克拉索夫斯基椭圓体上的高斯和地理坐標

W. K. 赫里斯托夫 著

測繪出版社

克拉索夫斯基椭圆体上的高斯和地理坐标

科学出版社

克拉索夫斯基椭圆体上的
高斯和地理坐标

W. K. 赫里斯托夫 著
許 厚 澤 譯

測繪出版社
1959·北 京

W. K. HRISTOW

DIE GAUẞSCHEN UND GEOGRAPHISCHEN KOORDINATEN AUF DEM ELLIPSOID VON KRASSOWSKY

VEB VERLAG TECHNIK BERLIN

本書系根据德意志民主共和国技术出版社1955年于柏林出版的"克拉索夫斯基椭圓体上的高斯和地理坐标"一書譯出。本書作者是保加利亞科学院通訊院士、索菲亞土木工程学院高等測量学教授及季米特洛夫獎金获得者 W. K. 赫里斯托夫博士。

全書共分六章，詳尽地叙述了在大地計算上所有的重要原理，即：微分几何的一般概念，旋轉橢圓体的几何性質和关系，球面及橢球面直角坐标，高斯坐标和內插制表法。因此，本書是一切从事大地計算的測量工程师、高等学校天文大地專業师生、科学工作者的优良参考書。

克拉索夫斯基橢圓体上的高斯和地理坐标

著者	W. K. 赫里斯托夫
譯者	許厚澤
出版者	測繪出版社
	北京宣武門外永光寺西街3号
	北京市書刊出版業營業許可証出字第081号
發行者	新华書店
印刷者	北京市印刷一厂
	北京西便門南大道乙1号

印数（京）1—2000册　　1959年6月北京第1版

开本 787×1092 1/25　　1959年6月第1次印刷

字数 233,000　　印張10 4/5

定价（10）1.35元

目　录

原　　序

一百多年前 C. F. 高斯在汉諾威所拟定的坐标系已在全世界获得推崇，每个大地測量学者和測量工程师来了解一下这門科学是很必需的。

高斯自己从未發表过他的坐标，关于此坐标的第一部著作是 O. 史賴伯的："汉諾威陆地测量投影方法的理論"，1866 年在汉諾威出版，書中包括了許多專供对数計算亦可供計算机計算的展开式。此書早已絕版，且已陈旧。

第二部著作是 L. 克吕格的"椭圓体在平面上的正形投影"，1912 年于波茨坦出版，書中討論了許多極其严密的展开式，但是这些式子只适用于对数計算，因此这本書也落后了。

第三本書是 W. K. 赫里斯托夫的"椭圓体上的高斯-克吕格坐标"，1943 年萊比錫及柏林出版，这部書今天亦不再能买到。

第四本書——W. K. 赫里斯托夫的"旋轉椭圓体上的高斯-克吕格坐标"，1946 年索菲亞出版，包含了作者的許多論文并指出直接适用于計算机的展开式。这本著作是用保加利亞文出版的，因此只有少数讀者可接触。

还有一些其他的著作，例如哈萊和塔朵-荷諾赫的"高斯-克吕格坐标系統"，1951 年布达佩斯出版；以及 R. 克尼許和 K. H. 魏塞的"高等測量学和制圖学的数学基础"，1951 年柏林（哥廷根）海得堡出版，都或多或少更深一步地討論了高斯坐标。

在本書中，作者詳述高斯坐标的理論和实踐。

高斯坐标只有在高斯关于曲面一般理論的基础上才能正确地理解。因此作者从这种理論出發并把最重要的部分作了扼要的叙述，再者，高斯坐标也不能与地理坐标分割开来，因而后者也就一併加以研

討；最后从历史上看 高斯坐标又与索尔特奈坐标不可分离，故而对此也簡短地作一接触。

关于公式的精度方面必须指出，所有公式都比实际所要的更深入的作了推討，重要的公式，特别是工作公式都以粗体数字加以标誌。

絕大多数的工作公式是以級数表示的，这些級数或者根据一个具有变系数的引数，这个引数须从别的引数取得的，或者是根据两个具有常系数的引数，二者都是很适合于用計算机施行計算的．当然要假定，所遇到的表值是已預先計算好的 为此就应該利用克拉索夫斯基椭圓体，因为这个椭圓体有最完善的理論根据且远远胜过海福特的所謂国际椭圓体。

我希望这部封面上标着高斯和克拉索夫斯基的名字的書將有助于德国，同样也有助于外国的大地測量者。

Wl. K. 赫里斯托夫

譯者序

保加利亞的赫里斯托夫教授是世界知名的大地測量学家，尤其在地圖投影方面有过許多独特的貢献，这些貢献大多發表在德国史徒嘉德（Stuttgart）出版的"測量杂誌"（Zeitschrift für Vermessungskunde）上。除此而外，正如作者原序中已提到的，他还写过兩本关于高斯-克吕格投影的著作，而本書則系更全面的又一著作。

全書的重点是第五章，在那里作者詳尽地給出了計算高斯坐标所需的各种公式，并且与一般書不同，还給出了这些公式的許多变形。特別应該提出的是其中有許多正是赫氏本人的研究，如高斯坐标面上的正反大地主題以及应用此公式推导严密的方向距离改化公式、索尔特奈坐标与高斯坐标之差别，高斯投影之换算問題等。另外，書中所載公式的精度是極高的，超过現今一切的著作。

其他几章是配合第五章而写的，其中亦有不少独特之处：

1.在第一章中把微分几何的重要公式原理作了彙集，并且推导公式时，避免用向量分析的方法而代以用笛卡兒坐标 使讀者很容易看懂，特別是証明高斯曲率在扭曲时不变这一著名定理时 采用了簡便的方法，虽欠严密，但亦是一新貢献也。

2 列出了大地計算上的根本公式（見2.4节） 这对进行研究工作有極大方便之处。

3.深入地研究了在球面的情况下，高斯坐标可由兩种方法引出，即：几何法（由球面直角坐标經过改編坐标綫号数而得出）和分析法（根据函数論中的解析延拓原理得出）。但在橢球面的情况下，前者是不能应用的，所以求高斯坐标时只有用分析的方法。

4.对如何造表作了簡明的叙述，这对計算工作者是大有好处的。

总之，本書几乎已包括了在大地計算上（除却平差学）所有最重

要的原理。其唯一的缺点是未能举出实用的算例和用表，然而这并不减弱本書的价值，特别是我所方俊主任編写的"地圖投影第二冊"問世后，这一問題即可得以补救。

在翻譯过程中曾將原著排印錯誤之处作了一些修改，譯者翻譯此書是边学边譯的，尤其德文方面修养很差，因而誤譯之处，想来难免，希讀者随时指出。又譯作曾蒙叶雪安先生校閱及胡庭輝同志协助，譯者在此表示感謝。

第一章　微分几何的一般概念

1.1　任意曲面上的一般坐标系

設已知一任意曲面，在与我們有关的曲面部分上假定这样的兩簇曲綫系統，使得过每一点有每簇中的一条曲綫通过。兩系曲綫可設想是連續地編成号数的（見圖1）。現在我們就把这兩簇曲綫系称之为任意曲面上的一般坐标系，而这些曲綫本身称为坐标曲綫，曲綫号数 u, v 称为該兩曲綫所通过的曲面上点 P 的一般坐标。

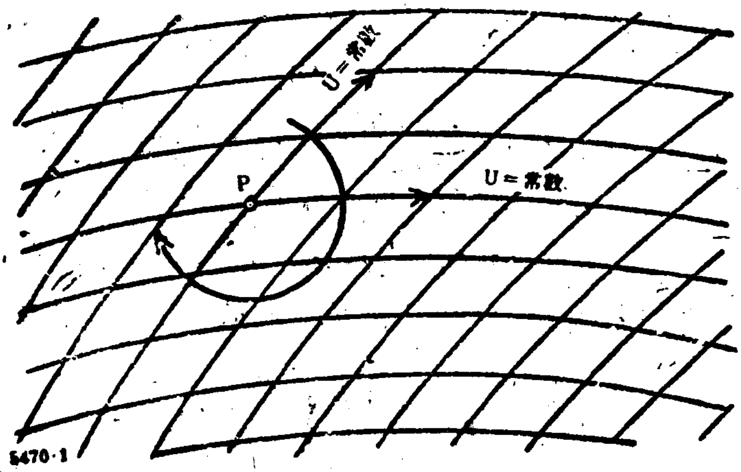

圖1．任意曲面

坐标綫 $v=$常数也叫做 u 曲綫，因为沿着这条曲綫只有 u 坐标变化；同样地，坐标綫 $u=$常数也叫做 v 曲綫，因为沿着它只有 v 坐标改变。

我們規定这样的方向为 u 曲綫（綫 $v=$常数）或 v 曲綫（綫 $u=$

常数）的正方向，沿此方向 u 坐标或 v 坐标是增大的。我們还規定曲面上正旋轉的方向为：从曲綫 $v=$ 常数的正方向按最短的途徑旋轉到 $u=$ 常数的正方向的旋轉。

假如在一曲面上我們用 $du=$ 常数和 $dv=$ 常数画出 $u=$ 常数的和 $v=$ 常数的綫，那末整个曲面就被分成許多無穷小的平形四边形，我們把其中之一用圖 2 表示，并利用符号 ds_u 和 ds_v 表示平行四边形的边 $(u,v)-(u+du,v)$ 和 $(u,v)-(u,v+dv)$，ds 表示对角綫長 $P(u,v)-P'(u+du,v+dv)$。

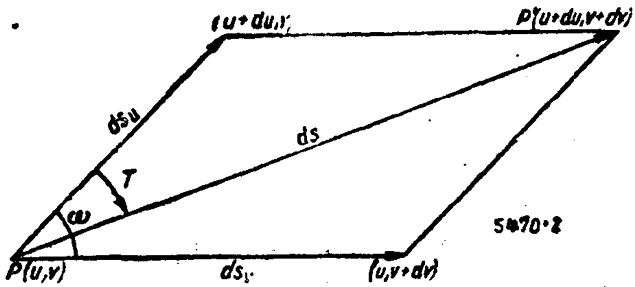

圖 2. 曲面元素

現导入兩坐标曲綫之夾角 ω，其角値在 0 和 π 之間。

根据嘉諾(Carnot)定理有

$$ds^2=ds_u^2+ds_v^2-2ds_u\,ds_v\cos(\pi-\omega)=$$

$$=ds_u^2+2\cos\omega\,ds_u\,ds_v+ds_v^2. \tag{1}$$

因为在無穷小的鄰域內，ds_u 正比于 du，ds_v 正比于 dv，于是我們可設

$$\left.\begin{aligned} ds_u &= +\sqrt{E}\,du \\ ds_v &= +\sqrt{G}\,dv \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

式中 $E=E(u,v)$ 及 $G=G(u,v)$ 是兩个位置函数，它們把坐标的微分 du 和 dv 与实际距离 ds_u 和 ds_v 相互連結起来。

以（2）代入（1），得

$$ds^2=Edu^2+2\sqrt{EG}\cos\omega\,du\,dv+G\,dv^2 \tag{3}$$

再引进略号

$$F = +\sqrt{EG}\cos\omega, \tag{4}$$

由此我們得到綫元素 ds，亦即量度的基本形式

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2. \tag{5}$$

这里的 $F = F(u,v)$ 同 ω 一样都是位置函数。

根据公式(4)

$$\cos\omega = \frac{F}{+\sqrt{EG}} \tag{6}$$

由此得

$$\sin\omega = +\sqrt{1-\cos^2\omega} = \frac{+\sqrt{EG-F^2}}{+\sqrt{EG}} \tag{7}$$

和

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\sin\omega}{\cos\omega} = \frac{+\sqrt{EG-F^2}}{F}. \tag{8}$$

求面积元素 df 的公式为

$$df = ds_u\,ds_v\sin\omega \tag{9}$$

并把式(2)和(7)代入后得到

$$df = +\sqrt{EG-F^2}\,du\,dv \tag{10}$$

我們把圖 2 中的 T 角称为方向角，并且从曲綫 $v=$ 常数的正方向起按正旋轉的方向来計算，首先，对于 $\sin T$ 有公式

$$\sin T = \frac{ds_v}{ds}\sin\omega = \frac{+\sqrt{EG-F^2}}{+\sqrt{E}}\frac{dv}{ds}, \tag{11}$$

这里我們利用了公式(2)和(7)。

由此即可計算出 $\cos T$

$$\cos T = \sqrt{1-\sin^2 T} = \sqrt{1-\frac{(EG-F^2)\,dv^2}{E\,ds^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{E(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)-(EG-F^2)\,dv^2}{E\,ds^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{E^2du^2+2EF\,du\,dv+F^2dv^2}{E\,ds^2}} = \sqrt{\frac{(E\,du+F\,dv)^2}{E\,ds^2}} =$$

$$=\frac{1}{+\sqrt{E}}\left(E\frac{du}{ds}+F\frac{dv}{ds}\right) \tag{12}$$

以及 $\operatorname{tg}T$

$$\operatorname{tg}T=\frac{\sin T}{\cos T}=+\sqrt{EG-F^2}\frac{dv}{E\,du+F\,dv}。 \tag{13}$$

从公式(2)和(7)易看出，数值 E,G 和 $EG-F^2$ 必須是正的，我們才能得出实的关系式。反之，不等式

$$E>0,\quad G>0,\quad EG-F^2>0 \tag{14}$$

是 ds 为实数的充分条件，这一点可从下列关系立即看出

$$\begin{aligned}E\,ds^2&=E(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)=\\&=(E\,du+F\,dv)^2+(EG-F^2)dv^2,\end{aligned} \tag{15}$$

上式的右边部分永远为正。

永为正的形式（5）叫做正定的。

现在我們要进一步从分析上指出，假如函数 E,F 和 G 滿足不等式(14)，則基本微分形式（5）就确定一簇曲面，由于这些曲面都有同一量度，故能相互無伸張地被展开。

第一步我們設想給定了一个以参数表示的曲面

$$\left.\begin{aligned}x&=x(u,v)\\y&=y(u,v)\\z&=z(u,v)\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

其中，x,y,z 是曲面点的空間直角坐标，而 u,v 是我們的一般坐标。

从公式(16)，我們还得到坐标曲綫的参数表示式，例如

$$\left.\begin{aligned}x&=x(u_1,v)\\y&=y(u_1,v)\\z&=z(u_1,v)\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

是曲綫 $u=u_1$ 的参数表示式，而

$$\left.\begin{aligned}x&=x(u,v_1)\\y&=y(u,v_1)\\z&=z(u,v_1)\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

是曲綫 $v=v_1$ 的参数表示式。

取式(16)的微分

$$\left.\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv \\ dy &= \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

并把它們代入表达式

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2, \tag{20}$$

借此我們精确地得到基本形式（5）

$$ds^2 = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)du\,dv + G(u,v)dv^2 \tag{21}$$

它帶有确定的函数 E, F 和 G

$$\left.\begin{aligned} E &= \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2 \\ F &= \frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v} \\ G &= \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

从(22)还可导出关系

$$EG - F^2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2 \tag{23}$$

从上式連帶表达式（22）的一、三两个式子，事实上也能导出不等式(14)。关系式(23)則通过运算很容易証实。

反过来的問題是，今若已知三个滿足不等式（14）的函数 E, F，G，也就是在式（5）中 ds^2 为正，而要問形式（5）是否相应于一曲面。显然，对 x, y, z 的偏微分方程（22）求积分，就給予我們欲求的函数 $x(u,v)$，$y(u,v)$ 和 $z(u,v)$，但这时它們还包含有不定函数，亦即我們得到一簇在空間能彼此無变形地展开的曲面，因为它們有相同的量度基本形式。

为了說明这点，我們想像在曲面上刻上坐标綫 $u=$ 常数和 $v=$ 常

数；其次再想像曲面是可弯曲但不可伸張的❶。假如我們現在以任何方式無伸張地弯曲曲面的話，那末不但曲綫坐标保持不变，而且整个長度、角度和曲面面积都保持不变。因为在(5)式中不仅 du, dv 而且 ds 都保持不变，所以 E, F, G 也不允許有变化。

第一基本形式（5）叫做量度基本形式，因为它給出了所有一切曲面的量度的基本形式，而这些曲面是由彼此不相关的無变形的弯曲所产生的。

現在我們再研究很重要的一点。假如坐标綫彼此成正交，即 $\omega = \frac{1}{2}\pi$，則按（4）式 F 等于零；反过来若 $F=0$，則按(6)式 ω 等于 $\frac{1}{2}\pi$，所以坐标綫相互正交。在这个特别情形下，公式(4)，(5)，(10)，(11)，(12)和(13)等变成：

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2}\pi, \quad F = 0 \\ ds^2 &= E du^2 + G dv^2 \\ df &= +\sqrt{EG}\, du\, dv \\ \sin T &= \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds} \\ \cos T &= \sqrt{E}\,\frac{du}{ds} \\ \operatorname{tg} T &= \sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{dv}{du} \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

我們从一个無限小的長方形（見圖3）中也可以直接地而且很簡單地导出这套公式，这里的小長方形是圖2的無限小平行四边形在 $\omega = \frac{1}{2}\pi$ 时所变成的。实际上，通过綫元素 ds 在坐标曲綫上的投影，我們能立即写出等式

$$\left.\begin{aligned} ds_u &= ds\cos T = \sqrt{E}\,du \\ ds_v &= ds\sin T = \sqrt{G}\,dv \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

❶ 也就是想像該曲面是薄膜做成的，而非橡皮做的。——譯者註

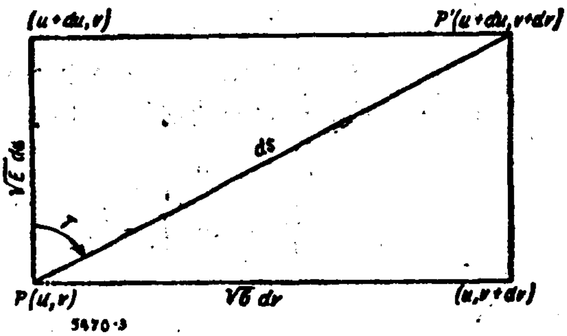

圖 3. 曲面元素

由此得

$$\left.\begin{aligned}
\sin T &= \frac{ds_v}{ds} = \sqrt{G}\,\frac{dv}{ds} \\
\cos T &= \frac{ds_u}{ds} = \sqrt{E}\,\frac{du}{ds} \\
\operatorname{tg} T &= \frac{ds_v}{ds_u} = \sqrt{\frac{G}{E}}\,\frac{dv}{du} \\
ds^2 &= ds_u^2 + ds_v^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 \\
df &= ds_u\,ds_v = \sqrt{EG}\,du\,dv
\end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

必须强調的是，对于大地测量学，非常重要的正是正交的即 $\omega=\frac{1}{2}\pi$ 的坐标系，与此相反，$F\neq 0$ 的一般坐标系是不采用的。

1.2 任意曲面上的曲率半徑

設已知一曲面：

$$z=z(x,y) \qquad (1)$$

其中 x,y,z 是空間直角坐标。現設想在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 点处把（1）式展为泰勒級数

$$z=z_0+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_0\cdot(x-x_0)+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_0\cdot(y-y_0)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_0\cdot(x-x_0)^2+\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)_0\cdot(x-x_0)(y-y_0)$$