东方龙文化高考系列
将助您考上重点大学

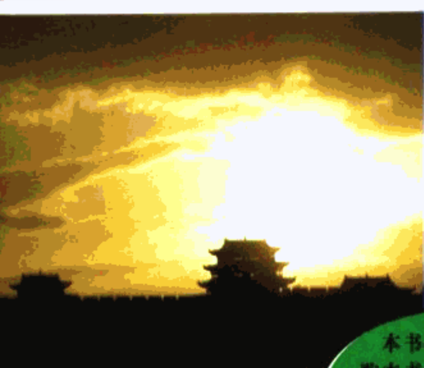
GAO KAO
FU XI ZHI DAO

2004年全国普通

高考复习指导

3+X

数学



主编 周沛耕

编委 周沛耕 王大绩 范存智
张继达 刘振贵 林镜仁
李晓凤 刘庆海 王 旭

本书的最后一页有
购本书赠全国普通高考
数学考前全真模拟命题
预测试卷、答案及解析
的"回执卡"。

中国青年出版社

2004年全国普通

高考复习指导

3＋X

数学

主　编　周沛耕

作　者　周沛耕　童嘉森

　　　　索云旺　王博程

编　委　周沛耕　王大绩　范存智

　　　　张继达　刘振贵　林镜仁

　　　　李晓风　刘庆海　王　旭

中国青年出版社

图书在版编目（CIP）数据

2004年全国普通高考数学复习指导／周沛耕主编．—北京：中国青年出版社，2003.11
ISBN 7－5006－5395－6

Ⅰ.2...　Ⅱ.周...　Ⅲ.数学课—高中—升学参考资料
Ⅳ.G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第087105号

*

中国青年出版社 出版发行
社址：北京东四12条21号　邮政编码：100708
网址：www.cyp.com.cn
编辑部电话：（010）64034349　发行部电话：（010）64010813
北京建工印刷厂印刷　新华书店经销

*

787×1092　1/16　20印张　488千字
2003年11月北京第1版　2003年11月北京第1次印刷
印数：1～5,000册　定价：25.00元

出版说明

为了帮助参加2004年普通高等学校招生全国统一考试的广大考生能顺利考上**北京大学**、**清华大学**等**名牌大学**或其他**一类重点大学**，我们特组织**全国著名高考辅导专家**——周沛耕、王大绩、范存智、张继达、刘振贵、林镜仁、刘庆海、李晓风、王旭等（多数都是中央电视台和中央人民广播电台的高考试卷评析专家或高考辅导讲座专家）北大附中、北师大附中等重点中学的**特级**、**高级教师**精心编写了《**全国普通高考复习指导**》丛书。本套丛书包括《全国普通高考**语文**复习指导》、《全国普通高考**数学**复习指导》、《全国普通高考**英语**复习指导》、《全国普通高考**文科综合**复习指导》和《全国普通高考**理科综合**复习指导》共5册。

本丛书具有以下特点：

★ 名家亲笔

本套丛书的编者均为在全国具有很高知名度的高考辅导专家、北京市重点中学的各学科特级教师和高级教师，书中积淀了他们多年来成熟的教学辅导方略，同时也吸纳了他们最新的教学研究成果，对高考复习具有极大的指导作用。

★ 紧扣考纲

本套丛书严格按照教育部最新颁布的各学科新课程标准和人民教育出版社出版的新课程教材编写，从《教学大纲》、《考试大纲》和《考试说明》中提取出各学科的重点、难点和考点，条理清晰、覆盖面广。

★ 与众不同

本套丛书与一般高考复习参考书的最大区别是：就内容而言在有限的篇幅中只阐述中等难度以上的内容；就书中所举例题和习题而言，均为难度较大的创新题。不仅对知识的灵活运用、思维方法、解题思路、解题技巧等方面予以指导点拨，还对课本所学知识作了进一步的加深、拓展和强化。

★ 权威模拟

为了帮助广大考生检验学习成效，编者在每册书后均精心编制了二至三套模拟试题，并且给出了详尽解答。每套模拟题的题型、题量、赋分和考点分布，均与高考试题一致，选题精当，紧扣《考试说明》，注重学科基础、学科综合能力、学科实

验能力的训练，以期提高广大考生综合运用知识的应试能力。模拟试题是编者长期研究高考命题规律的结晶，它对广大考生考前实战训练、强化提高、取得高分将会有很大的帮助。

★ 免费赠送

凡购买本套书者，只要按规定填写书后的“超值防伪购书回执卡”，并及时寄出，便可获得理想的售后服务。可分科购买，分科寄出。但最好全套购买，全套寄出（即语文、数学、英语、文科综合四张回执卡一并寄出；或者语文、数学、英语、理科综合四张回执卡一并寄出。还可以集体分科购买，分科集体寄出，也可以集体全套购买，集体全套寄出，以便集中按收回“回执卡”的科目及数量集中提供相应的服务）。无论是以何种形式购买，只要按规定寄出“回执卡”，均可在高考前 30 天内获赠**普通高等学校招生全国统一考试全真模拟命题预测试卷、答案及解析**。该试卷由北京市及全国各省市的著名高考辅导专家、特级、高级教师共同编写，不零售、不公开发行，属“内部资料”，是考生考前冲刺、模拟自测的最佳选择。

由于时间紧迫，书中难免有疏漏和不妥之处，敬请广大同仁和读者不吝赐教。

愿广大考生勤学苦练，不断提升、超越自我，**争取在 2004 年高考中考上北京大学、清华大学等名牌大学或重点大学**！

《2004 年全国普通高考复习指导》编委会

目　　录

第一篇　高考数学重点板块复习与提高

第二篇　提升高考数学能力的最新练习题

第三篇　高考数学模拟试题及参考答案

第一篇　高考数学重点板块复习与提高

第一章　连续量的一元函数

函数是中学数学的主要内容，教学大纲和考纲对函数的要求大都在“掌握”、“理解”的程度上. 中学数学包括的指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数，一次函数，二次函数（它们是最简单的一些多项式型函数）以及简单的分式函数，含绝对值记号的函数等既是研究的对象，又是解决其他与函数有关的问题的模型和工具.

函数的总量占中学数学的$\frac{1}{3}$左右，150 分的试卷中函数部分至少占 50 分.

函数与其他章节牵连广，容易形成知识网络的交汇点. 例如函数与方程，函数与不等式，函数与几何，函数与实际问题，这些是高考必考的“热点”.

复习与研究函数“板块”的关键是把握其内容、方法和应用三个环节.

1. 函数的本质是变量间的约束，是一个数集到另一个数集的映射.

例 1　边长为 a 的等边 $\triangle ABC$，D 为 BC 中点，E、F 分别在 AB，AC 上，$\angle EDF=90^\circ$. 求 $S_{\triangle EDF}$ 的最大值、最小值.（图 1－1）

分析　首先应当把 $S_{\triangle EDF}$ 表达为某变量的函数，根据 $\angle EDF=90^\circ$，可设 $\angle EDB=\theta$，$(0^\circ\leqslant\theta\leqslant 90^\circ)$，则 $\angle FDC=90^\circ-\theta$. 让我们着手把 $S_{\triangle EDF}$ 表示为 θ 的函数.

在 $\triangle EDB$ 中，$ED=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sin(60^\circ+\theta)}$，

在 $\triangle FDC$ 中，$FD=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sin(150^\circ-\theta)}$，

$$\begin{aligned}\therefore\quad S_{\triangle EDF}&=\frac{1}{2}ED\cdot FD\\&=\frac{a^2}{8}\cdot\frac{\sin^2 60^\circ}{\sin(60^\circ+\theta)\sin(150^\circ-\theta)}\\&=\frac{3a^2}{32}\cdot\frac{1}{\sin(60^\circ+\theta)\sin(150^\circ-\theta)}\\&=\frac{3a^2}{16}\cdot\frac{1}{\cos(90^\circ-2\theta)-\cos 210^\circ}\\&=\frac{3a^2}{16}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2\theta}\quad(0^\circ\leqslant\theta\leqslant 90^\circ).\end{aligned}$$

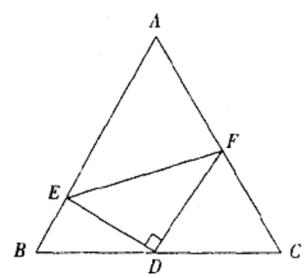


图 1－1

下一步自然就是求这个关于 θ 的函数的“最值”. 容易看出：

当 $\theta=0^\circ$，$S_{\triangle EDF}$ 有最大值 $\frac{\sqrt{3}}{8}a^2$；当 $\theta=45^\circ$，$S_{\triangle EDF}$ 有最小值 $\frac{3(2-\sqrt{3})}{8}a^2$.

思考 上述解法很清楚地表达了选择变量，确定函数关系，研究该函数的性质这样一种很常规的解题途径，这就叫“通法”. 通法主要是指在一定数学观念指导下解题的通倡、自然的办法.

选 θ 为自变量有两个好处：一是 θ 的范围（定义域）很容易确定，另一个是 $S_{\triangle EDF}=f(\theta)$ 的式子容易得到. 至于求出 $f(\theta)$ 的最大值、最小值则要靠解题者的基本功了.

换一种变量试试：

设 $BE=x,CF=y(0\leqslant x,y\leqslant a)$.

$$S_{\triangle EDB}=\frac{1}{2}EB\cdot BD\cdot\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}ax,$$

同理 $S_{\triangle FDC}=\frac{\sqrt{3}}{8}ay$，$S_{\triangle AEF}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a-x)(a-y)$.

$$\therefore\quad S_{\triangle EDF}=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle EDB}-S_{\triangle FDC}-S_{\triangle AEF}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2-\frac{\sqrt{3}}{8}ax-\frac{\sqrt{3}}{4}ay-\frac{\sqrt{3}}{4}(a-x)(a-y)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{8}a(x+y)-\frac{\sqrt{3}}{4}xy. \qquad ①$$

函数表达式虽然来得容易，可惜它是二元函数，其定义域和性质我们还不熟悉.

寻找对 x,y 的约束，使 $S_{\triangle EDF}$ 成为一元函数是继续解题的方向.

由于 $ED^2+FD^2=EF^2$，在 $\triangle EDB$，$\triangle FDC$，$\triangle AEF$ 中分别用余弦定理，可知

$$\left[x^2+(\frac{a}{2})^2-\frac{ax}{2}\right]+\left[y^2+(\frac{a}{2})^2-\frac{ay}{2}\right]=(a-x)^2+(a-y)^2-(a-x)(a-y),$$

整理得

$$\frac{1}{2}a(x+y)+xy=\frac{1}{2}a^2. \qquad ②$$

由 ①，② 消去“$x+y$”，得到

$$S_{\triangle EDF}=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2-\frac{3\sqrt{3}}{8}xy. \qquad ③$$

我们可以把 $S_{\triangle EDF}$ 看作关于“xy”的“一元”函数，为求 $S_{\triangle EDF}$ 的“最值”，必须找出 xy 的取值范围（定义域）.

由 ② 知

$$\frac{1}{2}a^2\geqslant a\sqrt{xy}+xy,$$

$$(\sqrt{xy})^2+a\sqrt{xy}-\frac{1}{2}a^2\leqslant 0, \qquad ④$$

注意到 $\sqrt{xy}\geqslant 0$，由 ④ 可得出

$$0\leqslant\sqrt{xy}\leqslant(\frac{\sqrt{3}-1}{2})a.$$

当且仅当 $x=y$ 时，$\sqrt{xy}$ 取最大值 $(\frac{\sqrt{3}-1}{2})a$. 由此得到

$$S_{\triangle EDF}=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2-\frac{3\sqrt{3}}{8}xy,0\leqslant xy\leqslant(\frac{\sqrt{3}-1}{2})^2a^2.$$

$$\therefore\quad (S_{\triangle EDF})_{最大}=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2,(S_{\triangle EDF})_{最小}=\frac{\sqrt{3}}{8}a^2-\frac{3\sqrt{3}}{8}\cdot(\frac{\sqrt{3}-1}{2})^2a^2=\frac{3(2-\sqrt{3})}{8}a^2.$$

虽然后一种解法不如前一种解法简洁，但是后面的解法中也可能产生提升复习效果的"附加值". 其中的"二元 → 一元"的思想，函数、方程、不等式相结合的意识都是值得研究的.

例 2 是否存在函数 $y=f(x),x\in[-1,1]$，具有如下性质：

①$f(1)=f(-1)=0$；

② 对任意 $u,v\in[0,\frac{1}{2}]$，都有 $|f(u)-f(v)|\leqslant|u-v|$；

对任意 $u,v\in[\frac{1}{2},1]$，都有 $|f(u)-f(v)|=|u-v|$，

③$f(x)$ 具有确定的奇偶性.

如果存在，是否惟一；如果不存在，理由是什么？

分析 看了这些条件，不加思索地说"存在"或"不存在"是不可取的，应当考查该函数的性质.

$f(1)=f(-1)=0$ 说明函数图像过 $(1,0)$，$(-1,0)$ 两点.

点 $(u,f(u))$，$(v,f(v))(u\neq v)$ 两点所在直线的斜率是 $\frac{f(u)-f(v)}{u-v}$. 条件 ② 说明函数图像介于两直线 $x=0,x=\frac{1}{2}$ 间的部分中，图像上任何两点所在直线的斜率的绝对值都不超过 1，介于两直线 $x=\frac{1}{2},x=1$ 间的部分中，图像上任何两点所在直线的斜率的绝对值都等于 1.

根据条件 ③ 知，函数 $y=f(x),x\in[-1,1]$ 是奇函数或偶函数. 如果 $f(x)$ 是奇函数，由

$$f(-0)+f(0)=0,$$

$$\therefore\quad f(0)=0.$$

这表明如果函数 $y=f(x),x\in[-1,1]$ 是奇函数，其图像必过原点.

奇函数的图像关于原点对称，偶函数的图像关于 y 轴对称.

用"形"引导变量之间的对应关系，可构造出合乎题意的函数.

符合条件的函数可以是

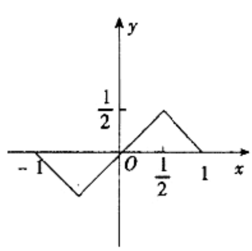


图 1-2

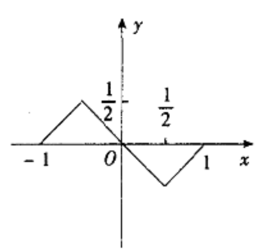


图 1-3

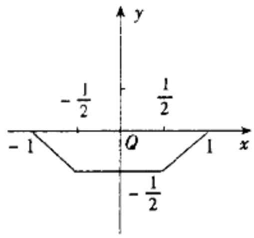


图 1－4

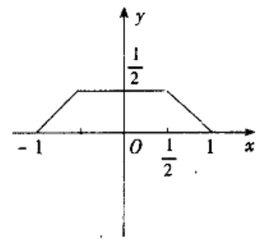


图 1－5

$$f(x)=\begin{cases}x, & -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 1-x, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\\ -1-x, & -1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2};\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}-x, & -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ x-1, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1, & -1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2};\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ x-1, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\\ -x-1, & -1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2};\end{cases}\qquad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ -x+1, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\\ x+1, & -1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

思考 从函数性质出发，用函数图像引导，构造出合乎要求的函数，从而说明“存在性”，这是研究函数问题的一种重要思考方法.

仅就上述列出的函数就可说明存在且不惟一. 从另一个角度看问题，对同一形状的函数图像，也可能是不同的对应法则，因而是不同的函数. 例如图 1－2 所示的图像不仅是上述的第 1 种分段函数的图像，也可以是函数 $y=\arcsin\sin(\pi x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 的图像. 显然函数

$y=\arcsin\sin(\pi x)(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 与函数 $y=\begin{cases}x, & -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\\ 1-x, & \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1,\\ -1-x, & -1\leqslant x\leqslant-\frac{1}{2};\end{cases}$ 是不同的函数.

北京市 2003 年高校招生理科最后一题是这样出的：

是否存在$[-1,1]$上定义的奇函数 $f(x)$，对任何 $u,v\in[0,\frac{1}{2}]$，都有 $|f(u)-f(v)|<|u-v|$，且对任何 $u,v\in[\frac{1}{2},1]$，都有 $|f(u)-f(v)|=|u-v|$.

你能一眼就看出答案吗？你能体会出该题出得过分简单吗？（提示：考查 $|f(\frac{1}{2})|$）

例 3 **R** 上定义的函数 $f(x)$ 是一一映射. 该函数具有性质：对任何 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(x^2)=f^2(x)$.

(1) 求 $f(0)$；

(2) 判断函数 $f(x)$ 的奇偶性；

(3) 对任何 $x\neq 0$，求证 $x\cdot f(x)>0$.

分析 (1) 取 $x=0$,由 $f(0^2)=f^2(0)$,得到 $f^2(0)=f(0)$,可见 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$. 问题在于 $f(0)$ 的值是两个可能性都有,还是只有一个可能性.

再令 $x=1$,由 $f(1^2)=f^2(1)$,又有 $f(1)=0$ 或 $f(1)=1$. 因为 $f(x)$ 是一一映射,所以 $f(0)\neq f(1)$. 也就是说,若 $f(0)=0$,则 $f(1)=1$;若 $f(0)=1$,则 $f(1)=0$,然而 $f(0)$ 的值仍然没确定.

注意到 $f[(-1)^2]=f^2(-1)=f(1)$,以及 $f(-1)\neq f(1)$ 的特点,则可知 $f(1)\neq 0$,(否则 $f(-1)=0$).

$\therefore f(1)=1\Rightarrow f(0)=0$.

(2) 为判断函数 $f(x)$ 的奇偶性,任取 $x\in\mathbf{R}$,考查 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系.

由一一映射条件知,当 $x\neq 0$ 时,$f(x)\neq f(-x)$. 另一方面,由已知函数性质又知道

$$f^2(x)=f(x^2)=f[(-x)^2]=f^2(-x).$$

$$\therefore |f(x)|=|f(-x)|,$$

$$f(x)=-f(-x).$$

这个关系式显然适合于一切 $x\in\mathbf{R}$. 可见函数 $f(x)$ 是奇函数.

(3) $x\cdot f(x)>0$ 等价于 $x>0$ 时 $f(x)>0$;$x<0$ 时 $f(x)<0$.

任取 $x>0$,$f(x)=f[(\sqrt{x})^2]=f^2(\sqrt{x})\geqslant 0$. 由一一映射及 $f(0)=0$ 知,$x\neq 0$ 时 $f(x)\neq 0$. 可见 $f^2(\sqrt{x})>0$,即 $f(x)>0$.

任取 $x<0$,由已证结论:$f(x)$ 是奇函数以及当 $x>0$ 时 $f(x)>0$ 知,$f(x)=-f(-x)<0$.

综合上述两种情况,$x\cdot f(x)>0$.

思考 一一映射是个重要条件,该条件保证了 $x_1\neq x_2$ 时 $f(x_1)\neq f(x_2)$.

求 $f(0)$ 的过程借助了 $f(0)$,$f(1)$,$f(-1)$ 的连索关系. 实际上我们求出了 $f(0)=0$,$f(1)=1$,$f(-1)=-1$. 运用同样的方法及一一映射条件,进而推出了当 $x>0$ 时 $f(x)>0$,当 $x<0$ 时 $f(x)<0$.

在本题条件下,还可以推出更多有趣结论,例如 $f[f(x^2)]=f^2[f(x)]$,不妨自己推一下.

例 4 函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上,对 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$,都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$. 存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使 $f(x_0)\neq 0$.

(1) 求 $f(0)$;

(2) 求证:对一切 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)>0$;

(3) $f(1)$ 能否有确定的值? $f(1)=f(0)$ 是否可能?

分析 (1) 令 $x_1=x_2=0$,$f(0+0)=f^2(0)$,可推知 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$.

为判断 $f(0)$ 的值是一个还是有两个可能性,仅靠性质 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 不够. 应当利用条件"存在 $x_0\in\mathbf{R}$,$f(x_0)\neq 0$". 由

$$f(x_0)=f(x_0+0)=f(x_0)\cdot f(0),$$

可知 $f(0)\neq 0$(否则,若 $f(0)=0$,则有 $f(x_0)=0$,与已知条件矛盾).

$f(0)\neq 0$,可见 $f(0)=1$.

(2) 容易看出,对任何 $x\in\mathbf{R}$,

$$f(x)=f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)\geqslant 0.$$

为证明 $f(x)>0$，必须证明对任意 $x\in\mathbf{R}$，都有 $f(\frac{x}{2})\neq 0$.

利用已推出的 $f(0)=1$，即是

$$f\left[\frac{x}{2}+(-\frac{x}{2})\right]=f(0)=1,$$

$$\therefore\quad f(\frac{x}{2})\cdot f(-\frac{x}{2})=1,$$

$$\therefore\quad f(\frac{x}{2})\neq 0,$$

$$\therefore\quad f(x)=f^2(\frac{x}{2})>0.$$

(3)$f(1)$ 不能确定，可通过举出合乎题目条件的函数 $f(x)$ 说明 $f(1)$ 不确定.

例如当 $f(x)=2^x$ 时，满足题目全部条件，这时 $f(1)=2$；当 $f(x)=3^x$ 时，也满足题目全部条件，这时又有 $f(1)=3$，因此 $f(1)$ 不确定.

为回答 $f(0)=f(1)$ 是否有可能，仍然可通过举例方式. 例如 $f(x)=1(x\in\mathbf{R})$，显然这个函数满足题目全部条件，并且 $f(0)=f(1)$，所以 $f(0)=f(1)$ 有可能.

思考　函数是从一个数集到另一个数集的映射. 对于满足某种特性的函数，可以采用类比方式与我们熟悉的最基本初等函数相比较，探索出未知函数的某些具体性质. 本题中满足 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 的函数就容易使人联想起指数函数模型.

作为研究题，考虑如下问题是很有趣味的：

“函数 $f(x)$ 定义在有理数集 $\mathbf{Q}$ 上，对任意 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$，且 $f(1)=1$. 是否可推出对一切 $x\in\mathbf{Q}$，都有 $f(x)=1$?”

以下是略解：

第 1 步：$f(0+1)=f(1)=f(0)\cdot f(1)$，$\therefore f(0)=1$；

第 2 步：按本例中证法证出对任何 $x\in\mathbf{Q}$，都有 $f(x)>0$；

第 3 步：证明当 $n\in\mathbf{N}_+$ 时，$f(n)=1$. 事实上，$f(1)=1$，假设 $f(k)=1(k\in\mathbf{N}_+)$，那么 $f(k+1)=f(k)\cdot f(1)=1\Rightarrow f(n)=1(n\in\mathbf{N}_+)$；

第 4 步：证明 $f(-1)=1$. 事实上，

$f(2-1)=f(1)=f(2)\cdot f(-1)$.

根据 $f(1)=f(2)=1$，可知 $f(-1)=1$.

第 5 步：证明对一切 $n\in\mathbf{N}_+$，有 $f(-n)=1$.（证法同于第 3 步）

由第 1,3,5 步知，对一切 $x\in\mathbf{Z}$，$f(x)=1$；

第 6 步：证明对一切 $n\in\mathbf{N}_+$，都有 $f(\frac{1}{n})=1$. 实际上，

由 $f(1)=f(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n})=f^n(\frac{1}{n})=1$ 以及 $f(\frac{1}{n})>0$，知 $f(\frac{1}{n})=1$；

第 7 步：证明对一切 $m,n\in\mathbf{N}_+$，有 $f(\frac{m}{n})=1$. 实际上

$$f(\frac{m}{n})=(\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{m\text{项}})=f^m(\frac{1}{n})=1;$$

第 8 步：证明对一切 $n \in \mathbf{N}_+$，都有 $f(-\frac{1}{n}) = 1$. 事实上，

由 $f(-1) = 1$，即 $1 = f(\underbrace{-\frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \cdots - \frac{1}{n}}_{n项}) = f^n(-\frac{1}{n})$ 及 $f(-\frac{1}{n}) > 0$，

知 $f(-\frac{1}{n}) = 1$；

第 9 步：证明对一切 $m, n \in \mathbf{N}_+$，都有 $f(-\frac{m}{n}) = 1$.

事实上，$f(-\frac{m}{n}) = f(\underbrace{-\frac{1}{n} - \frac{1}{n} - \cdots - \frac{1}{n}}_{m项}) = f^m(-\frac{1}{n}) = 1$.

综上各步所证，对一切 $x \in \mathbf{Q}$，都有 $f(x) = 1$.

这种思考方式是研究性学习、研究性复习方式. 用这种方式复习能真正提高自身的数学水平.

探索是一种科学研究方式，像例 4 中的函数 $f(x)$，推出了 $f(0) = 1$ 后，可以很容易地推出对一切 $x \in \mathbf{R}$，都有 $f(x) \cdot f(-x) = f[x + (-x)] = f(0) = 1$. 探索式研究除了能得出正确结论外，还可以排除某些错误的猜测. 在例 4 中，可能使人联想到 $f(x)$ 的性质与指数函数 $y = a^x$ 类似，因而可能猜测例 4 中给出的函数具有一定的单调性. 这个猜测的错误就是通过举例 $f(x) = 1$ 来否定的.

例 5　定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$，对任何 $x, y \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

(1) 判断函数 $f(x)$ 是否具有奇偶性；

(2) 若函数 $f(x)$ 还有性质：对任何 $x \neq 0$，都有 $xf(x) < 0$，试判断该函数的单调性.

分析　(1) 取 $x = y = 0$，由已知性质知

$$f(0 + 0) = f(0) + f(0),$$

$\therefore$　$f(0) = 0$.

任取 $x \in \mathbf{R}$，由

$$f(0) = f[x + (-x)] = f(x) + f(-x) = 0,$$

$\therefore$　$f(x) = -f(-x)$，该函数为奇函数.

(2) $x \cdot f(x) < 0$ 表明 $x > 0$ 时 $f(x) < 0$；$x < 0$ 时 $f(x) > 0$.

为判断 $f(x)$ 是否有单调性，任取 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$，设 $x_1 > x_2$.

$$f(x_1) = f(x_1 - x_2 + x_2) = f(x_1 - x_2) + f(x_2).$$

因为 $x_1 - x_2 > 0$，所以 $f(x_1 - x_2) < 0$，上式表明 $f(x_1) < f(x_2)$.

根据 $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$（$x_1, x_2$ 为任意实数）知 $f(x)$ 是减函数.

思考　具有性质 $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ 的函数可以考虑函数 $f(x) = kx(k \neq 0)$ 的模型. 当 $k < 0$ 时这个函数就符合题目的全部条件.

推导出 $f(x)$ 是减函数时仅用到 $x > 0$ 时 $f(x) < 0$. 如果利用“$x < 0$ 时 $f(x) > 0$”，也能证出 $f(x)$ 具有递减性，建议读者试试.

还可推出 $f(n) = nf(1)$ 对任何 $n \in \mathbf{N}_+$ 成立.

例 6　函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上，具有如下性质：

(1) 对一切 $x \in \mathbf{R}$，都有 $f(x) = f(-x)$；

(2) 对一切 $x \in \mathbf{R}$,都有 $f(x)=f(2-x)$;

(3) 对一切 $x_1,x_2 \in [0,\frac{1}{2}]$,都有 $f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$;

(4) $f(1)>0$.

求证:对一切 $x \in \mathbf{R}$,都有 $f(x)>0$.

分析 由 $f(x)=f(-x)$ 知函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数;

由 $f(x)=f(2-x)=f[-(2-x)]=f(x-2)$ 知,函数 $f(x)$ 是周期 $T=2$ 的函数.

$f(x_1+x_2)=f(x_1)\cdot f(x_2)$ 并不是一切实数上的等式,仅适于 $x_1,x_2\in[0,\frac{1}{2}]$,为此任取 $x\in[0,1]$,则 $\frac{x}{2}\in[0,\frac{1}{2}]$. 则有 $f(\frac{x}{2}+\frac{x}{2})=f^2(\frac{x}{2})\geqslant 0$,即当 $x\in[0,1]$ 时 $f(x)\geqslant 0$.

因为函数 $f(x)$ 为偶函数,可知当 $x\in[-1,0]$ 时,$-x\in[0,1]$,$f(-x)=f(x)\geqslant 0$. 这表明对一切 $x\in[-1,1]$,都有 $f(x)\geqslant 0$.

因为函数 $f(x)$ 是周期 $T=2$ 的周期函数. 对任意 $x\in\mathbf{R}$,总存在 $k\in\mathbf{Z}$,使得 $x+2k\in[-1,1]$,由此知

$$f(x)=f(x+2k)\geqslant 0.$$

可见对一切 $x\in\mathbf{R}$,都有 $f(x)\geqslant 0$.

以下说明 $f(x)\neq 0$.

假设存在 $x_0\in\mathbf{R}$,使 $f(x_0)=0$,对于这个 x_0,总存在 $k\in\mathbf{Z}$,使得 $x_0+2k\in[-1,1]$,因此 $f(x_0+2k)=0$. 记 $x_0+2k=x'$,$x'\in[-1,1]$. 因为 $f(x)$ 为偶函数,不妨设 $x'\in[0,1]$,$f(x')=0$.

$\because$ $f(1)>0$,$x'\in[0,1)$.

如果 $x'\in[0,\frac{1}{2})$,则 $\frac{1}{2}-x'\in(0,\frac{1}{2}]$. 由

$$f(\frac{1}{2})=f[(\frac{1}{2}-x')+x']=f(\frac{1}{2}-x')\cdot f(x')=0$$

知,对任何 $x\in(\frac{1}{2},1]$,即 $0<x-\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}$,都有

$$f(x)=f\left[(x-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\right]=f(x-\frac{1}{2})\cdot f(\frac{1}{2})=0.$$

特别地 $f(1)=0$,这与已知条件“$f(1)>0$”矛盾,矛盾表明不存在 $x'\in[0,\frac{1}{2})$ 使 $f(x')=0$.

如果 $x'\in[\frac{1}{2},1)$,$f(x')=0$. 由 $0<1-x'\leqslant\frac{1}{2}$,且有

$$f(1)=f[(1-x')+x']=f(1-x')\cdot f(x')=0,$$

又与已知“$f(x)>0$”矛盾. 矛盾表明不存在 $x'\in[\frac{1}{2},1)$ 使 $f(x')=0$.

根据以上两方面的分析,不存在 $x'\in[0,1]$,使 $f(x')=0$.

根据 $f(x)$ 是偶函数,其图像关于 y 轴对称的特点知,也不存在 $x'\in[-1,0]$ 使 $f(x')=0$. 也就是说不存在 $x'\in[-1,1]$,使 $f(x')=0$.

根据 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数的性质以及 $[-1,1]$ 的区间长度为 2 的事实,可知对一

切 $x \in \mathbf{R}$,都有 $f(x) \neq 0$.

由于 $\begin{cases} f(x) \neq 0, \\ f(x) \geqslant 0, \end{cases}$

所以 $f(x) > 0$.

思考 把$[-1,1]$上函数性质利用周期性推广到一切实数上的函数性质,把$[0,\frac{1}{2}]$上函数的性质利用已知条件推广到$[0,1]$上进而又利用偶函数性质推广到$[-1,1]$上的过程是"开拓"性的工作."开拓"中要特别注意题目条件.

证明 $f(x) \neq 0$ 时采用了反证法,实现反证法时也充分利用了已证函数的性质.

1996 年的一个高考试题就带有几分"开拓"性质,把 1996 年的试题提得一般些,那就是

已知函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上,① 它是奇函数;② 对任何 $x \in \mathbf{R}$,都有 $f(x+2)+f(x)=0$;③ 当 $x \in [0,1]$ 时,$f(x)=x$.

很容易用"开拓"的思考方法求出该函数的分段表达式

$$f(x) = \begin{cases} x-4k, & x \in [4k-1,4k+1], \\ 4k+2-x, & x \in [4k+1,4k+3], \end{cases} k \in \mathbf{Z}.$$

该函数的图像如下:

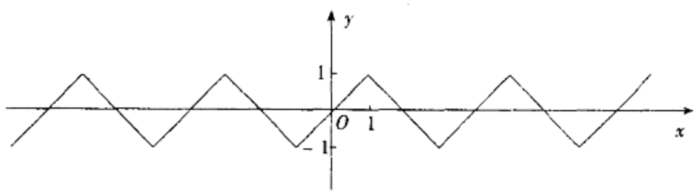


图 1-6

(当时的高考题仅是求 $f(7.5)$).

例 6 有 P,Q 两个命题:

命题 P:函数 $y=c^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数;

命题 Q:关于 x 的不等式 $x+|x-2c|>1$ 的解集为 $\mathbf{R}$.

命题 P,Q 中有且仅有 1 个是正确的,求 c 的取值范围.

分析 先弄清 P 真 Q 假时 c 的取值范围 A_1,再找出 P 假 Q 真时 c 的取值范围 A_2.最后回答 $A_1 \cup A_2$.

P 真 $\Rightarrow 0<c<1$.

Q 假表明,存在 $x \in \mathbf{R}$,使 $x+|x-2c| \leqslant 1$.

考虑函数 $y_1=1-x$,函数 $y_2=|x-2c|$.其中函数 $y_2=|x-2c|$ 的图像与 x 轴交于$(2c,0)$点.函数 $y_1=1-x$ 的图像与 x 轴交于$(1,0)$点(见图 1-7).

使命题 Q 为假命题的 c 的范围是 $2c \leqslant 1, c \leqslant \frac{1}{2}$.

$\therefore P$ 真 Q 假时,c 的取值范围是 $0<c \leqslant \frac{1}{2}$.

再考虑 P 假 Q 真的情形.

P 假 $\Rightarrow c \geqslant 1$.

Q 真，由图 1－7 看出应当有 $2c > 1$，即 $c > \frac{1}{2}$.

$\therefore P$ 假 Q 真时，c 的取值范围是 $c \geqslant 1$.

综上所述，c 的取值范围是 $c \geqslant 1$ 或 $0 < c \leqslant \frac{1}{2}$.

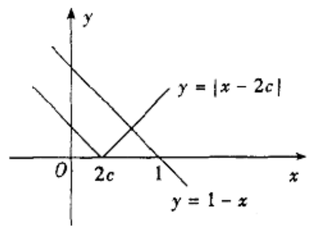


图 1－7

思考　数形结合是个好办法. 利用图 1－7 及不等式 $|x-2c| > 1-x$ 的几何意义很容易看出 $|x-2c| > 1-x$ 对一切 $x \in \mathbf{R}$ 成立的条件是 $c > \frac{1}{2}$. 如果不利用函数 $y_1 = 1-x$ 和函数 $y_2 = |x-2c|$ 的图像求 c 的取值范围就有点难，难在对命题与逻辑关系的理解上.

命题 P 正确 $\Rightarrow 0 < c < 1$，记 $A = \{c \mid 0 < c < 1\}$.

设命题 Q 正确时 c 的取值范围为 B. 问题是求 $(A \cap \complement_{\mathbf{R}} B) \cup (\complement_{\mathbf{R}} A \cap B)$，关键是求 B. 比较自然的办法是“分段寻找”.

当 $x > 1$ 时，不等式 $|x-2c| > 1-x$ 对一切实数 c 恒成立；

当 $x = 1$ 时，不等式 $|x-2c| > 1-x$ 对 $c \neq \frac{1}{2}$ 成立；

当 $x < 1$ 时，不等式 $|x-2c| > 1-x$ 等价于 $x-2c > 1-x$ 或 $x-2c < x-1$，

即是 $c < x - \frac{1}{2}$ 或 $c > \frac{1}{2}$.

设有常数 c 使 $c < x - \frac{1}{2}$ 对一切 $x < 1$ 成立，因此在 $x < 1$ 时只需 $c > \frac{1}{2}$，则不等式 $|x-2c| > 1-x$ 成立.

由 $\begin{cases} c \in \mathbf{R}, \\ c \neq \frac{1}{2}, \\ c > \frac{1}{2}, \end{cases}$ 得 $c > \frac{1}{2}$.

$\therefore\ B = \left\{c \mid c > \frac{1}{2}\right\}$.

P，Q 中有且仅有一个正确时，c 的取值范围是 $\left(\{c \mid 0 < c < 1\} \cap \left\{c \mid c \leqslant \frac{1}{2}\right\}\right) \cup \left(\{c \mid c \geqslant 1 \text{ 或 } c \leqslant 0\} \cap \left\{c \mid c > \frac{1}{2}\right\}\right) = \left\{c \mid 0 < c \leqslant \frac{1}{2} \text{ 或 } c \geqslant 1\right\}$.

例 7　$a > 1$，函数 $f(x) = a^x + \frac{x-2}{x+1}$　$(x \neq -1)$. 是否存在 $x_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$，使 $f(x_0) = 0$. 如果存在，x_0 的值是否惟一？如果不存在，理由是什么？

分析　函数 $f(x) = a^x + \frac{x-2}{x+1}$ 定义在 $(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ 上. 该函数由 $y_1 = a^x$，$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$，$y_2 = \frac{x-2}{x+1}$，$x \in (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$ 相加而形成. 为研究函数 $y = f(x)$ 的性质，应分别研究 y_1，y_2 两个函数的性质.

在 $(-\infty, -1)$ 上，函数 $y_1 = a^x (a > 1)$，$y_2 = \frac{x-2}{x+1} = 1 - \frac{3}{x+1}$ 都是增函数，且 $a^x > 0$，