

MATHEMATICA

实用手册

同济大学应用数学系 编

同济大学出版社

MATHEMATICA 实用手册

同济大学应用数学系 编

同济大学出版社

内 容 提 要

本书介绍了当今著名的数学软件 Mathematica 的基本而主要的内容——符号演算、数值计算和图像制作. 本书主要供从事数学教学的教师和正在学习《高等数学》、《线性代数》的大学生学习 Mathematica 之用, 也可供需要借助数学软件进行科学研究和设计计算的科学工作者和工程技术人员使用. 本书应用了大量的例子来说明 Mathematica 的各种函数的使用方法和条件, 使得读者能够方便地理解和应用.

图书在版编目(CIP)数据

MATHEMATICA 实用手册/同济大学应用数学系编.

上海: 同济大学出版社, 2002. 10

ISBN 7-5608-2493-5

I. M… II. 同… III. 数学—应用软件, MATHEMATICA—手册 IV. 0245-62

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 063140 号

MATHEMATICA 实用手册

同济大学应用数学系 编

责任编辑 李炳钊 责任校对 徐春莲 封面设计 陈益平

出 版 行 同济大学出版社

(上海四平路 1239 号 邮编 200092 电话 021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂印刷

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 19.75

字 数 395 000

印 数 1—4 000

版 次 2002 年 10 月第一版 2002 年 10 月第一次印刷

书 号 ISBN 7-5608-2493-5/O·219

定 价 32.00 元(内含光盘 1 张)

本书若有印装质量问题, 请向本社发行部调换

序

在当前数学基础课的教学改革中,很多学校采用的一个措施就是根据具体课程的特点,把计算机的应用引进教学中.这样做,既有利于把计算机技术的飞速发展所带来的数学教学内容变化及时反映到课程中来,也有利于促进教学手段的改革,及早培养学生使用计算机解决数学问题的意识和能力.

把数学教学与计算机应用结合起来,现在通常有两种做法.一种是在有关课程中编入借助计算机进行教与学的内容,作为原有内容的一种延伸和补充;还有一种是开设单独的数学实验课,让学生接受比较集中的借助计算机解决数学问题的训练.同济大学应用数学系在这两方面都作了尝试,如在我系编写的面向 21 世纪课程教材《微积分》中,编写了十余个简单的数学实验;同时,面向全校开设了《数学实验》选修课,这两方面的尝试都取得了积极成果,受到学生欢迎.

将数学教学与计算机的应用结合起来,离不开发挥数学软件的功能.适用于数学教学使用的功能强大而界面友好的数学软件是促进两者结合的必不可少的前提条件,现在比较适用的数学软件已有不少,其中如 Mathematica, Matlab 在国内采用得比较广泛.根据我们的经验,为了使数学实验教学得以顺利进行,一本适用于教学使用的软件介绍书是必不可少的.我们曾在《微积分》教材中作为附录编入了关于 Mathematica 软件的简单介绍,但学生觉得过于简单,作为入门知识介绍还显得不足;而现在正式出版、包括翻译过来的一些数学软件书籍,又往往是为程序设计目的而写的全面教程,对于初步应用者来说又显得过于烦琐.很多学生和教师需要一本主要服务于数学实验教学目的的软件使用手册.

为了满足这方面的需要,我系桂子鹏教授、朱晓平副教授编写了这本书.编者长期从事数学基础课教学,又多年担任数学建模和数学实验课程的建设 and 教学,经验丰富,并对学生和教师在教学软件知识方面的具体需求有深切了解.本书颇具特色,首先是它突出了为教学服务的宗旨,选材比较恰当;其次它选用了大量例子,便于读者在实践中掌握 Mathematica 的语句和编程知识;第三是它主要针对高等数学和线性代数这两门大面积公共课程的教学实际而写,对目前正在教和学这两门课程的教师和学生来说,使用更为方便.因此,这本书既可作为学习 Mathematica 的入门书单独使用,又可作为高等数学、线性代数和数学实验课程的配套教材,比如与同济编写的《微积分》教材配套使用.

数学教学改革是一项长期而艰巨的任务,需要做大量细致而具体的工作,我想

这本书的出版,就是在构筑新的课程体系这座宏伟大厦中添加的一块砖、一片瓦,必将在其恰当的位置上起到应有的作用.

同济大学应用数学系 郭镜明

2002 年 8 月

前 言

计算机的出现,使人们在工程设计、经营管理等实际工作中,有了一个得力的不可缺少的工具,同样也成为科学研究的有力的武器.在计算机技术的发展过程中,数学无疑地是起了重要的作用的.反过来,计算机技术的发展同样也在帮助人们学习数学、应用数学和研究数学.对于数学来讲,它不仅仅是数字的计算,还有一个重要方面是能够进行符号运算和理论证明. Mathematica 数学软件就为人们提供了这方面的运算平台.

Mathematica 数学软件是一个集成化的计算机软件,它的主要功能有三个方面:符号演算、数值计算和图像.

在符号演算方面, Mathematica 能够做多项式的各种计算(四则运算、合并、展开、因式分解等);能够做有理表达式的许多计算;能够解多项式方程和一些有理方程、超越方程的解析解和数值解;更能够做微积分中许多运算(极限、导数、不定积分和定积分、幂级数展开和幂级数的运算、求解微分方程等);能够做向量和矩阵的一系列运算.

在数值计算方面, Mathematica 能够做精确的数值计算,也能做任意精确度的近似解;能够做实数运算,也能在复数范围中进行复数运算.

在图形绘制方面, Mathematica 能够做平面图形(直角坐标作图和极坐标作图,还有参数方程作图),也能做三维的曲面、曲线图形.

本手册主要是针对大学数学基础课的教学需要编写的,因此主要选择了与大学的高等数学和线性代数有密切联系的、基本且重要的内容,而不是 Mathematica 的全部内容.在对内容的叙述中,力求讲清楚 Mathematica 各种函数的使用方法和条件,并且安排了大量例子来具体说明,使得读者能够方便地理解和应用.编者相信,读者在学习数学的同时,使用 Mathematica 软件来辅助,将会是很有受益的.

本手册在同济大学理学院应用数学系的大力支持下,由桂子鹏教授主编,参与编写的还有朱晓平和方敏.在编著过程中得到许多同仁的鼓励和支持,作者在此深表感谢.

作 者

2002 年 8 月于上海同济大学

目 录

序

前言

第一章 Mathematica 概述

1.1 系统的运行环境、安装、启动和界面	(1)
1.2 Mathematica 系统的特点简介	(3)
1.2.1 绝对精确的符号运算	(3)
1.2.2 任意精确度的数值计算	(5)
1.2.3 方便的各种函数绘图	(6)
1.2.4 容易建立的程序编制	(9)
1.2.5 应用丰富的应用程序包	(11)
1.2.6 定制数学对象运算规则	(11)
1.2.7 表达式转化和数据交换	(12)
1.3 Mathematica 的系统菜单简介	(12)
1.3.1 File(文件)菜单	(13)
1.3.2 Edit(编辑)菜单项	(14)
1.3.3 Cell(单元)菜单	(16)
1.3.4 Format(格式)菜单	(18)
1.3.5 Input(输入)菜单	(20)
1.3.6 Kernel(核心)菜单	(21)
1.3.7 Find(查找)菜单	(22)
1.3.8 Window(窗口)菜单	(23)
1.3.9 Help(帮助)菜单	(24)
1.4 Mathematica 的笔记本工作方式	(24)
1.4.1 Mathematica 的工作窗口	(25)
1.4.2 单元的类型、属性和范围	(26)
1.4.3 输入文字的类型、风格和编排	(29)
1.4.4 Mathematica 表达式的输入	(31)
1.4.5 笔记本的风格(NotebookLauncher)	(34)

第二章 Mathematica 基本操作

2.1 数和数的运算	(37)
2.1.1 数的类型	(37)
2.1.2 数的算术运算	(38)
2.1.3 精确的数学常数	(39)
2.1.4 标识符和变量	(41)
2.1.5 表示中间结果的标记	(42)
2.1.6 表、集合、数组、向量、矩阵和命令表	(43)
2.2 Mathematica 函数和常用的数学函数	(46)
2.2.1 Mathematica 函数概念	(46)
2.2.2 Mathematica 中的数学函数	(47)
2.3 数的精确值和近似值	(50)
2.3.1 量的类型和检测方法	(50)
2.3.2 数的精确度和准确度	(52)
2.3.3 数的精确值与近似值的相互转化	(54)
2.4 数学表达式的代数运算	(57)
2.4.1 数学表达式的输入和自动处理	(57)
2.4.2 数学表达式的求值	(58)
2.4.3 数学表达式的展开	(60)
2.4.4 数学表达式的因式分解	(64)
2.4.5 数学表达式的化简	(68)
2.4.6 数学表达式的其他变换	(70)
2.5 多项式的代数运算	(76)
2.5.1 多项式的常用运算	(76)
2.5.2 多项式的某些特殊运算	(79)
2.5.3 多项式的求根函数	(82)
2.6 解方程	(84)
2.6.1 基本的解方程函数	(84)
2.6.2 与解方程相关的函数	(88)

第三章 微积分和数值计算

3.1 基本微积分运算函数	(95)
3.1.1 求极限的函数	(95)

3.1.2 求导数和微分的函数	(98)
3.1.3 求积分的函数	(104)
3.1.4 求解微分方程的函数	(112)
3.1.5 幂级数及其运算的函数	(118)
3.2 向量和矩阵的运算函数	(128)
3.2.1 向量的构造法	(128)
3.2.2 矩阵的构造法	(129)
3.2.3 向量运算	(133)
3.2.4 矩阵运算	(138)
3.2.5 矩阵反演	(143)
3.2.6 求解线性代数方程组	(148)
3.2.7 求矩阵的特征值和特征向量	(157)
3.2.8 矩阵的分解函数	(161)

第四章 图形的绘制

4.1 二维图的绘制	(171)
4.1.1 二维的绘图函数	(171)
4.1.2 二维绘图的选项	(176)
4.1.3 二维绘图的图形指示函数和颜色函数	(183)
4.1.4 图形的重显组合	(186)
4.1.5 Graphics 对象和二维的图形元素	(188)
4.1.6 二维绘图前后的补充绘图	(195)
4.2 三维图的绘制	(196)
4.2.1 三维的绘图函数	(196)
4.2.2 三维的绘图函数的选项	(204)
4.2.3 三维的图形元素和图形指示	(209)
4.2.4 等高线图和密度图	(212)
4.3 图形对象	(215)
4.3.1 图形对象的构造和创建	(215)
4.3.2 图形对象的选项	(219)
4.4 特殊的绘图函数	(223)
4.4.1 Graphics 程序包中绘画函数	(223)
4.4.2 Animation 程序包中动画函数	(226)

第五章 程序设计

5.1 表和表达式的结构	(228)
5.1.1 表的结构和操作函数	(228)
5.1.2 表达式的结构	(239)
5.1.3 表达式的操作函数	(244)
5.1.4 纯函数和表达式的缩写	(247)
5.2 变换规则、模式和表达式求值	(250)
5.2.1 变换规则	(251)
5.2.2 模式和模式匹配	(258)
5.2.3 函数的定义法	(260)
5.2.4 表达式的求值过程	(266)
5.3 程序结构和程序设计	(267)
5.3.1 过程和局部变量	(267)
5.3.2 流程控制函数	(270)
5.3.3 字符和字符串	(285)
5.3.4 数据的输入与输出	(292)
5.3.5 错误的检测和处理	(302)

第一章 Mathematica 概述

Mathematica 数学软件是美国 Wolfram Research 公司开发的产品. 在 1988 年由 Stephen Wolfram 推出 1.0 版, 1991 年发布了 2.0 版. Mathematica 的全新的符号运算工具和处理思想使得它成为当时符号运算的领导者. 1996 年 3.0 版面市, 更以其强大的功能成为符号运算软件的佼佼者. 目前的最新版本是 4.0, 它在符号运算速度方面又有了提高. 本手册以 3.0 版为基准来介绍 Mathematica 数学软件.

在本章中, 介绍 Mathematica 数学软件的环境要求、运行界面、功能特点等基本情况.

1.1 系统的运行环境、安装、启动和界面

在 PC 机上的 Windows 操作系统下运行的 Mathematica 3.0 版本是目前流行的版本. 它的最低硬件环境要求是 486 的 CPU 和 8MB 的内存; 如果完全安装 3.0 版本则需要 130MB 以上的硬盘空间; 要求有鼠标器、声卡、高彩显卡和光驱; 软件环境是中文或英文的 Windows95 及以后版本的操作系统.

在 Windows95 操作系统下的安装过程: 启动 Mathematica 3.0 安装盘上的程序 setup.exe, 就显示安装窗口(图 1-1)并载入安装引导程序. 单击“Next”按钮开始安装工作. 首次安装时会显示注册对话框, 用户必须要进行注册, 否则将拒绝安

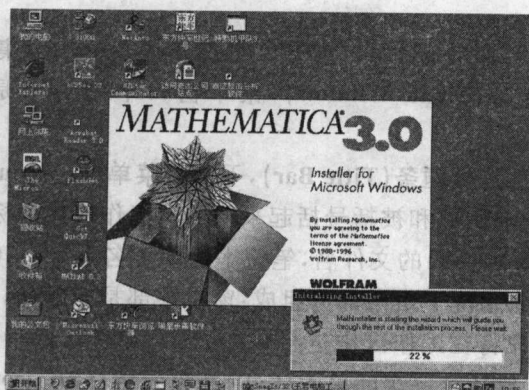


图 1-1 Mathematica 的安装启动界面

装. 按通常方式选择安装路径和安装方式, 再选择要安装的各组成成分, 使用“Next”按钮来确定并安装. 最后在安装完成窗口(图 1-2)中单击“Ok”结束安装工作.

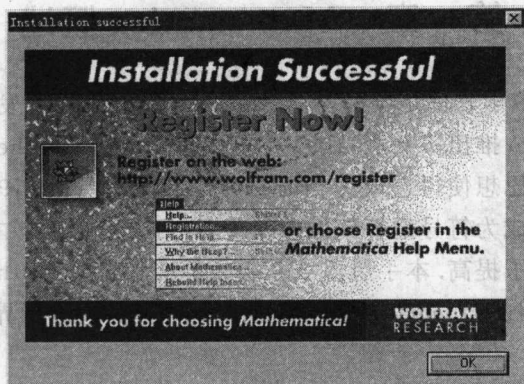


图 1-2 Mathematica 的安装完成界面

系统的卸载可通过 Windows 操作系统中的卸载功能“开始”>“设置”>“控制面板”>“添加/删除程序”来完成, 也可通过“开始”>“程序”>“Mathematica3.0”>“Uninstall Mathematica3.0”来完成.

启动 Mathematica3.0 系统可用“开始”>“程序”>“Mathematica3.0”>“Mathematica3.0”;在资源管理器或“我的电脑”中, 沿 Mathematica3.0 的安装路径启动 Mathematica.exe, 退出 Mathematica3.0 系统可用关闭 Mathematica3.0 窗口方法, 或使用 Mathematica3.0 菜单的“File”>“Exit”项.

注意:在 Mathematica3.0 中还有两个可执行应用程序: Mathkernel.exe 和 Math.exe. 前者只运行系统的核心部分, 后者是系统的命令行形式交互环境的 DOS 版本.

Mathematica3.0 启动后就显示如图 1-3 那样的图形用户集成界面: 屏幕顶部水平条形是菜单窗口 (Menu Window), 菜单窗口下的窗口是工作窗口 (Work Window).

菜单窗口的上部是标题条 (Title Bar), 下部是菜单条 (Menu Bar). 在标题条上有系统标题“Mathematica”和被括号括起来的当前工作窗口的标题. 这个标题是当前使用的笔记本 (Notebook) 的文件名, 笔记本的缺省名是“Untitled-1”.

工作窗口在缺省情况下由两部分组成: 窗口顶部是标题条, 窗口下部是工作区 (Work Region). 用户将在工作区中进行输入、编辑和修饰各种 Mathematica 表达式 (Expressions), 组成各种层次的单元 (Cell) 和单元组 (Cell group), 并由它们组成笔记本等操作; Mathematica 系统将这些存在于工作区中的表达式、单元、笔记本

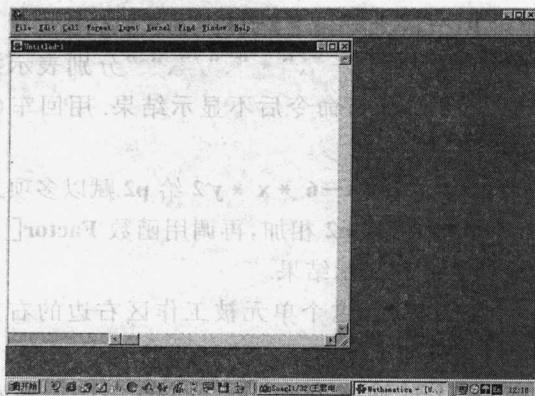


图 1-3 Mathematica 的图形用户集成界面

进行实时的运算,并将结果显示在工作区中.工作区中的内容可以保存为笔记本文件(Notebooks),其文件扩展名为“.nb”.在后面将详细介绍这些内容.

1.2 Mathematica 系统的特点简介

作为数学的软件 Mathematica,其主要功能是数学运算的能力和应用各种数学方法来解决数学问题的能力.下面将通过例子来介绍 Mathematica 系统各方面功能.

1.2.1 绝对精确的符号运算

Mathematica 的首要特点是可做绝对精确的符号运算.它可对代数表达式进行精确的化简和变形;也可对向量和矩阵进行各种精确计算,包括矩阵的线性运算、矩阵乘积、求特征多项式和特征值;还可求函数的极限、导数、积分、幂级数展开及求解微分方程.

例 1.1 求多项式 $(3 + \frac{a}{2})x + 4xy^2$ 与 $\frac{a}{2}x - 6xy^2$ 的和,并把结果进行因式分解.

解 在工作区中输入下列由一些 Mathematica 表达式组成的各命令:

```
p1 = (3 + a/2) * x + 4 * x * y^2;
```

```
p2 = a/2 * x - 6 * x * y^2;
```

```
p = Factor[p1 + p2]
```

MAF81/09

输入的第二个命令 $p1 = (3 + a/2) * x + 4 * x * y^2$ 给变量 $p1$ 赋以等号右面的多项式。多项式中的符号“+”、“-”、“*”、“/”、“^”分别表示加、减、乘、除和乘方。命令后紧跟的分号“;”表示执行命令后不显示结果。用回车(Enter 键)来确认此命令。

输入的第三个命令 $p2 = a/2 * x - 6 * x * y^2$ 给 $p2$ 赋以多项式且不显示结果。

输入的第三个命令是将 $p1$ 和 $p2$ 相加,再调用函数 `Factor[ ]` 对相加的结果因式分解,并将结果赋给变量 p 和显示结果。

这些命令构成一个输入单元。这个单元被工作区右边的右方括号“]”所括在内。

按 **Shift + Enter** 键就对输入单元进行运算。这时输入行前自动显示 “In[1]:=”, 成为

```
In[1]:= p1 = (3 + a/2) * x + 4 * x * y^2;
        p2 = a/2 * x - 6 * x * y^2;
        p = Factor[p1 + p2]
```

它表示在其后的输入内容已进行了处理。接着在下面输出处理的结果:

```
Out[1]= x(3 + a - 2y^2)
```

输出中的 “Out[1]=” 自动产生, 等号后是输出单元的内容。可以看到, 在 Mathematica 中因式分解后的输出形式为 $x(3 + a - 2y^2)$, 它与通常表达形式相当一致。

上面的结果在工作区中的显示形式如图 1-4 所示。

```
In[1]:= p1 = (3 + a/2) * x + 4 * x * y^2;
        p2 = a/2 * x - 6 * x * y^2;
        p = Factor[p1 + p2]

Out[1]= x (3 + a - 2 y^2)
```

]

图 1-4 例 1.1 的操作运算结果显示

注意: “In[n]:=...” 表示输入的内容, 其中数值 n 表示输入内容的序号。“Out[n]=...” 表示输出的内容, 其中数值 n 表示输出内容的序号。在后面的叙述中, 为了书写的简便, 在要处理而尚未处理的输入内容前, 总加上输入标记 “In[n]:=”。

例 1.2 计算函数 $y = x \sin^2 x$ 的导数。

解 在工作区中输入下列表达式:

```
In[2]:= D[x * Sin[x]^2, x]
```

在这个输入中 `Sin[ ]` 为正弦函数, 要注意函数名的第一个字母必须是大写的。

D[]是求导数的函数. 按 Shift+Enter 键得到输出:

$$\text{Out}[2] = 2x \cos[x] \sin[x] + \sin[x]^2$$

显然这表明函数 $y = x \sin^2 x$ 的导数是 $y' = 2x \cos x \sin x + \sin^2 x$.

应该指出的是, 符号运算在能够进行的情况下所获得的结果是绝对精确的.

1.2.2 任意精确度的数值计算

数值计算一般都是在默认精度下的近似计算(通常是双精度浮点运算). Mathematica 软件则可进行任意精确度下的近似计算.

例 1.3 计算算式 $\frac{36+153}{33}$ 的精确值和精确到有 6 位有效数字的近似值.

解 输入下面两个表达式, 然后按 Shift+Enter 键运算输出:

In[3]: $=v = (36+153)/33$

N[v]

$$\text{Out}[3] = \frac{63}{11}$$

$$\text{Out}[4] = 5.72727$$

输入内容“ $v = (36+153)/33$ ”表示要计算分式并在变量 v 中记录结果. 输出 Out[3] 显示精确结果是个既约分数. 输入内容“N[v]”要对 v 的值进行近似的数值计算. N[] 为计算数的近似值的函数. 输出 Out[4] 是所得的近似值, 它有默认的六位有效数字精确度.

例 1.4 求代数方程 $x^3 - 7x^2 + 3x = 0$ 的根的精确值和近似值.

解 输入下面的两个表达式, 然后按 Shift+Enter 键运算输出:

In[5]: $=\text{Solve}[x^3 - 7 * x^2 + 3 * x == 0, x]$

N[%, 10]

$$\text{Out}[5] = \left\{ \{x \rightarrow 0\}, \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2}(7 - \sqrt{37}) \right\}, \left\{ x \rightarrow \frac{1}{2}(7 + \sqrt{37}) \right\} \right\}$$

$$\text{Out}[6] = \left\{ \{x \rightarrow 0\}, \{x \rightarrow 0.4586187349\}, \{x \rightarrow 6.541381265\} \right\}$$

输入内容“ $\text{Solve}[x^3 - 7 * x^2 + 3 * x == 0, x]$ ”要精确求解 3 次代数方程. 输出 Out[5] 显示三个精确根. 输入内容“N[%, 10]”则对获得的结果做近似数值计算, 精确度为 10 位有效数字. 输出 Out[6] 为根的近似值. 符号“%”表示上一次的输出内容.

注意: Mathematica 系统不是对所有的问题都能获得精确的表达式结果的, 例如 5 次以上的一般代数方程的根, 但是 Mathematica 系统都可对它求出对应的近似数值.

例 1.5 求定积分 $\int_0^{\pi} x \sin(\sin x) dx$ 的值.

解 输入下面的两个表达式, 然后按 Shift+Enter 键运算输出:

```
In[5]:=Integrate[x * Sin[Sin[x]],{x,0,Pi}]
      N[%,20]
```

```
Out[7]= $\int_0^{\pi} x \sin[\sin x] dx$ 
```

```
Out[8]=2.8062079745122063857
```

输入内容“Integrate[x * Sin[Sin[x]],{x,0,Pi}]”要求定积分的值, 其中 Pi 表示圆周率 π . 在处理过程中系统先求不定积分, 然后用微积分基本公式求精确值. 但这个不定积分不能用初等函数表达, 所以输出 Out[7] 中仍以表达式的输出形式来输出原来积分. 执行输入“N[%,20]”后则输出 Out[8] 显示定积分的具有 20 位有效数字精确度的近似值.

1.2.3 方便的各种函数绘图

Mathematica 可方便地画一元函数的图形(平面曲线)、二元函数的图形(空间曲面)及由参数方程或联立的曲面方程所表示的空间曲线.

例 1.6 画正弦函数 $y = \sin x$ 在区间 $[0, 2\pi]$ 上的一段(曲线)图形.

解 输入表达式:

```
In[9]:=Plot[Sin[x],{x,0,2 * Pi}]
```

按 Shift+Enter 键则输出如图 1-5 所示的一段正弦曲线以及

```
Out[9]=Graphics
```

输入 In[9] 中的“Plot[]”是画一元函数图形的函数. 输出 Out[9] 表示输出的

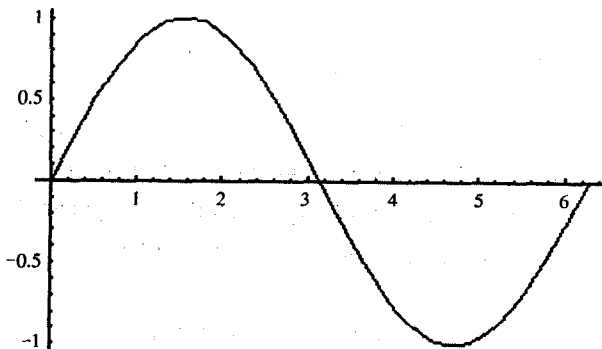


图 1-5 例 1.6 中的一元函数 $y = \sin x$ 的图形

是一张(二维的)图,如图 1-5 所示.

例 1.7 画函数 $z=x^2+y^2$ 在区域 $[-1,1]\times[-1,1]$ 上的图形(旋转抛物面)的一部分.

解 输入表达式:

```
In[10]:=f[x_,y_]:=x^2+y^2;
```

```
Plot3D[f[x,y],{x,-1,1},{y,-1,1}]
```

按 Shift+Enter 键,则输出如图 1-6 所示的旋转抛物面的一部分以及

```
Out[10]=SurfaceGraphics
```

输入 In[10] 中的“ $f[x_,y_]:=x^2+y^2;$ ”来定义表示曲面的二元函数;“Plot3D[]”是画二元函数图形的函数. 输出 Out[10] 表示目前输出的是一张曲面图.

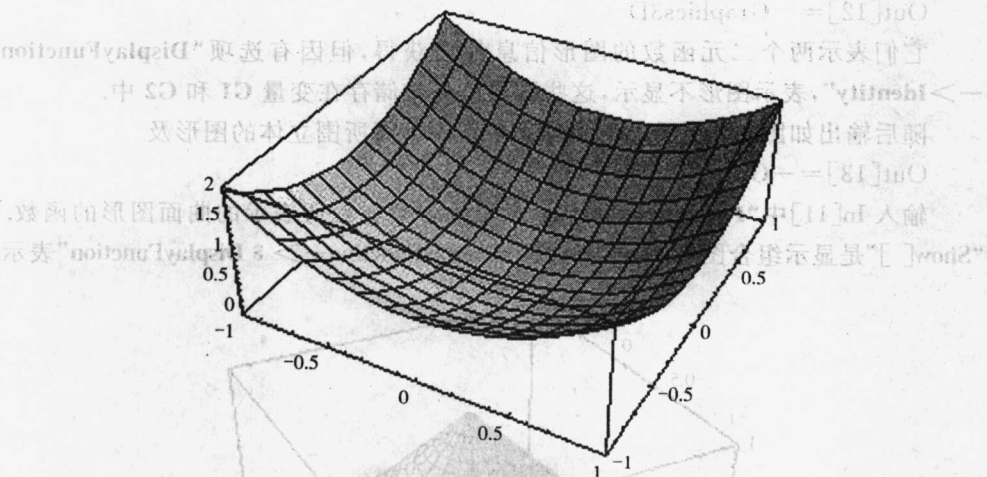


图 1-6 例 1.7 中二元函数 $z=x^2+y^2$ 的图形

Mathematica 可对图形是否显示进行控制和对图形的显示进行修饰,还可以将几个图形组合起来显示绘制成复杂的图形.

例 1.8 画下半球面与正圆锥面所围立体的图形.

解 下半球面和正圆锥面的参数方程分别为

$$\begin{cases} x = \cos u \sin v, \\ y = \sin u \sin v, u \in [0, 2\pi], v \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases} \text{ 和 } \begin{cases} x = (1-v) \cos u, \\ y = (1-v) \sin u, u \in [0, 2\pi], v \in [0, 1], \\ z = v, \end{cases}$$

输入表达式: