全国各类成人高考复习指导丛书

专升本

入学考试指导

高等数学(二)

专升本考试研究组 编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

全国各类成人高考复习指导丛书

全国各类成人高考复习指导丛书

专升本入学考试指导

高等数学（二）

专升本考试研究组　编

机械工业出版社

本书严格按照最新《考试大纲》规定的考试内容和要求，并针对成人考生的特点，精心设计了"考试知识要点"、"典型例题分析"和"历年考试题型及分析"等几个模块．各章的"基本要求"和"考试知识要点"凸显了考试的重点和难点；概念和公式的"结构式"使这些知识的学习和理解变得简单；典型例题的分析有助于提高考生的分析问题能力和解题的能力．"历年考试题型及分析"总结了试卷中可能出现的各种题型，使考生能有效地掌握考试的主要内容和试题的类型，从而使复习更具针对性．

图书在版编目(CIP)数据

专升本入学考试指导．高等数学(二)/专升本考试研究组编．—北京：机械工业出版社，2004.4
(全国各类成人高考复习指导丛书)
ISBN 7-111-14117-2

Ⅰ．专… Ⅱ．专… Ⅲ．高等数学-成人教育：高等教育-升学参考资料 Ⅳ．G724.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 017253 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)
责任编辑：于　宁　封面设计：鞠　杨
责任印制：李　妍
北京机工印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行
2004 年 4 月第 1 版·第 1 次印刷
787mm×1092mm 1/16 ·15 印张·368 千字
定价：23.00 元

前　言

由于成人高校招生全国统一考试改为每年的10月中旬进行，随着考生人数的增加和考生群体水平的提高，成招竞争的激烈程度比全国普通高校招生考试有过之而无不及！因此为广大专升本考生提供一本既有实用性更具针对性的考试辅导书是非常重要的！我们认真地研究了2003年版《考试大纲》以及1994年至2003年的全部专升本试题，严格按照《考试大纲》规定的考试内容和考试要求，并针对成人考生的特点编写了这本通俗易懂、容易理解和掌握的考试辅导书.它与其他辅导书的不同之处在于：

1．各章的“基本要求”和“考试知识要点”凸显了考试的重点和难点

根据考试大纲的要求并结合十年的试卷分析，总结了各章的基本要求和考试的知识要点.它充分凸显了考试所要求的主要内容、考试的重点和难点.抓住这些进行有针对性的复习，定能事半功倍！

2．概念和公式的“结构式”使这些知识的学习变得简单，既容易理解又更容易掌握

基本概念和基本运算公式是正确理解和掌握高等数学(二)的关键！本书以更具普遍意义的“结构式”简化了对概念的理解和运算公式的掌握，是快速简捷掌握知识的有效方法.很受成人考生的青睐！

3．典型例题的分析有助于提高考生的分析问题能力和解题能力

书中对典型例题的详尽分析，使考生能较好地掌握如何利用已知条件，怎样进行分析，又如何解题，解题过程中容易出现的错误是什么等等.通过这些使考生学会分析问题的方法，提高解题能力，使整体水平更上一层楼！

4．“历年考试题型及分析”总结了试卷中可能出现的各种题型，使考生能有效地掌握考试的主要内容和试题的类型，从而使复习更具针对性

我们将十年试卷中的所有试题分类、归纳成各种不同类型的题型，它们基本上包含了专升本高等数学(二)中可能出现的题型.读者只需将每一类题目考查的知识点和解题方法熟练掌握，必能在考试中应付自如，而无需花费大量的时间去做很多考试中根本不可能出现的题目！书中还指出了每考必考的许多题型，从而使读者的复习更加重点突出和更具针对性.

由于编写时间仓促，不当之处还望专家及广大读者提出宝贵的意见！

编　者

2004年3月

目　录

第一章　函数、极限和连续

第一节　函　　数

一、主要内容

（一）函数概念

1．函数的定义

定义　设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，变量 y 随变量 x 而变化，如果变量 x 在实数集合 D 中取某一数值时，变量 y 依照某一规律 f 总有一个确定的数值与之对应，则称变量 y 为变量 x 的函数，记为

$$y=f(x)$$

其中 x 叫自变量，y 叫因变量或函数.

有时为了表示几个不同的函数，还可以用 $\varphi(x)$，$g(x)$，$F(x)$ 等来表示函数. 函数关系也可记作 $y=y(x)$，此时等号左边的 y 表示函数，右边的 y 表示对应规则.

在上述函数的定义中，很重要的一点是：自变量 x 在 D 上取每一数值时，函数 y 都有确定的数值与之对应，此时我们称函数是有定义的.

定义域　在数轴上使函数 f 有定义的自变量的取值范围 D，称为函数的定义域，记为 $D(f)$.

值域　函数 y 的取值范围，称为函数的值域，记为 $Z(f)$.

当自变量 x 取某一个定值 a 时，函数 $y=f(x)$ 的对应值记为 $f(a)$，有时也记为 $y|_{x=a}$.

2．函数的表示法

常用的函数表示法有三种：解析法、表格法和图示法.

（1）解析法　对自变量和常数施加四则运算、乘幂、指数运算、取对数、取三角函数等数学运算所得到的式子称为解析表达式. 用解析表达式表示一个函数就称为函数的解析法，也叫公式法. 高等数学中讨论的函数，大多由解析法表示，这是由于对解析式子可以进行各种运算，便于研究函数的性质.

（2）表格法　在实际应用中，常把自变量所取的值和对应的函数值列成表，用以表示函数关系，函数的这种表示法称为表格法. 例如，我们所用的各种数学用表——平方表、立方表、对数表、三角函数表等，都是用表格法表示的函数关系. 在研究社会经济现象时，常常采用这种表格法.

（3）图示法　设 $y=f(x)$ 是一个给定的函数，定义域是 $D(f)$. 由于自变量和函数都取实数值，因而我们可以在平面上取定一个直角坐标系 Oxy，用 x 轴上的点表示自变量的值，用 y 轴上的点表示函数值. 于是，在 $D(f)$ 内的每一个 x 及相应的函数值 $f(x)$ 就确定了该平面直角坐标系中的一个点 $P(x,y)$，当 x 在 $D(f)$ 内变动时，点 P 便在坐标平面上移动，一般便得到平面上的一条曲线，这就是用图示法表示函数.

函数的三种表示法各有优缺点，在具体应用时，常常是三种方法配合使用.

3．函数的图像

用图示法表示函数所得到的曲线,就称为函数的图像.用图像表示函数,使我们有可能借助于几何图形,形象直观地研究事物的运动变化过程,它对于理解高等数学中的概念、方法和结论是十分重要的.

(二) 显函数、分段函数、隐函数

(1) 显函数 函数关系用解析式 $y=f(x)$ 表示的称为显函数,如 $y=x^2\sin x$, $y=\sqrt{\ln x}$ 等等.

(2) 分段函数 有时还要考察这样的函数,对于其定义域内自变量 x 的不同值,函数不能用一个统一的公式表示,而要用两个或两个以上的公式来表示.这类函数称为"分段函数".

例如,$y=|x|$ 就是一个分段函数,因为它可以写成:

$$y=|x|=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$$

当 $x<0$ 时,公式为 $y=-x$;当 $x\geqslant 0$ 时,用公式 $y=x$ 来表示(如图 1-1).这个函数的定义域是$(-\infty,+\infty)$.

又如

$$y=f(x)=\begin{cases}x+1 & x<-1\\ 0 & -1\leqslant x\leqslant 0\\ x & x>0\end{cases}$$

也是一个分段函数(如图 1-2).这个函数的定义域也是$(-\infty,+\infty)$.

关于分段函数,要注意以下几点:

① 分段函数是用几个公式合起来表示一个函数,而不是表示几个函数;

② 因为函数式子是分段表示的,所以各段的定义域必须明确标出;

③ 对分段函数求函数值时,不同点的函数值应代入相应范围的公式中去求;

④ 分段函数的定义域是各项定义域的并集.

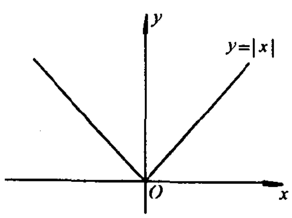

图 1-1

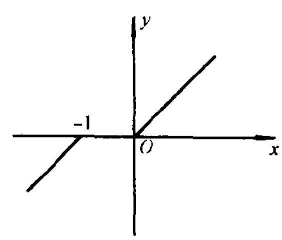

图 1-2

(3) 隐函数 前面所讲的形如 $y=f(x)$ 的函数,一般称为显函数.其特点是因变量 y 单独地在等号的一边(左边),而另一边(右边)则仅仅是自变量 x 的表达式 $f(x)$.此外,还有一类函数,称为隐函数.

定义 凡能够由方程 $F(x,y)=0$ 确定的函数关系,称为隐函数.

例如

$$x^2+y^2-1=0$$

就是一个隐函数.因为在这个方程中,函数 y 没有用仅含自变量 x 的公式 $f(x)$ 表示出来.不过若由它解出

$$y=\sqrt{1-x^2} \qquad -1\leqslant x\leqslant 1$$

或

$$y=-\sqrt{1-x^2} \qquad -1\leqslant x\leqslant 1$$

它就变成了两个显函数(称每一个显函数为一个单值分支,前一支表示上半圆,后一支表示下半圆),并称该隐函数为二值函数(多值函数的一种).

要注意的是:并非所有隐函数都可以解成显函数.例如方程 $e^{xy}-x^2-xy-1=0$ 就不能解成显函数.

(三) 函数的简单性质

1. 函数的单调性

定义　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调增加的;如果当 $x_1<x_2$,有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是严格单调增加的.

如果对于 (a,b) 内的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调减少的;如果当 $x_1<x_2$ 时,有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是严格单调减少的.

由定义可知,在 (a,b) 内严格单调增加的函数 $f(x)$,其图形是沿 x 轴的正向逐渐上升的(如图 1-3);严格单调减少的函数 $f(x)$,其图形是沿 x 轴的正向逐渐下降的(如图 1-4).

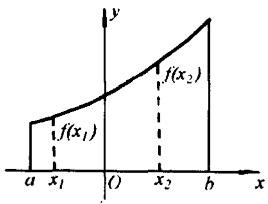

图　1-3

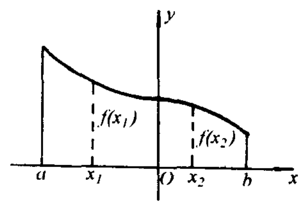

图　1-4

注意:单调性是对一个区间而不是对一个点来讲的.单调函数必须指出它的单调区间.例如函数 $y=x^2$ 在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的;在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的;而在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内不是单调的.(如图 1-5 所示).

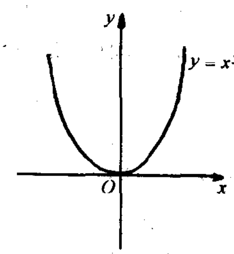

图　1-5

2. 函数的奇偶性

定义　如果对于函数 $y=f(x)$ 定义域中的任一点 x,恒有

$$f(-x)=f(x)$$

则称 $f(x)$ 为偶函数.

如果对于定义域中的任一点 x,恒有

$$f(-x)=-f(x)$$

则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形是对称于 y 轴的(如图 1-6).

奇函数的图形是对称于原点的(如图 1-7).

注意:很多函数是没有奇偶性的,切不可认为任何函数都具有奇偶性.例如 $y=x^2+\sin x$ 它既不是奇函数,也不是偶函数.

3. 函数的有界性

定义　设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义,如果存在一个正数 M,使得对于 (a,b) 内的任意一点 x,总有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的,否则,称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的.

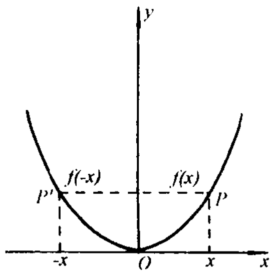

图　1-6

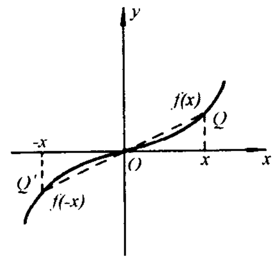

图　1-7

如图 1-8,函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内有界的几何意义是,曲线 $y=f(x)$ 在区间 (a,b) 内被限制在 $y=-M$ 和 $y=M$ 两条水平直线之间的范围内.

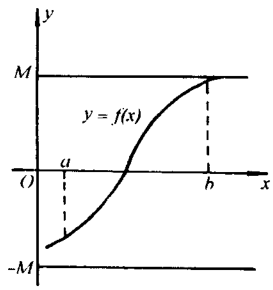

图　1-8

例如函数 $y=\sin x$,因为对任何实数 x,都有 $|\sin x|\leqslant 1$,所以 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,它的图形落在两条水平直线 $y=1$ 和 $y=-1$ 之间.

需要注意的是:

函数的有界性是函数本身的性质,它与所讨论问题的区间有关.例如函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的,而函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是无界的,但在任何有限区间内它都是有界的.函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内是无界的,而在 $(a,+\infty)$ 内是有界的($a>0$ 的常数).

4. 函数的周期性

定义　对于函数 $y=f(x)$,如果存在一个不为零的常数 T,使得关系式 $f(x+T)=f(x)$ 对于 $(-\infty,+\infty)$ 内的任何 x 都成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,称满足这个等式的最小正数 T 为函数的周期.

例如 $y=\sin x$ 就是一个周期函数,周期 $T=2\pi$.

(四) 反函数

定义　设已知函数为

$$y=f(x) \tag{1}$$

如果由此解出的

$$x=\varphi(y) \tag{2}$$

是一个函数,则称它为 $f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,并称 $f(x)$ 为直接函数.

由于习惯上往往用字母 x 表示自变量,而用字母 y 表示函数,为了与习惯一致,通常将(2)式中的自变量 y 改写成 x,而将函数 x 改写成 y,于是(1)式的反函数就变为

$$y=\varphi(x) \tag{3}$$

记为 $y=f^{-1}(x)$.

当然我们也可以说 $y=f(x)$ 是 $y=f^{-1}(x)$ 的反函数,也就是说它们互为反函数.

注意:函数 $x=\varphi(y)$ 与 $y=\varphi(x)$ 是同一个函数,所以当 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数时,$y=\varphi(x)$ 也是 $y=f(x)$ 的反函数.

明确了反函数的定义之后,还应知道:在什么条件下直接函数 $y=f(x)$ 有反函数存在?以下的反函数存在定理可以回答这个问题.

定理　如果函数　$y=f(x),D(f)=X,Z(f)=Y$

是严格单调增加(或减少)的,则它必定存在反函数

$$x=\varphi(y),D(\varphi)=Y,Z(\varphi)=X$$

并且也是严格单调增加(或减少)的.

这个定理我们很容易从图 1-9 上来加以理解.

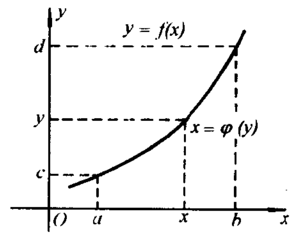

图 1-9

求反函数的步骤:

第一步:从直接函数 $y=f(x)$ 中解出

$$x=\varphi(y)$$

看它是否能成为函数;

第二步:如果 $x=\varphi(y)$ 是函数,将字母 x 换成 y,将字母 y 换成 x,得　$y=\varphi(x)$

这就是 $y=f(x)$ 的反函数.

结论:

(1) 直接函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形,必定对称于直线 $y=x$(一般地,二者是不同的函数,其图形是不同的曲线);

(2) 直接函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 是同一条曲线(二者是不同的函数,但是,它们的图形是同一条曲线).

根据这个结论,当我们知道了直接函数 $y=f(x)$ 的图形之后,就可利用对称于直线 $y=x$ 的性质画出其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形;但若要画反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的图形,则就是直接函数 $y=f(x)$ 的图形.

(五) 基本初等函数

1. 常数

$$y=c$$

它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$,图形是一条平行于 x 轴的直线,显然这是个偶函数.

2. 幂函数

$$y=x^{\mu}\quad(\mu\text{ 为实数})$$

它的定义域随 μ 值的不同而不同,但不管 μ 的值是多少,它在 $(0,+\infty)$ 内总是有定义的.

当 $\mu>0$ 时,它的图形如图 1-10,不论 μ 为何值,它的图形都通过原点 $(0,0)$ 和点 $(1,1)$,在 $(0,+\infty)$ 内严格单调增加且无界.

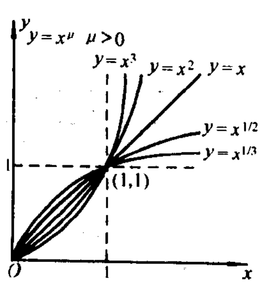

图 1-10

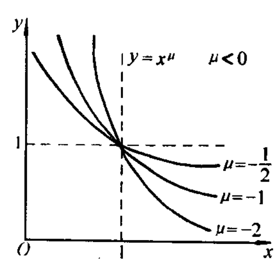

图 1-11

当 $\mu<0$ 时,它的图形如图 1-11,在 $(0,+\infty)$ 内严格单调减少且无界,曲线以 x 轴和 y 轴为渐近线,都通过点 $(1,1)$.

3. 指数函数

$$y=a^x \quad (a>0, a\neq 1)$$

它的定义域是$(-\infty,+\infty)$,由于不论 x 为何值,总有 $a^x>0$,且 $a^0=1$,所以它的图形总是在 x 轴的上方,且通过点$(0,1)$.

当 $a>1$ 时,函数严格单调增加且无界,曲线以 x 轴的负半轴为渐近线;

当 $0<a<1$ 时,函数严格单调减少且无界,曲线以 x 轴的正半轴为渐近线,如图 1-12.

以无理数 $\mathrm{e}=2.718\,281\,8\cdots$为底的指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 是微积分中常用的指数函数.

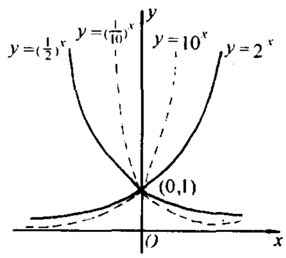

图　1-12

4. 对数函数

$$y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1)$$

它的定义域为$(0,+\infty)$,不论 a 为何值,对数曲线都通过点$(1,0)$.

当 $a>1$ 时,函数严格单调增加且无界,曲线以 y 轴的负半轴为渐近线;

当 $0<a<1$ 时,函数严格单调减少且无界,曲线以 y 轴的正半轴为渐近线,如图 1-13 所示.

以无理数 e 为底的对数函数　$y=\log_e x$

叫自然对数,简记作　　$y=\ln x$

自然对数在微积分中是常用的.

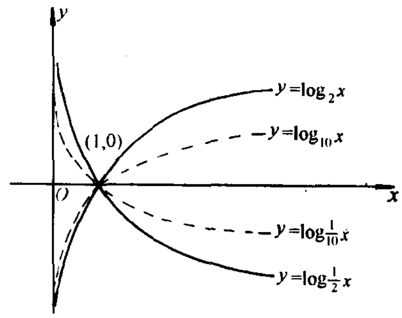

图　1-13

5. 三角函数

三角函数有以下六个:

$$y=\sin x \quad y=\cos x \quad y=\tan x$$

$$y=\cot x \quad y=\sec x \quad y=\csc x$$

在微积分中,三角函数的自变量 x 一律以"弧度"为单位.例如 $x=1$,就表示 x 等于 1 个弧度$(57°17'44.8'')$.

函数 $y=\sin x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,是奇函数,且是周期等于 2π 的周期函数,其图形如图 1-14 所示.

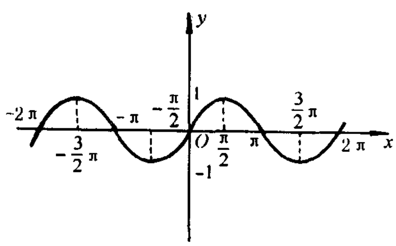

图　1-14

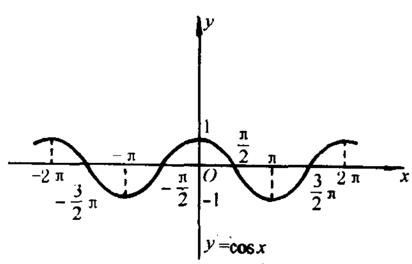

图　1-15

函数 $y=\cos x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$,是偶函数,且是周期等于 2π 的周期函数,其图形如图 1-15 所示.

因为$|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$,所以它们都是有界函数.

函数 $y=\tan x$ 的定义域是除去点 $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots)$后的其他实数.它是

奇函数，且是周期为 π 的周期函数，其图形如图 1-16 所示.

函数 $y=\cot x$ 的定义域是除去点 $x=k\pi$ 后的其他实数.它也是奇函数，且是周期为 π 的周期函数，其图形如图 1-17 所示.

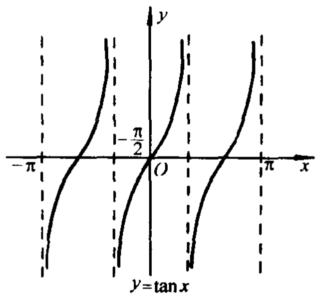

图 1-16

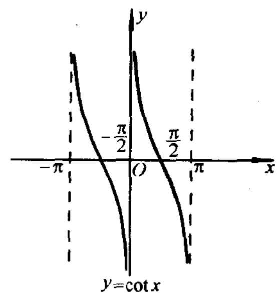

图 1-17

6. 反三角函数

常见的反三角函数有以下四个：

$$y=\arcsin x \qquad y=\arccos x$$
$$y=\arctan x \qquad y=\operatorname{arccot} x$$

它们是作为相应三角函数的反函数定义出来的.由于 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 在定义域内不单调，它们的反函数不惟一，所以对于 $y=\sin x$，只考虑 $x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，对于 $y=\cos x$，只考虑 $x\in[0,\pi]$，以使它们单调，并使其反函数存在.此时我们称反正弦和反余弦取主值，即 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$，它们的图形分别为图 1-18 和图 1-19 中的实线部分.

$y=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 的定义域都是$[-1,1]$.

同理，对于反正切函数 $y=\arctan x$，也取主值$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，即 $-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}$，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，其图形如图 1-20 所示.

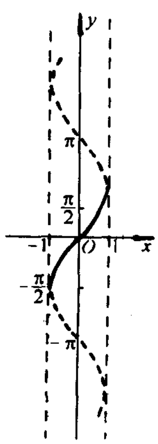

图 1-18

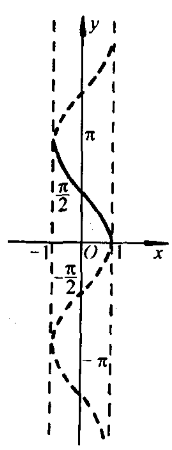

图 1-19

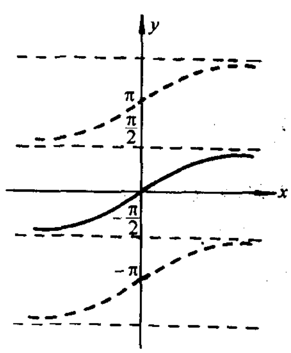

图 1-20

(六) 复合函数与初等函数

1. 复合函数

定义:设 y 是 u 的函数　　　　$y=f(u)$

而 u 又是 x 的函数　　　　$u=\varphi(x)$

又设 X 表示函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域的一个子集,如果对于 X 上的每一个取值 x 所对应的 u 值,函数 $y=f(u)$ 有定义,则 y 通过 $u=\varphi(x)$ 而成为 x 的函数,记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

这个函数叫做由函数 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,它的定义域为 X,u 叫做中间变量.

所以复合函数实际就是将中间变量代入后所构成的函数.

注意:不是任何两个函数都可以复合成一个复合函数的,例如 $y=\arcsin u$ 及 $u=x^2+3$ 就不能复合成一个复合函数.因为对于 $u=x^2+3$ 的定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内的任何值 x 所对应的 u 值(都大于或等于 3),$y=\arcsin u$ 都没有定义.

复合函数不仅可以有一个中间变量,还可以有更多的中间变量,如 u,v,w,t 等等.

在求函数的导数时,我们往往要反过来考虑问题.即一个函数是由哪几个基本初等函数(或简单函数)复合而成的?

2. 初等函数

所谓初等函数是指由基本初等函数经过有限次的四则运算(加、减、乘、除)和复合所构成、且能用一个分析式表示的函数.例如:$y=\lg(1+\sqrt{1+x^2})$,$y=\sqrt{\cos\frac{x}{2}}$,$y=\sin(3x-1)$,$y=\cos^2(\ln x)$ 等都是初等函数.

(七) 列函数式

列函数式的大体步骤如下:

(1) 分析实际问题中存在的各种量,弄清楚哪是常量,哪是变量,哪个变量作自变量,哪个变量作因变量.

(2) 根据变量间的依赖关系,列出函数式(若有两个自变量,则要找出它们之间的关系,消去多余的自变量).

(3) 由实际问题求出函数的定义域.

列函数式的例题,请参看求最大(小)值的应用问题.

二、基本要求

(1) 理解函数的概念,会求函数的定义域、表达式及函数值.会求分段函数的定义域、函数值,并会作出简单的分段函数图像.

(2) 理解和掌握单调函数、奇函数、偶函数、有界函数与周期函数的概念,并会用定义判断所给函数的类别.

(3) 了解函数 $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 之间的关系(定义域、值域、图像),会求单调函数的反函数.

(4) 理解和掌握函数的四则运算与复合运算,熟练掌握复合函数的复合过程.

(5) 掌握基本初等函数的简单性质及其图像.

(6) 了解初等函数的概念.

(7) 会建立简单实际问题的函数关系式.

三、典型例题分析

例 1　设函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x<0\\ 1 & x=0,\\ x-3 & x>0\end{cases}$　求 $f(-1),f(0),f(2),f(a)$.

【分析】　这是一个分段函数求函数值的问题.其关键是:当 x 在不同区间时,$f(x)$的表达式是不同的,当 x 取不同值时,应代入相应的函数式中来求函数值.

$x=-1<0$,则 $f(-1)=2(-1)+1=-1$;

$x=0$　　则 $f(0)=1$;

$x=2>0$　则 $f(2)=2-3=-1$.

计算 $f(a)$时要分情况讨论:

当 $a<0$ 时,$f(a)=2a+1$;

当 $a=0$ 时,$f(a)=1$;

当 $a>0$ 时,$f(a)=a-3$.

例 2　求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{1}{x^2-4x+3}$　　(2) $y=\sqrt{4-x^2}$

(3) $y=\lg(6-x-x^2)$　　(4) $y=\arcsin(2x-3)$

【分析】　用解析式表示的简单函数所要求的定义域主要是:

① 分式中的分母不能为零;

② 对数中的真数必须大于零;

③ 负数不能开偶次方;

④ 反三角函数 $\arcsin x$ 与 $\arccos x$ 中的 x 必须满足 $|x|\leqslant1$;

⑤ 上述数种情况同时在某函数中出现,此时应取其交集.

解　这四个题分别为上述的四种类型.

(1) 分母不为零:$x^2-4x+3\neq0$,所以 $x\neq1$ 与 $x\neq3$,定义域为:$(-\infty,1)\cup(1,3)\cup(3,+\infty)$.

(2) 负数不能开偶次方:$4-x^2\geqslant0$,所以 $-2\leqslant x\leqslant2$,定义域为:$[-2,2]$.

(3) 对数中的真数大于零:$6-x-x^2>0$,所以 $-3<x<2$,定义域为:$(-3,2)$.

(4) 反正弦函数中的变量不大于 1:$|2x-3|\leqslant1$,所以 $-1\leqslant x\leqslant2$,定义域为:$[-1,2]$.

例 3　函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\lg(x+2)}$的定义域是(　　).

A. $[-2,3]$　B. $(-2,2]$　C. $(-2,-1)\cup(-1,2]$　D. $(-3,2]$

单项选择题在选择答案时,既要快又要准.因此方法是至关重要的,常用的方法是:

(1) 直接法:从题目的已知条件出发,经过分析推理论证或者计算得到的结果与某选项相同.

(2) 筛选法:从题目的已知条件出发,根据概念、定义、定理、公式及运算法则等知识的分

析推理将错误的选项逐一排除,从而得到正确的选项.

(3) **赋值法**:根据题目的已知条件,从四个备选答案中,用满足条件的特殊值来检验确定正确的选项.

一般情况下,直接法常用于需要计算才能得到正确答案的选择题,筛选法常用于涉及到基本概念、定义、公式及与运算法则有关的选择题.如果四个备选项与数值有关或能通过数值计算判定其正确与否这样的单项选择题可以考虑用赋值法来确定正确的选项.

读者需要**注意**的是:这三种方法没有绝对的界限.最佳的方法是这三种方法的混合使用.

【分析】 这是一个初等函数求定义域的问题,因此应求各个函数定义域的交集.

负数不能开偶次方得:$4-x^2\geqslant 0$,所以 $-2\leqslant x\leqslant 2$;

真数大于零得:$x+2>0$,所以 $x>-2$;

分母不为零得:$\lg(x+2)\neq 0$,所以 $x\neq -1$;

所以函数的定义域为它们的交集$(-2,-1)\cup(-1,2]$所以应选 C.

例 4 设函数 $f(x)$的定义域为$[0,2]$,则 $f(3x-1)$的定义域为( )

A. $\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$ B. $\left[\frac{1}{3},1\right]$ C. $[0,2]$ D. $\left[-\frac{1}{3},1\right]$

【分析】 函数 $f(x)$的定义域为$[0,2]$应该理解为括号里面的变量的取值范围在 0 与 2 之间,即 $0\leqslant$变量$\leqslant 2$.此时函数的变量为 $3x-1$,则有 $0\leqslant 3x-1\leqslant 2$,即$\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$.所以应选 B.

例 5 设函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,且 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$,则 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域是( ).

A. $[-a,1-a]$ B. $[-a,1+a]$

C. $[a,1-a]$ D. $[a,1+a]$

【分析】 因为函数 $f(x)$的定义域为$[0,1]$,所以,只有当 $0\leqslant x+a\leqslant 1$ 且 $0\leqslant x-a\leqslant 1$ 时,函数 $f(x+a)+f(x-a)$才有定义,由不等式组

$$\begin{cases}0\leqslant x+a\leqslant 1\\0\leqslant x-a\leqslant 1\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}-a\leqslant x\leqslant 1-a\\a\leqslant x\leqslant 1+a\end{cases}$$

及 $0<a\leqslant\frac{1}{2}$,得 $a\leqslant x\leqslant 1-a$.所以函数 $f(x+a)+f(x-a)$的定义域是$[a,1-a]$,应选择 C 项.

例 6 下列函数 $f(x)$与 $g(x)$相同的是( ).

A. $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{x}$, $g(x)=x-1$

B. $f(x)=\lg x^2$, $g(x)=2\lg x$

C. $f(x)=x$, $g(x)=(\sqrt{x})^2$

D. $f(x)=x(\sin^2x+\cos^2x)$, $g(x)=x$

【分析】 两个函数 $f(x)$与 $g(x)$,只有当它们满足条件①对应法则相同,②定义域相同时,才是相同的函数,否则是不同的.

A 项中 $f(x)$的定义域是$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,而 $g(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,由于定义域不同,所以它们是不同的函数.

B 项中 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$，由于定义域不同，所以它们是不同的函数.

C 项中 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，而 $g(x)$ 的定义域为 $[0,+\infty)$，由于定义域不同，所以它们是不同的函数.

D 项中 $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域也是 $(-\infty,+\infty)$. 又由于 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的对应法则也相同. $f(x)$ 与 $g(x)$ 满足上述两个条件，所以它们是相同的函数，应选择 D 项.

例 7　下列函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相同的是(　　).

A. $f(x)=x-3,g(x)=\sqrt{(x-3)^2}$

B. $f(x)=\lg(x^2-9),g(x)=\lg(x-3)+\lg(x+3)$

C. $f(x)=\lg\dfrac{3-x}{3+x},g(x)=\lg(3-x)-\lg(3+x)$

D. $f(x)=\cos(\arccos x),g(x)=x$

【分析】　C 项中 $f(x)$ 的自变量 x 满足不等式 $\dfrac{3-x}{3+x}>0$ 时，$f(x)$ 才有定义，即

$$\begin{cases}3-x>0\\3+x>0\end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases}3-x<0\\3+x<0\end{cases}$$

得 $f(x)$ 的定义域为 $(-3,3)$. 类似地，知 $g(x)$ 的定义域也是 $(-3,3)$.

另外
$$\lg\frac{3-x}{3+x}=\lg(3-x)-\lg(3+x)$$

所以，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是相同的函数.

或者，用排除法.

A 项中 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域也是 $(-\infty,+\infty)$，但

$$g(x)=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|=\begin{cases}x-3 & x\geqslant 3\\3-x & x<3\end{cases}$$

与 $f(x)=x-3$ 的对应法则不同，所以它们是不同的函数.

B 项中 $f(x)=\lg(x^2-9)=\lg((x+3)(x-3))$ 的定义域为 $(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$，$g(x)$ 的定义域为 $(3,+\infty)$，所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同的函数.

D 项中 $f(x)$ 的定义域为 $[-1,+1]$，$g(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 所以 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是不同的函数.

因 A、B、D 项都不合要求，故应选择 C 项.

例 8　判定函数 $f(x)=x^2\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ 的奇偶性.

【分析】　函数奇偶性的判定一般均用定义，当真数为商的时候经常先用对数性质化简，可使计算简化.

解　因为 $f(x)=x^2[\ln(1-x)-\ln(1+x)]$.

所以
$$\begin{aligned}f(-x)&=(-x)^2[\ln(1+x)-\ln(1-x)]\\&=-x^2[\ln(1-x)-\ln(1+x)]\\&=-f(x).\end{aligned}$$

即　$f(x)$ 为奇函数.