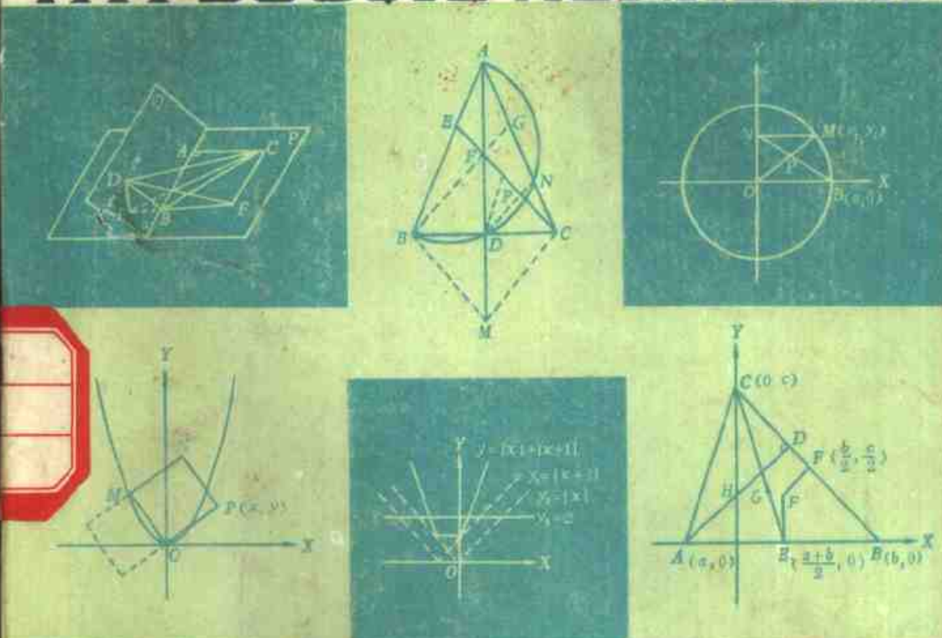
高中数学

一题多解选编

（综合题部份）

柯景龙

YITI DUOJIE XUANBIAN



内蒙古教育出版社

高中数学

一题多解选编

（综合题部分）

柯 景 龙

内蒙古教育出版社

1983年3月

高中数学一题多解选编
（综合题部分）
·
内蒙古教育出版社编辑出版
内蒙古新华书店发行　　呼和浩特印刷厂印刷
开本：787×1092毫米　1/32　印张：8
1983年11月第1版　　1983年11月第1次印刷
印数：1—90,620 册
书号：7167·839　　定价：0.67 元

前　言

高中数学《一题多解选编》一书，是作者选自多年中学数学教学实践中所解的例、习题资料，根据广大在校中学生和校外自学青年的课外及业余阅读需要，在出版《解析几何部分》之后，现在把《综合题部分》选编出版。

本书的内容是，把《中学数学教学大纲》范围的代数、几何、三角，分单科和多科两种综合题，精选了具有基本训练和综合训练意义的典型范例，逐题进行了分析，同时用不同基础知识不同解题方法，作出了多种解法。

本书的特点是，对于具有初中水平的自学数学的青年，复习高中数学的在校生、补课生、以及青年职工，在积累和掌握多种解题方法，提高分析能力，开拓解题思路、探求解题方法方面，具有一定的启发和引导意义。对于广大中学数学教师亦可作为教学参考用书。

因编写者水平所限，书中可能有不足与失误之处，希望读者多加指正。最后，对协助整理、定稿、审校本书的有关同志，在此谨表衷恳的谢意！

编　者

八三年三月于北京中国人民大学附中。

目　录

第一章　单科综合题

第二章　多科综合题

第一章　单科综合题

§1. 代数部分

例1. 已知方程 $x^3-4x^2-3x+18=0$有两个根相等，解这个方程。

分析： 因为三次方程有三个根，故可表示成$(x-\alpha)(x-\alpha)(x-\beta)$的形式，于是自然会联想到应用待定系数法来解。

解法一　设这个方程的根是α、α、β，

根据根与系数间的关系，得

$$\begin{cases} 2\alpha+\beta=4, & (1) \\ \alpha^2+2\alpha\beta=-3, & (2) \\ \alpha^2\beta=-18. & (3) \end{cases}$$

解(1)和(2)，得

$$\begin{cases} \alpha=3, \\ \beta=-2; \end{cases} \qquad 或\begin{cases} \alpha=-\dfrac{1}{3}, \\ \beta=\dfrac{26}{3}. \end{cases}$$

第一组解代入(3)能够适合，

第二组解代入(3)不能适合，舍去。

因此，原方程的解是$x_1=3$，$x_2=3$，$x_3=-2$。

解法二　根据“如果一个整数系数方程的最高项的系数是1，那末这个方程的有理数根只可能是整数”和“整数系数方程的整数根一定是常数项的约数”。故可用“综合除

法"。

即

$$\begin{array}{rrrr|l}
1 & -4 & -3 & +18 & \\
 & +3 & -3 & -18 & 3 \\
\hline
1 & -1 & -6 & 0 & \\
 & +3 & +6 & & 3 \\
\hline
1 & +2 & +0 & & \\
 & -2 & & & -2 \\
\hline
1 & +0 & & &
\end{array}$$

故知原方程的根是3，3，-2。

解法三 由题意设这个方程的根是α，α，β，

则 $x^3-4x^2-3x+18\equiv(x-\alpha)^2(x-\beta)$

$$\begin{aligned}&\equiv(x^2-2x\alpha+\alpha^2)(x-\beta)\\&\equiv x^3-(2\alpha+\beta)x^2+(\alpha^2+2\alpha\beta)x\\&\quad-\alpha^2\beta.\end{aligned}$$

比较对应项的系数，得

$$\begin{cases}2\alpha+\beta=4, & (1)\\ \alpha^2+2\alpha\beta=-3, & (2)\\ \alpha^2\beta=-18. & (3)\end{cases}$$

解(1)，(2)所组成的方程，得

$$\begin{cases}\alpha_1=3,\\ \beta_1=-2;\end{cases}\quad 或\begin{cases}\alpha_2=-\dfrac{1}{3},\\ \beta_2=\dfrac{26}{3}.\end{cases}$$

其中只有$\alpha=3$，$\beta=-2$代入(3)适合。

因此，原方程的根是3，3，-2。

分析：这题也可以这样来思考：所给的方程有两个根相等，因此$x^3-4x^2-3x+18$有一个完全平方的因式$(x+m)^2$。

因为$x^3-4x^2-3x+18$的常数项是18，而$(x+m)^2$的常数项是m^2。

所以另一个因式是$\left(x+\frac{18}{m^2}\right)$，（式中$m$是待定系数）。

解法四

$$设x^3-4x^2-3x+18\equiv(x+m)^2\left(x+\frac{18}{m^2}\right)$$

$$\equiv x^3+\left(\frac{18}{m^2}+2m\right)x^2+\left(m^2+\frac{36}{m}\right)x+18。$$

比较对应项系数，得

$$\begin{cases}\frac{18}{m^2}+2m=-4,\\ m^2+\frac{36}{m}=-3。\end{cases}$$

$$就是\begin{cases}2m^3+4m^2+18=0, & (1)\\ m^3+3m+36=0。 & (2)\end{cases}$$

(1) − (2)×2，得

$$4m^2-6m-54=0,$$

即 $2m^2-3m-27=0$。

解之，得

$$m_1=-3，或m_2=\frac{9}{2}。$$

因为只有$m=-3$代入(1)和(2)都能适合，所以原方程可化成为 $(x-3)^2(x+2)=0$。

因此，原方程的根是3，3，-2。

说明：解法一，是利用韦达定理根与系数之间的关系来解的，**解法二**是应用“综合除法”将常数项分解因数来求根的。待定系数法在研究方程的根和系数的关系时很是有用的，所以就产生**解法三**的方法。**解法四**中的方法对于解这个问题并不简便，但是对于有些高次方程却很简便，故在此介绍。

例2 已知方程$x^4-x^3+mx^2+nx-6=0$的四个根中有两个根的和为3，而积为2。求m和n的值，并且解这个方程。

解法一 根据题意得知该方程有两个根为1和2，根据余数定理得

$$\begin{cases} f(1)=1-1+m+n-6=0, & (1) \\ f(2)=16-8-4m+2n-6=0. & (2) \end{cases}$$

解(1)、(2)方程组得$m=-7$，$n=13$。

又设该方程的另外二根为α和β，根据韦达定理得

$$\begin{cases} 1+2+\alpha+\beta=1, \\ 1\cdot 2\cdot\alpha\cdot\beta=-6. \end{cases}$$

解之得$\begin{cases} \alpha=-3, \\ \beta=1. \end{cases}$ 或$\begin{cases} \alpha=1, \\ \beta=-3. \end{cases}$

解法二 根据题意，利用综合除法，以$x-1$和$x-2$去除$x^4-x^3+mx^2+nx-6$，分别得余数$m+n-6$与$4m+2n+2$，

所以$\begin{cases} m+n-6=0, \\ 4m+2n+2=0. \end{cases}$

以下同解法一，故略之。

解法三 根据根与系数的关系得：

$$\begin{cases}1+2+\alpha+\beta=1,\\ 2+3\alpha+3\beta+\alpha\beta=m,\\ 2\alpha+2\beta+3\alpha\beta=-n,\\ 2\alpha\beta=-6.\end{cases}$$

解之得方程的四个根为1，2，1，-3；

又$m=-7$，$n=13$。

解法四 设方程$x^4-x^3+mx^2+nx-6=(x-1)(x-2)\cdot(x^2+ax+b)$，再利用比较系数法得：

$$\begin{cases}a-3=-1,\\ b-3a+2=m,\\ 2a-3b=n,\\ 2b=-6.\end{cases}$$

解之得 $a=+2$，$b=-3$，$m=-7$，$n=13$，然后再求x^2+2x-3的两根为1和-3。

例3. 已知$1+i$为实系数方程$x^4+3x^2-2ax+b=0$的根，试求a、b的值，并解这个方程。

分析 由题意，因为方程$x^4+3x^2-2ax+b=0$的系数是实数，所以$1+i$为方程的根时，那么$1-i$也必定是该方程的根。

解法一 设方程的另外两个根为α和β，则根据一元n次方程的根与系数间的关系，可得

$$\begin{cases}(1+i)+(1-i)+\alpha+\beta=0,\\ (1+i)(1-i)+\alpha(1+i)+\beta(1+i)+\alpha(1-i)\\ \qquad+\beta(1-i)+\alpha\beta=3.\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}\alpha+\beta=-2, & (1)\\ 2\alpha+2\beta+\alpha\beta=1. & (2)\end{cases}$$

解之，得

$$\begin{cases}\alpha=-1+2i,\\ \beta=-1-2i;\end{cases}\quad 或\begin{cases}\alpha=-1-2i,\\ \beta=-1+2i.\end{cases}$$

由于方程组是对称方程组，故任取一组解即可。

故原方程的根为：

$$1+i,\ 1-i,\ -1+2i,\ -1-2i.$$

又∵ $(1+i)(1-i)(-1+2i)+(1+i)(1-i)(-1-2i)$

$+(1+i)(-1+2i)(-1-2i)+(1-i)(-1+2i)\cdot$

$(-1-2i)=2a$ (3)

$(1+i)(1-i)(-1+2i)(-1-2i)=b.$ (4)

由(3)得 $-2+4i-2-4i+5+5i+5-5i=2a$,

∴ $2a=6$，即 $a=3$.

由(4)得 $2\times5=b$，∴ $b=10$.

答：所求a、b的值分别为3和10，故原方程四个根为$1+i$、$1-i$，$-1+2i$和$-1-2i$。

解法二 依题意，因为$1+i$是原方程的根，所以根据根的意义，得

$$(1+i)^4+3(1+i)^2-2a(1+i)+b=0.$$

展开，得 $1+4i+6i^2+4i^3+i^4+3+6i-3-2a-2ai$

$+b=0$,

整理，得 $(b-2a-4)+(6-2a)i=0$,

根据复数等于零的条件，得

$$b-2a-4=0, \tag{1}$$

$$6-2a=0. \tag{2}$$

由(1)、(2)组成方程组，

解之，得 $a=3$，$b=10$.

以 $a=3$，$b=10$代入原方程，即得

$$x^4+3x^2-6x+10=0.$$

因为如果虚数$a+bi$是实数系数的一元n次方程$f(x)=0$的根，那么它的共轭虚数$a-bi$也是这个方程的根（即虚数根总是成对的出现），利用这一事实，依题意，因为$1+i$是方程$f(x)=0$的根，所以$1-i$也是它的根。

于是 $$(x-1-i)(x-1+i)=(x-1)^2-i^2$$
$$=x^2-2x+2.$$

这就是说x^2-2x+2能整除$f(x)$，求得商为x^2+2x+5。

再解方程 $x^2+2x+5=0$，得

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2}.$$

$\therefore$ $x_1=-1+2i$，或 $x_2=-1-2i$。

故原方程的解为$1+i$，$1-i$，$-1+2i$，$-1-2i$。

例4. 试求 $\log_a(x^2+1)+\log_a(y^2+4)=\log_a8+\log_ax+\log_ay$的$x$，$y$的实数解。

解法一 将原式$\log_a(x^2+1)+\log_a(y^2+4)=\log_a8+\log_ax+\log_ay$变换成

$$\log_a[(x^2+1)(y^2+4)]=\log_a8x\cdot y,$$

故得 $$(x^2+1)(y^2+4)=8xy.$$

由对数定义得知：$\because$ $x>0$，$y>0$，

故有 $$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{4}{y}\right)=8,$$

根据不等式定理，若$x>0$，则$x+\dfrac{1}{x}\geqslant2$，

于是有 $y+\dfrac{4}{y}\leqslant4$.

即　$y^2-4y+4=(y-2)^2\leqslant 0$。

故只有　$y=2$成立。

于是得　$x=1$。

故求得　$x=1$，$y=2$的实数解。

解法二　将原式变换为

$$\log_a[(x^2+1)(y^2+4)]=\log_a 8xy.$$

于是得　$(x^2+1)(y^2+4)=8xy$.

展开移项得

$$x^2y^2+y^2+4x^2-8xy+4=0,$$

$\therefore$　$(4x^2-4xy+y^2)+(x^2y^2-4xy+4)=0$。

即　$(2x-y)^2+(xy-2)^2=0$。

由题意x，y为实数必须使$\begin{cases}2x=y,\\ xy=2.\end{cases}$

解之，得　$x_1=1$，$x_2=-1$（不合题意舍去）。

故求得实数为$x=1$，$y=2$.

说明：通过本题，能增强读者综合运用知识的能力和不断提高计算技能与解题技巧的能力，积累解题的经验．对一般读者来说，解决本题的信心，往往不大，容易产生犹豫和畏惧．原因是：对于一个方程含有两个未知数，一般解是不定的，这是众所周知的．但在两个未知数前面冠以对数符号，正是由于在特定条件下却能解出．**解法一**、**解法二**事实上已做了回答．但在上述两种解法中，前者借助于不等式基本定理与解法，后者依靠了因式分解，由于通晓这些基本概念和基础知识的熟练技巧，虽然在解法上各有分歧，但殊途同归！

例5．设a、b、c均不为零的实数，且方程$ax^2+bx+c=0$

有不等的实根，求证：$cx^2+2bx+3a=0$的根为实数。

证法一

$$ax^2+bx+c=0, \tag{1}$$

$$cx^2+2bx+3a=0. \tag{2}$$

设方程(1)的两不等的实根为 α、β，

则根据韦达定理得：

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

$\therefore$ $b=-a(\alpha+\beta)$，$c=a\alpha\beta$，代入(2)式得

$$(a\alpha\beta)x^2-2a(\alpha+\beta)x+3a=0.$$

$\because$ $a\neq0$，$\therefore$ $(\alpha\beta)x^2-2(\alpha+\beta)x+3=0$ (3)

又在 $\alpha\beta=\frac{c}{a}$中，$\because$ $c\neq0$，$\therefore$ $\alpha\beta\neq0$。

故方程(3)是实系数二次方程，令其判别式为Δ'，那么

$$\begin{aligned}\Delta'&=4(\alpha+\beta)^2-12\alpha\beta\\&=4[\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2]\\&=4\left[\alpha^2-\alpha\beta+\frac{1}{4}\beta^2+\frac{3}{4}\beta^2\right]\\&=4\left[\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\beta^2\right]\\&=4\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)^2+3\beta^2\end{aligned}$$

$\because$ $\beta\neq0$，$\therefore$ $\beta^2>0$，

又 $\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)^2\geq0$，

$\therefore$ $\Delta'>0$，

故方程$cx^2+2bx+3a=0$有不等实数根。

证法二

在(1)式$ax^2+bx+c=0$中，

$\because\quad \Delta=b^2-4ac$，

因题设 $a\neq0$，$b\neq0$，$c\neq0$，

$\therefore\quad \Delta=b^2-4ac>0$

而在 (2) $cx^2+2bx+3a=0$ 中，

$\because\quad \Delta'=4b^2-12ac$

$$=3(b^2-4ac)+b^2.$$

又$\because$ $b\neq0$，$b^2>0$，并用(1)式的判别式$\Delta=b^2-4ac>0$代入上式得：

$$\Delta'>0.$$

故方程 $cx^2+2bx+3a=0$有不等实数根。

例6. 若实数a_1、a_2、a_3、a_4满足关系式$(a_1^2+a_2^2)a_4^2-2a_2(a_1+a_3)a_4+a_2^2+a_3^2=0$，求证：$a_1$、$a_2$、$a_3$成等比数列，且公比是$a_4$。

解法一 由$(a_1^2+a_2^2)a_4^2-2a_2(a_1+a_3)a_4+a_2^2+a_3^2=0$，得

$a_1^2a_4^2+a_2^2a_4^2-2a_1a_2a_4-2a_2a_3a_4+a_2^2+a_3^2=0$.

$\therefore\quad (a_1^2a_4^2-2a_1a_2a_4+a_2^2)+(a_2^2a_4^2-2a_2a_3a_4+a_3^2)=0$.

即 $(a_1a_4-a_2)^2+(a_2a_4-a_3)^2=0$.

因题设 a_1、a_2、a_3、a_4都是实数，故此上式只能有

$$a_1a_4-a_2=0,\quad a_2a_4-a_3=0.$$

所以 $\dfrac{a_2}{a_1}=a_4$，$\dfrac{a_3}{a_2}=a_4$ 即 $\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=a_4=q$（公比）。

根据等比数列定义，知

a_1、a_2、a_3成等比数列。

解法二 由给定满足关系式$(a_1^2+a_2^2)a_4^2-2a_2(a_1+a_3)$

$\cdot a_4+(a_2^2+a_3^2)=0$ 的条件，得知a_4是方程$(a_1^2+a_2^2)x^2-2a_2(a_1+a_3)x+(a_2^2+a_3^2)=0$的根。

又$\because$ a_4为实数，

$\therefore$ $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$，

即 $4a_2^2(a_1+a_3)^2-4(a_1^2+a_2^2)(a_2^2+a_3^2)\geqslant 0$。

整理，得 $-(a_2^4-2a_1a_2^2a_3+a_1^2a_3^2)\geqslant 0$。

$\therefore$ $(a_2^2-a_1a_3)^2\leqslant 0$。

但因 a_1、a_2、a_3都是实数，故只能有

$$a_2^2-a_1a_3=0,$$

即 $a_2^2=a_1a_3$。

因此 a_1、a_2、a_3成等比数列。

再由求根公式，依题设原关系式的解为：

$$a_4=\frac{2a_2(a_1+a_3)\pm\sqrt{-(a_2^2-a_1a_3)^2}}{2(a_1^2+a_2^2)}$$

$$=\frac{2a_2(a_1+a_3)}{2(a_1^2+a_2^2)}\quad（上式已证a_2^2-a_1a_3=0）$$

$$=\frac{a_2(a_1+a_3)}{a_1^2+a_2^2}$$

$$=\frac{a_2(a_1+a_3)}{a_1^2+a_1a_3}\qquad(\because a_2^2=a_1a_3)$$

$$=\frac{a_2(a_1+a_3)}{a_1(a_1+a_3)}.$$

$\therefore$ $a_4=\dfrac{a_2}{a_1}$。

又由 $a_2^2=a_1a_3$得$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}$。

故知a_4为等比数列a_1、a_2、a_3的公比。

说明：这是一个代数条件等式证明题，解此题时，不必要将需要证明的式子变形，因为从形式上来看，待证的等式远比已知条件简单特殊，难度大，它并不是一下子就能看出如何变形，所以最好将已知条件变形。因此，以上两种证法就是针对上述分析，从条件命题和待证命题间的特点出发的。

例7．已知a、b、c三数成等比数列，而x、y分别为a、b和b、c的等差中项，试证：$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=2$。

分析：在中学数学中，由于证明问题的多样性，证法也有所不同，常用综合法和分析法（有时遇到较复杂、较难问题时，却采用综合法，分析法兼用之。）

证法一 利用综合法：

证：依题意知，a、b、c成等比数列，

$$\therefore \quad \frac{a}{b}=\frac{b}{c}.$$

根据比例性质有：$\frac{a}{a+b}=\frac{b}{b+c}$，$\frac{2a}{a+b}=\frac{2b}{b+c}$。

又由题设得：$x=\frac{a+b}{2}$，$y=\frac{b+c}{2}$，

因此，$\frac{a}{x}+\frac{c}{y}=\frac{a}{\frac{a+b}{2}}+\frac{c}{\frac{b+c}{2}}$

$$=\frac{2a}{a+b}+\frac{2c}{b+c}$$

$$=\frac{2b}{b+c}+\frac{2c}{b+c}$$