附有答案，較难的題目，还附有提示．

余元庆

1964年3月于北京

目　录

一 多項式的一些重要性质

在这本书里，我們将要研究方程的一些理論和解法．在研究这些理論和解法的时候，需要用到多項式的一些重要性质．因此，在这一章里，我們先来研究这些性质．因为在这本书里，我們只研究含有一个未知数的方程，而在研究一元方程的时候，只需要用到一个变量的多項式的性质，所以以后我們所說的多項式，都是指一元多項式．

§1. 多 項 式

我們先来說明多項式的定义．

形式如

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的代数式，式中 n 是正整数，a_0、a_1、a_2、……、a_n 都是常数，叫做 x 的**多項式**．如果 $a_0\neq0$，那末 a_0x^n 叫做这个**多項式的首項**．一个多項式的首項的次数就是这个**多項式的次数**．

为了說明方便起见，我們把不等于 0 的常数，叫做 x 的 **0 次多項式**，把常数 0 叫做**零多項式**．零多項式沒有次数．应該注意，一个多項式的次数是 0 和一个多項式沒有次数是有区别的．

注 在引进了 0 次多項式和零多項式这两个概念以后，对于多項式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

也就可以区分成零多項式与非零多項式两大类：

(1) 如果 a_0、a_1、a_2、……、a_{n-1}、a_n 都等于零，那末这个多項式是零多項式；

(2) 如果 a_0、a_1、a_2、……、a_{n-1}、a_n 不全等于零，那末这个多項式是非零多項式.

也可以这样說：

(1) 不具有次数的多項式叫做零多項式；

(2) 具有次数(0次，1次，……，n次)的多項式，叫做非零多項式

在这本书里，我們用符号 $f(x)$、$g(x)$、$h(x)$ 等来表示 x 的多項式，用符号 $f(c)$ 来表示 $x=c$ 时，多項式 $f(x)$ 的值．例如，設 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$，那末 $f(0)=-6$，$f(1)=0$，$f(2)=0$，$f(3)=0$，$f(-\sqrt{2})=-18-13\sqrt{2}$.

如果 $x=c$ 时，多項式 $f(x)$ 的值是 0，那末 c 叫做多項式 $f(x)$ 的**根**(或者零点)．例如数 1、2 和 3 都是多項式 $f(x)=x^3-6x^2+11x-6$ 的根.

两个多項式在并且只在它們的差是零多項式时相等．例如，多項式

$$f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$$

和

$$g(x)=b_0x^3+b_1x^2+b_2x+b_3$$

在 $f(x)-g(x)=0$ 时相等，并且只在 $f(x)-g(x)=0$ 时相等.

$f(x)$ 和 $g(x)$ 的差

$$(a_0-b_0)x^3+(a_1-b_1)x^2+(a_2-b_2)x+(a_3-b_3)$$

是零多項式的含义就是

$$a_0-b_0=0, a_1-b_1=0, a_2-b_2=0, a_3-b_3=0.$$

因此，一般地，我們可以說，**两个多項式在并且只在它們的对应項的系数相等时相等**．例如，多項式 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 和 x^2-4 在 $a_0=0$，$a_1=1$，$a_2=0$，$a_3=-4$ 时相等，并且只在 $a_0=0$，$a_1=1$，$a_2=0$，$a_3=-4$ 时相等.

下面我們来証明以后需要用到的几个定理.

定理一　两个非零多項式的和，或者是零多項式，或者它的

次数不超过次数較大的一个多項式的次数.

証明 設有两个非零多項式

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m,\ a_0\neq 0,$$
$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n,\quad b_0\neq 0,$$

并且 $m\geqq n$.

如果 $m=n$, 那末

$$f(x)+g(x)=(a_0+b_0)x^m+(a_1+b_1)x^{m-1}+\cdots\cdots+(a_m+b_n).$$

当 a_0+b_0, a_1+b_1, $\cdots\cdots$, a_m+b_n 全等于 0 时, $f(x)+g(x)$是零多項式; 当 $a_0+b_0, a_1+b_1, \cdots\cdots, a_m+b_n$ 不全等于 0 时, $f(x)+g(x)$ 不是零多項式, 它的次数小于或者等于 m, 就是不超过 $f(x)$ 的次数.

如果 $m>n$, 那末

$$f(x)+g(x)=a_0x^m+\cdots\cdots+(a_m+b_n),\ a_0\neq 0.$$

$f(x)+g(x)$ 的次数等于 m, 就是等于 $f(x)$ 的次数.

这样就証明了这个定理.

定理二　两个非零多項式的积的次数, 等于两个多項式的次数的和.

証明 設有两个非零多項式

$$f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots\cdots+a_m,\ a_0\neq 0,$$
$$g(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\cdots\cdots+b_n,\ b_0\neq 0.$$
$$f(x)\cdot g(x)=a_0b_0x^{m+n}+\cdots\cdots+a_mb_n.$$

因为 $a_0\neq 0$, $b_0\neq 0$, 所以$a_0b_0\neq 0$. 因此, $f(x)\cdot g(x)$ 的次数是 $m+n$, 就是等于 $f(x)$ 的次数与 $g(x)$ 的次数的和.

定理三　两个多項式在并且只在其中至少有一个是零多項式时, 它們的积是零多項式.

这个定理要分两步来証明: 先証明两个多項式中有一个是

零多項式或者两个都是零多項式，它們的积是零多項式；再証明两个多項式都不是零多項式，它們的积不是零多項式.

証明 如果多項式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 中，有一个是零多項式或者两个都是零多項式，那末 $f(x)\cdot g(x)$ 的每一項的系数都是 0，因此，$f(x)\cdot g(x)$ 是零多項式.

如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都不是零多項式，那末每个多項式都有次数，因此，$f(x)\cdot g(x)$ 也有次数，而不是零多項式.

这样就証明了这个定理.

练　习

1. 已知 $f(x)=a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$，求証：

$$f(x+h)=f(x)+(3a_0x^2+2a_1x+a_2)h+(3a_0x+a_1)h^2+a_0h^3.$$

[**提示** $f(x+h)=a_0(x+h)^3+a_1(x+h)^2+a_2(x+h)+a_3$.]

2. 求証：如果 α_1、α_2、……、α_n 两两不等，那末多項式

$$f(x)=a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots\cdots(x-\alpha_n),\ a_0\neq 0$$

有并且只有 n 个根 α_1、α_2、……、α_n.

[**提示** 先証明 $f(\alpha_1)$、$f(\alpha_2)$、……、$f(\alpha_n)$ 都等于 0，再証明如果 α_{n+1} 和 α_1、α_2、……、α_n 中每一个数都不相等，那末 $f(\alpha_{n+1})\neq 0$.]

3. 已知 $f(x)$ 是 n 次多項式，并且 $f(x)=(x-a)\,g(x)$，求 $g(x)$ 的次数.　　[答：$(n-1)$次.]

4. 已知 $f(x)$ 是 m 次多項式，$g(x)$ 是 n 次多項式，a 和 b 是两个不等于 0 的常数，討論 $a\cdot f(x)+b\cdot g(x)$的次数.

[答：$m>n$ 时，$a\cdot f(x)+b\cdot g(x)$ 的次数$=m$；$m<n$ 时，$a\cdot f(x)+b\cdot g(x)$的次数$=n$；$m=n$ 时，$a\cdot f(x)+b\cdot g(x)$ 或者是零多項式，或者它的次数$\leqq m$.]

§2. 余式定理和因式定理、綜合除法

对于一个多項式 $f(x)$，我們常常要考察它是不是能够被一

个一次二项式整除，或者它被这个一次二项式所除，所得的余式是什么．很明显的，这个問題可以从直接做除法得到解决．现在，我們来研究，怎样可以不通过做除法来解决这个問題．

我們知道，在除法中被除式、除式、商和余式之間存在着如下的关系：

$$被除式=除式\times商+余式.$$

如果多項式 $f(x)$ 被一个非零多項式 $g(x)$ 所除，所得的商是 $q(x)$、余式是 $r(x)$，那末就有

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x), \tag{1}$$

这里 $r(x)$ 是次数小于 $g(x)$ 的次数的多項式，或者是零多項式．

现在我們来証明，具有上述关系(1)的商 $q(x)$ 和余式 $r(x)$ 只有一組．

定理一　如果 $\boldsymbol{f(x)}$ 和 $\boldsymbol{g(x)}$ 是两个已知的多項式，其中 $\boldsymbol{g(x)}$ 不是零多項式，那末存在并且只存在两个多項式 $\boldsymbol{q(x)}$ 和 $\boldsymbol{r(x)}$，能使

$$\boldsymbol{f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)}, \tag{1}$$

其中 $\boldsymbol{r(x)}$ 是次数小于 $\boldsymbol{g(x)}$ 的次数的多項式或者是零多項式．

这个定理要分两步来証明．第一步証明存在两个多項式 $q(x)$ 和 $r(x)$ 能使(1)式成立(就是証明存在性)；第二步証明能使(1)式成立的 $q(x)$ 和 $r(x)$ 只有一組(就是証明唯一性)．这一步可以用同一法，就是証明如果再有一組多項式 $q_1(x)$ 与 $r_1(x)$ 能使(1)式成立，那末必有 $q(x)=q_1(x)$，$r(x)=r_1(x)$．

証明　(1) 存在性　用代数里的长除法可以求得满足定理中的条件的两个多項式 $q(x)$ 和 $r(x)$．

(2) 唯一性　现在假定除了这两个多項式以外，多項式 $q_1(x)$ 和 $r_1(x)$ 也满足定理中的条件，那末就有

$$g(x)\cdot q(x)+r(x)=g(x)\cdot q_1(x)+r_1(x),$$

从而就有 $g(x)[q(x)-q_1(x)]=r_1(x)-r(x)$.

設 $g(x)$ 的次数是 n，那末 $r(x)$ 的次数小于 n，或者 $r(x)$ 是零多項式；同样，$r_1(x)$ 的次数小于 n，或者 $r_1(x)$ 是零多項式. 因此，$r_1(x)-r(x)$ 的次数小于 n，或者 $r_1(x)-r(x)$ 是零多項式.

$q(x)-q_1(x)$ 只有两种可能：或者是零多項式，或者不是零多項式.

如果 $q(x)-q_1(x)$ 不是零多項式，那末 $q(x)-q_1(x)$ 的次数大于或者等于 0. 根据 §1 的定理二知道，$g(x)[q(x)-q_1(x)]$ 的次数大于或者等于 n. 但是 $r_1(x)-r(x)$ 的次数小于 n，或者 $r_1(x)-r(x)$ 是零多項式. 这样 $g(x)[q(x)-q_1(x)]$ 和 $r_1(x)-r(x)$ 就不相等. 因此，$q(x)-q_1(x)$ 不是零多項式是不可能的.

由此可知，$q(x)-q_1(x)$ 是零多項式，从而知道，$q(x)=q_1(x)$.

因为 $q(x)-q_1(x)$ 是零多項式，$r_1(x)-r(x)=g(x)[q(x)-q_1(x)]$；所以根据 § 1 的定理三知道，$r_1(x)-r(x)$ 是零多項式，从而知道 $r(x)=r_1(x)$.

由此可知，满足定理中的条件的多項式只有 $q(x)$ 和 $r(x)$. 这样就証明了这个定理.

在定理一中，如果 $r(x)=0$，那末就有

$$f(x)=g(x)\cdot q(x).$$

在这种情形，我們就說 $g(x)$ 能够整除 $f(x)$，$g(x)$ 是 $f(x)$ 的因式.

在定理一中，如果 $g(x)=x-a$，那末就有

$$f(x)=(x-a)q(x)+r(x).$$

因为 $x-a$ 是一次多項式，所以 $r(x)$ 是 0 次多項式或者是零多項式，就是 $r(x)$ 是一个常数 R.

等式

$$f(x)=(x-a)q(x)+R$$

对于 x 的任何的值都能成立．当 $x=a$ 时，我們就得到

$$f(a)=R.$$

这样，我們就得到了下面的定理．

定理二（余式定理）　以 $x-a$ 除多項式 $f(x)$ 所得的余式等于 $f(a)$.

应用这个定理，我們就可以不通过除法来求多項式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 所得的余式，或者判断多項式 $f(x)$ 能不能被 $x-a$ 所整除．

例如，要求多項式 $f(x)=3x^3-2x^2-1$ 除以 $x-1$ 所得的余式，我們只須計算 $f(1)$ 的值，得 $f(1)=3-2-1=0$，由此就可以知道所求的余数是 0，并且可以确定 $f(x)$ 能被 $x-1$ 所整除．

应用定理一和定理二，还可以推出下面这个定理：

定理三（因式定理）　多項式 $f(x)$ 在并且只在 $f(a)=0$ 时有因式 $x-a$.

証明　根据定理一和二，我們有

$$f(x)=(x-a)\,q(x)+f(a).$$

如果 $f(a)=0$，那末

$$f(x)=(x-a)q(x).$$

因此，$f(x)$ 有因式 $x-a$.

如果 $f(a)\neq 0$，那末 $f(x)$ 不能被 $x-a$ 整除．因此，$f(x)$ 沒有因式 $x-a$.

这样就証明了这个定理．

从定理三可以推得：如果 $a\neq b$，那末多項式 $f(x)$ 在并且只在 $f(a)=f(b)=0$ 时有因式 $(x-a)(x-b)$.

这是因为：如果 $f(a)=f(b)=0$，那末根据 $f(a)=0$，可得

$$f(x)=(x-a)q(x).$$

因此，
$$f(b)=(b-a)q(b).$$

因为 $f(b)=0, b-a\neq 0$，所以 $q(b)=0$．这样又得

$$q(x)=(x-b)q_1(x).$$

从而就可以得到 $f(x)=(x-a)(x-b)q_1(x)$．因此，$f(x)$ 有因式 $(x-a)(x-b)$．

如果 $f(a)$ 和 $f(b)$ 中有一个不等于 0，那末 $f(x)$ 就不能被 $x-a$ 或 $x-b$ 整除．因此，$f(x)$ 沒有因式 $(x-a)(x-b)$．

照上面那样推下去，我們就可以得出下面的推論．

推論　如果 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、……、$\boldsymbol{k}$ 两两不等，那末多项式 $\boldsymbol{f(x)}$ 在并且只在

$$\boldsymbol{f(a)=f(b)=\cdots\cdots=f(k)=0}$$

时有因式

$$\boldsymbol{(x-a)(x-b)\cdots\cdots(x-k)}.$$

应用定理二，我們还可以通过除法来求当 $x=b$ 时多项式 $f(x)$ 的值 $f(b)$，这样做有时可以比直接代入計算来得簡便．为此，我們先来介紹一种用二项式 $x-b$ 除多项式 $f(x)$ 的簡便方法．

我們来观察以 $x-b$ 除 $a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3$ 所得的商和余式．

$$
\begin{array}{l|l}
a_0x^3+a_1x^2\quad+a_2x\qquad\qquad+a_3 & x-b \\
\cline{2-2}
\underline{a_0x^3-a_0bx^2} & a_0x^2+(a_1+a_0b)x+[a_2+(a_1+a_0b)b] \\
\quad(a_1+a_0b)x^2+a_2x & \\
\quad\underline{(a_1+a_0b)x^2-(a_1+a_0b)bx} & \\
\qquad\qquad[a_2+(a_1+a_0b)b]x+a_3 & \\
\qquad\qquad\underline{[a_2+(a_1+a_0b)b]x-[a_2+(a_1+a_0b)b]b} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad a_3+[a_2+(a_1+a_0b)b]b &
\end{array}
$$

商的各項的系数和余式依次是：

a_0，a_1+a_0b，$a_2+(a_1+a_0b)b$，$a_3+[a_2+(a_1+a_0b)b]b$.

这些数里的第一个就是被除式的首項的系数，其余各数可以逐次用下面的法則求得：

被除式中紧接着的一个系数，加上以 b 乘上一次所得的系数的积.

因此，我們可以用下面的式子求得商的各項的系数和余式.

$$\begin{array}{cccc|l} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & b \\ & +a_0b & +(a_1+a_0b)b & +[a_2+(a_1+a_0b)b]b & \\ \hline a_0 & a_1+a_0b & a_2+(a_1+a_0b)b & a_3+[a_2+(a_1+a_0b)b]b & \end{array}$$

这个法則不論被除式是几次多項式都是适用的．用这种方法来求二項式除多項式所得的商和余式，叫做**綜合除法**.①

例 1　求 $x-3$ 除 $2x^4-x^3+3x^2+5x-6$ 的商和余式.

解

$$\begin{array}{r|l} 2-1+\ 3+\ 5-\ \ 6 & 3 \\ +6+15+54+177 & \\ \hline 2+5+18+59+171 & \end{array}$$

答：商是 $2x^3+5x^2+18x+59$，余式是 171.

用綜合除法求商和余式，遇到被除式中某一項的系数是 0 时，系数 0 必須写上.

例 2　求 $x+2$ 除 x^5+2x^2-12x 的商和余式.

注　$x+2=x-(-2)$.

解

$$\begin{array}{r|l} 1+0+0+2-12+0 & -2 \\ -2+4-8+12+0 & \\ \hline 1-2+4-6+\ 0\ +0 & \end{array}$$

答：商是 $x^4-2x^3+4x^2-6x$，余式是 0.

例 3　求 $2x-3$ 除 $4x^4-7x^2-7x-6$ 的商和余式.

① 綜合除法是霍納(1786—1837)在 1819 年提出来的，所以也叫做霍納法.

因为$f(x)=(ax-b)q(x)+R=\left(x-\dfrac{b}{a}\right)[a\cdot q(x)]+R$，所以以 $ax-b$ 除 $f(x)$ 可以先以 $x-\dfrac{b}{a}$除 $f(x)$，得到商的 a 倍和余式，再以 a 除商的 a 倍得到商.

解

$$
\begin{array}{r|l}
4+0-7-7-6 & \dfrac{3}{2} \\
+6+9+3-6 & \\
\hline
2\;\;4+6+2-4-12 & \\
2+3+1-2 &
\end{array}
$$

答：商是 $2x^3+3x^2+x-2$，余式是 -12.

例4 已知 $f(x)=x^5-12x^3+15x-7$，求 $f(6)$.

因为以 $x-6$ 除 $f(x)$ 所得的余式等于 $f(6)$，所以用綜合除法求出以 $x-6$ 除 $f(x)$ 所得的余式就可以得到 $f(6)$.

解

$$
\begin{array}{r|l}
1+0-12+\;\;0+\;\;15-\;\;\;7 & 6 \\
+6+36+144+864+5274 & \\
\hline
1+6+24+144+879+5267 &
\end{array}
$$

答：$f(6)=5267$.

很明显，用綜合除法来求 $f(6)$，比用 6 代替 $f(x)$ 中的 x，計算要簡便得多.

练　　习

1. 求 $f(x)=x^3+4x^2+lx+2$ 除以 $g(x)=x^2+mx+1$ 的商和余式，并且确定 l 和 m 是什么数值时，$g(x)$ 能够整除 $f(x)$.

[答：商是 $x+(4-m)$，余式是 $(l-1-4m+m^2)x+(m-2)$；在 $l=5$，$m=2$ 时，$g(x)$ 能够整除 $f(x)$.]

[**提示** 用长除法求商和余式. 当余式是零多项式时，就是当 $l-1-4m+m^2=0$，$m-2=0$ 时，$g(x)$ 能够整除 $f(x)$.]

2. 求 $f(x)=x^n+a^n$ 除以 $x+a$ 的余式.

[答：n 是奇数时，余式是 0；n 是偶数时，余式是 $2a^n$.]

3. 已知 $f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n$，求証：

(1) 在 $a_0+a_1+\cdots\cdots+a_n=0$ 时，$f(x)$ 能够被 $x-1$ 整除；

(2) 在 $a_0-a_1+\cdots\cdots+(-1)^na_n=0$ 时，$f(x)$ 能够被 $x+1$ 整除.

[**提示** (2) 当 n 是奇数时，$f(-1)=-a_0+a_1-\cdots\cdots+(-1)^{n+1}a_n=-[a_0-a_1+\cdots\cdots+(-1)^na_n]$；$n$ 是偶数时，$f(-1)=a_0-a_1+\cdots\cdots+(-1)^na_n$.]

4. l 和 m 是什么数值时，$f(x)=x^4+x^3+lx+m$ 能够被 $g(x)=x^2+x-2$ 整除？ [答：$l=2$, $m=-4$.]

5. 求証 $f(x)=6x^4-x^3-18x^2+x+12$ 有因式 $x-1$ 和 $x+1$，并且把 $f(x)$ 分解成四个一次因式.

[答：$f(x)=(x-1)(x+1)(2x-3)(3x+4)$.]

6. 已知 $f(x)=2x^3+7x^2+l$ 有因式 $2x+3$，决定 l 的值，并且把 $f(x)$ 分解成三个一次因式.

[答：$l=-9$；$f(x)=(2x+3)(x-1)(x+3)$.]

7. 已知 $f(x)=x^5+lx^3+mx^2+n$ 有因式 $(x-1)^3$，决定 l、m、n 的值，并且把 $f(x)$ 分解成五个一次因式.

[答：$l=-5$, $m=5$, $n=-1$；$f(x)=(x-1)^3\left(x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.]

[**提示** 先用 $x-1$ 除 $f(x)$，得 $l+m+n+1=0$，再用 $x-1$ 除所得的商，得 $3l+2m+5=0$，再用 $x-1$ 除所得的商，得 $3l+m+10=0$. 解这三个方程組成的方程組，得 $l=-5$, $m=5$, $n=-1$，从而得出 $f(x)=(x-1)^3(x^2+3x+1)$. 又 $x^2+3x+1=x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2=\left(x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$.]

§3. 两个多项式的最高公因式、輾轉相除法

在算术里，我們知道如果两个整数 a、b 都能够被整数 c 整

除，那末 c 就叫做 a、b 的公約数；因为任何一个整数都能够被 1 整除，所以两个整数的公約数总是存在的.

对于多項式来說，也有类似的性质.

如果两个多項式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都能够被多項式 $h(x)$ 整除，那末 $h(x)$ 叫做 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式. 因为任何一个多項式都能够被一个不等于零的常数也就是一个 0 次多項式整除，所以两个多項式的公因式总是存在的. 事实上，至少每一个 0 次多項式都是它們的公因式.

我們还知道，在两个整数 a、b 的公約数中一定有最大的一个，这个公約数叫做 a、b 的最大公約数；两个整数 a、b 的最大公約数一定能够被 a、b 的任何一个公約数整除. 例如，整数 12、18 的最大公約数是 6，它能够被 12、18 的一切公約数 6、3、2、1 中的任何一个所整除. 一般地說，如果 d 是整数 a、b 的公約数，而且 d 能够被 a、b 的任何一个公約数整除，那末 d 就是 a、b 的最大公約数.

类似的，如果多項式 $d(x)$ 是多項式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公因式，并且 $d(x)$ 能够被 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的任何一个公因式整除，那末 $d(x)$ 叫做 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式.

对于两个整数 a、b 来說，它們的最大公約数是唯一存在的. 但是对于两个多項式 $f(x)$ 和 $g(x)$ 来說，它們的最高公因式却可以有不同的形式. 事实上，我們可以証明（见第 16 頁），如果 $d(x)$ 是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式，那末用一个 0 次多項式 c（就是不等于 0 的常数）去乘 $d(x)$ 所得的积 $c\cdot d(x)$ 也都是 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的最高公因式. 例如 $x-1$ 是 x^3-1 和 x^2-1 的最高公因式，$\frac{1}{2}(x-1)$，或者 $2(x-1)$ 等等，也都可以认为是 x^3-1 和 x^2-1 的最高公因式.