

///

● 高等学校教材

电磁场与电磁波

杨儒贵



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容简介

本书是为普通高等学校本科电子信息类专业基础课“电磁场与电磁波”编写的教材,主要介绍电磁场与电磁波的基本特性及规律,内容侧重于时变电磁场。基于亥姆霍兹定理逐一论述电磁场是本书与众不同的重要特色。全书共分10章:矢量分析,静电场,静电场的边值问题,恒定电流场,恒定磁场,电磁感应,时变电磁场,平面电磁波,导行电磁波和电磁辐射及原理等。书中列举了很多例题,并在每章之后附有一定数量的思考题和习题。同时还介绍了有关电磁场与电磁波的工程应用实例。附录中给出了电磁物理量的符号、单位及量纲,SI单位的倍数单位,矢量恒等式,正交曲面坐标系, δ 函数,贝塞尔函数、勒让德函数和电磁波的波段划分及其主要应用等。

本书作者长期从事电磁场与电磁波的教学与科研工作,具有丰富的教学经验和科研阅历。全书内容精练、条理清晰、论证严谨、文字流畅,是一本颇具特色的教材。

为本书建立的网站是

<http://lxy.swjtu.edu.cn/emi/books/emfw/emfw.asp>

本书可供高等学校电子信息类专业本科生,以及相关专业的研究生和科技人员阅读。

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波/杨儒贵. —北京:高等教育出版社,2003.8

ISBN 7-04-011893-9

I. 电... II. 杨... III. ①电磁场—高等学校—教材②电磁波—高等学校—教材 IV. 0441.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第018612号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经 销	新华书店北京发行所		
排 版	高等教育出版社照排中心		
印 刷	北京中科印刷有限公司		
开 本	787×960 1/16	版 次	2003年8月第1版
印 张	20.75	印 次	2003年8月第1次印刷
字 数	390 000	定 价	24.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究



作者简介

作者毕业于西安交通大学无线电工程系。曾任西安交通大学助教、讲师、副教授，西南交通大学电磁所所长，现任西南交通大学教授、博士生导师。曾赴美国著名的高等学府伊利诺大学(University of Illinois at Urbana - Champaign)访问并工作六年。长期以来，主要从事电磁理论、天线理论与设计、卫星定位及通信的教学与科研工作。主持过有关移动通信天线、卫星定位天线、电磁散射、柱面天线阵分析与综合及微波透波和吸波材料等多项国家级项目的研究。近年来，在国内外权威刊物及重要国际会议上发表了数十篇论文。

先后担任过本科生、硕士生及博士生的教学工作。撰写了《电磁场与波》本科生教材和《电磁理论中的辅助函数》及《电磁定理和原理及其应用》两本专著。此外，还与陈达章、刘鹏程合编了全国研究生统编教材《电磁理论》。

在美国伊利诺大学工作期间，设计的嵌入式及堆叠式微带天线获美、日专利，其中有关嵌入式微带天线的论文荣获美国导航学会最佳论文奖。曾荣获西安交通大学优秀教师称号和优秀教学奖，西南交通大学宏宇优秀教师奖和铁道部首届詹天佑科技发展奖。现任中国电子学会天线分会委员。享受国务院颁发的政府特殊津贴。

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 82028899 转 6897 (010)82086060

传真：(010) 82086060

E-mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务部

邮编：100011

购书请拨打读者服务部电话：(010)64054588

策 划	刘激扬
编 辑	曲文利
封面设计	王凌波
责任绘图	朱 静
版式设计	胡志萍
责任校对	刘 莉
责任印制	宋克学

前 言

本书是为普通高等学校电子信息类专业基础课“电磁场与电磁波”编写的本科生教材,主要介绍电磁场与电磁波的基本特性及规律,内容侧重于时变电磁场。随着信息技术的飞速发展,要求从事电子信息技术的人员必须通晓和掌握电磁场与电磁波的基本特性、分析方法及其应用。因此,本课程是电子信息类专业本科学生必须具备的知识结构的重要组成部分之一。

我们知道,静止电荷周围存在一种效应,它表现为对带电体有力的作用,这种效应是由于电荷周围存在一种称为**电场**的物质产生的。在运动电荷或电流周围,除电场之外还存在另一种不同的场,它表现为对于磁铁和载流导体有力的作用,这种物质称为**磁场**。由此可见,电场和磁场都是以力的现象表现的。力是矢量,因此,电场和磁场都是矢量场。当电荷的电荷量及其位置均不随时间变化时,它产生的电场也不随时间变化,这种电场称为**静电场**。当运动电荷的电荷量及速度保持恒定时,它形成的电流也是恒定的,这种恒定电流产生的磁场也不随时间变化,这种磁场称为**恒定磁场**。如果电荷及电流均随时间改变,它们产生的电场及磁场也是随时变化的,而且人们发现时变的电场与时变的磁场可以相互转化,但是两者不可分割,它们构成统一的**时变电磁场**。时变电场与时变磁场之间的相互转化作用,在空间形成了**电磁波**,时变电磁场的能量就是以这种电磁波形式进行传播的。静电场与恒定磁场相互无关、彼此独立,可以分别进行研究。因此,本书先讨论静电场和恒电磁场,然后再介绍时变电磁场。

电磁场与电磁波虽然不能亲眼所见,但它是客观存在的一种物质,因为它具有物质的两种重要属性:能量和质量。众所周知,光是一种电磁波,太阳光的辐射压力和巨大能量充分说明了电磁场与电磁波具有质量及能量。但是,电磁场与电磁波的质量极其微小,因此,通常仅研究电磁场与电磁波的能量特性。

电磁场与电磁波既然是一种物质,它的存在和传播无需依赖于任何媒质。在没有物质存在的真空环境中,电磁场与电磁波的存在和传播会感到更加“自由”。因此对于电磁场与电磁波来说,真空环境通常被称为“自由空间”。当空间存在媒质时,在电磁场的作用下媒质中会发生极化与磁化现象,结果在媒质中又产生二次电场及磁场,从而改变了媒质中原先的场分布,这就是场与媒质的相互作用现象。为了研究方便起见,我们先介绍真空中的电磁场,然后再讨论媒质中的电磁场。

已知静止电荷产生电场,运动电荷或电流除产生电场外,还产生磁场,可见

电荷及电流是产生电磁场的源。应该指出,电荷及电流也是产生电磁场惟一的源。截止目前,人们尚未发现自然界中有磁荷及磁流存在。然而,有时引入磁荷及磁流的概念是十分有益的,但是,它们仅是假想的。研究场与源的关系是电磁理论的基本问题之一。我们将要介绍一系列数学方程描述场与源,以及场与媒质特性之间的关系。

现在,对于电磁现象的基本规律已经有了充分的认识,但是,人们认识这些规律经过了漫长的岁月和艰苦的历程。早在公元前 600 年希腊人就发现了摩擦后的琥珀能够吸引微小物体;公元前 300 年我国发现了磁石吸铁的现象;公元初我国制成的世界上第一个指南针是古代中国四大发明之一。后来,人们发现了地球磁场的存在。1785 年法国科学家库仑(1736—1806)通过实验创建了著名的**库仑定律**,该定律描述了两个微小带电体之间的作用力与其电荷量及间距的关系。1820 年丹麦人奥斯特(1777—1851)发现了电流产生的磁场。同年法国科学家安培(1775—1836)计算了两个电流之间的作用力。1831 年英国科学家法拉第(1791—1867)发现电磁感应现象,创建了**电磁感应定律**,说明时变磁场可以产生时变电场。1873 年英国科学家麦克斯韦(1831—1879)提出了位移电流的假设,认为时变电场可以产生时变磁场,并以严格的数学方程描述了电磁场应该遵循的统一规律,这就是著名的**麦克斯韦方程**。该方程说明了时变电场可以产生时变磁场,同时又表明时变磁场可以产生时变电场,因此麦克斯韦预言电磁波的存在,后来在 1887 年被德国物理学家赫兹(1857—1894)的实验所证实。在这个基础上,俄国的波波夫及意大利的马可尼于 19 世纪末先后发明了用电磁波作为媒体传输信息的技术,为逐步实现当今的无线通信、广播、雷达、遥控遥测、微波遥感、无线因特网、无线局域网、卫星定位以及光纤通信等信息技术奠定了基础。这些新技术的广泛应用又促进了电磁理论的发展。随着大容量的高性能及高速度计算机出现,不但解决了很多电磁理论的计算问题,同时也萌生了计算电磁场与波的新方法,从而形成计算电磁学的新学科,它是现代电磁学的重要分支。

电磁场是矢量场。为了研究电磁场特性,经常应用的基本数学工具是矢量运算及分析。因此,本书第一章综述了矢量分析的主要概念、定理、公式及其应用;第二章介绍静电场;第三章介绍静电场的边值问题;第四章介绍恒定电流场;第五章介绍恒定磁场;第六章介绍电磁感应;第七章介绍时变电磁场;第八章介绍平面电磁波;第九章介绍导行电磁波;第十章介绍电磁辐射及原理。第一章是数学基础,第二、三、四、五章为静态场,第七、八、九、十章为时变场,第六章通过电磁感应定律建立了电场与磁场的联系,从而导出了时变电磁场。最后在附录中给出了电磁物理量的符号、单位与量纲,SI 单位的倍数单位,矢量恒等式,正交曲面坐标系, δ 函数,柱贝塞尔函数,勒让德函数以及电磁波波段的划分及其

主要应用等。

由上可知,本书介绍的时变电磁场内容极为丰富。此外,在阐明基本理论的同时,还列举了很多工程应用实例和自然界中的电磁现象。为了培养学生分析与解决问题的能力以及进一步理解所述的基本理论,书中给出了很多例题,并在每章之后附有一定数量的思考题和习题。为了读者阅读醒目起见,书中重要名词、定理、概念和结论等皆以黑体表示。为了便于教学,编纂了题解,制作了电子教案。题解编入教学指导书,电子教案录入光盘。为了读者查阅方便,书末备有重要名词索引。对于内容较多或较深的部分章节加注了“*”号,使用者可以根据具体情况进行适当简化和取舍。

本书采用国际单位制(SI)。在电磁学中,这种单位制的四个基本单位是:长度单位为 m(米),质量单位为 kg(千克),时间单位为 s(秒),电流单位为 A(安)。对于正弦电磁场使用的时间因子为 $e^{i\omega t}$ 。

关于“电磁场与电磁波”课程的本科生教材国内外版本很多。从内容安排和体系上来看,大致分为两种类型。一种可称为**归纳法**。它由库仑定律、毕奥-萨伐定律及法拉第电磁感应定律出发,逐一介绍静电场、恒定磁场和时变电磁场,其推理方向是由特殊到一般。这种传统体系起点较低,比较容易接受。但与物理学中电学部分重复太多,学生甚感厌烦。同时,从这些基本定律出发,逐一推演静态场的特性必然费时很多,导致时变场内容受到压缩。另一种可称为**演绎法**。它从麦克斯韦方程出发,先论述时变电磁场,然后把静态场归结为时变场的一种特殊情况加以演绎,最后再介绍静态场,其推理方向是由一般到特殊。这种体系虽然压缩了静态场,充实了时变场内容,但起点过高,学生不易接受。我国电磁理论学术前辈,教育部工科电磁场理论教材编审组成员、西安交通大学教授黄席椿先生于1985年提出,应从论述矢量场散度和旋度特性的亥姆霍兹定理出发,将电磁场的散度和旋度作为电磁场的首要问题,逐一论述电磁场。这种新颖体系既避免了归纳法与物理学重复,又没有演绎法起点过高的缺陷。而且对于电磁场的特性分析以及场与源之间的内在联系,给予十分严格的阐述。由于静态场的论述非常简洁严谨,节省的篇幅让给了时变场。遵循黄席椿教授的创新思路,作者在西安交通大学任教时与该校汪文秉教授、章锡元教授共同编写了《电磁场与波》讲义。经本人两次试用后,统编形成了正式教材。又经数次使用和修订,最后由西安交通大学出版社1989年出版。

本书是根据1989年版本重新编写的,因此基本特色与前相同。但是鉴于当前本科生专业面拓宽,各门课程学时减少的情况,将传输线、等效源原理及几何光学原理等删除,同时增加了电磁场与波在当前信息技术领域中新的应用。

在本书编写过程中,西南交通大学电磁所刘运林副教授及王敏锡副教授协助编制了题解和电子教案。同时,研究生官正涛、陈凯亚、张双文共同演算了书

中全部习题。全书完稿后,西安交通大学汪文秉教授仔细审阅了全稿,并提出很多宝贵建议,进一步提高了本教材的素质。作者在此一并表示衷心的感谢。

承蒙高等教育出版社的编辑作了大量的审编工作,作者表示深切的谢意。

由于作者水平有限,书中定有不妥之处,敬请广大读者提出宝贵意见。

为本书建立的网站是

<http://lxy.swjtu.edu.cn/emi/books/emfw/emfw.asp>

网站中设有论坛专栏,这是一个互动式教与学的研讨平台,热烈欢迎广大读者踊跃登录参与。网站中还没有作者专栏,作者将实时地在此网站上发布有关本书的信息。

作者于西南交通大学

2002年5月1日

目 录

第一章 矢量分析	1
1-1 标量与矢量	1
1-2 矢量的代数运算	2
1-3 矢量的标积	3
1-4 矢量的矢积	4
1-5 标量场的方向导数与梯度	5
1-6 矢量场的通量、散度与高斯定理	8
1-7 矢量场的环量、旋度与斯托克斯定理	12
1-8 无散场与无旋场	16
1-9 格林定理	18
1-10 矢量场的惟一性定理	19
1-11 亥姆霍兹定理	21
1-12 正交曲面坐标系	23
思考题	30
习题	31
第二章 静电场	33
2-1 电场强度、电通及电场线	33
2-2 真空中的静电场方程	34
2-3 电位与等位面	43
2-4 介质极化	44
2-5 介质中的静电场方程	48
2-6 两种介质的边界条件	51
2-7 介质与导体的边界条件	53
2-8 电容与部分电容	56
2-9 电场能量	58
2-10 电场力	62
思考题	66
习题	66
第三章 静电场的边值问题	71
3-1 电位微分方程	71
3-2 电位微分方程解的惟一性	74
3-3 镜像法	75
3-4 直角坐标系中的分离变量法	81

* 3-5 圆柱坐标系中的分离变量法	85
* 3-6 球坐标系中的分离变量法	88
思考题	92
习题	93
第四章 恒定电流场	97
4-1 电流及电流密度	97
4-2 电动势	99
4-3 电流连续性原理	102
4-4 恒定电流场的边界条件	103
4-5 恒定电流场的能量损耗	104
* 4-6 恒定电流场与静电场的比拟	107
思考题	109
习题	110
第五章 恒定磁场	112
5-1 磁感应强度、磁通及磁场线	112
5-2 真空中的恒定磁场方程式	114
5-3 矢量磁位与标量磁位	119
5-4 媒质磁化	120
5-5 媒质中的恒定磁场方程式	124
5-6 恒定磁场的边界条件	126
思考题	130
习题	131
第六章 电磁感应	135
6-1 电磁感应定律	135
6-2 自感与互感	137
6-3 磁场能量	141
6-4 磁场力	145
思考题	149
习题	150
第七章 时变电磁场	153
7-1 位移电流	153
7-2 麦克斯韦方程	155
7-3 时变电磁场的边界条件	157
7-4 标量位与矢量位	160
7-5 位函数方程的求解	162
7-6 能量密度与能流密度矢量	165
7-7 惟一性定理	167
7-8 正弦电磁场	168

7-9 麦克斯韦方程的复数形式	169
7-10 位函数的复数形式	170
7-11 能量密度与能流密度矢量的复数形式	171
思考题	175
习题	175
第八章 平面电磁波	178
8-1 波动方程	178
8-2 理想介质中的平面波	179
8-3 导电媒质中的平面波	184
8-4 平面波的极化特性	189
8-5 平面边界上平面波的正投射	193
8-6 多层边界上平面波的正投射	198
8-7 任意方向传播的平面波	202
8-8 理想介质边界上平面波的斜投射	204
8-9 无反射与全反射	208
*8-10 导电媒质表面上平面波的斜投射	212
8-11 理想导体表面上平面波的斜投射	215
*8-12 等离子体中的平面波	217
*8-13 铁氧体中的平面波	221
思考题	223
习题	223
第九章 导行电磁波	227
9-1 TEM波、TE波及TM波	228
9-2 矩形波导中的电磁波方程式	231
9-3 矩形波导中电磁波的传播特性	234
9-4 矩形波导中的 TE_{10} 波	237
*9-5 电磁波的群速	242
*9-6 圆波导	245
9-7 波导中的传输功率与传输损耗	251
9-8 谐振腔	253
9-9 同轴线	258
思考题	260
习题	260
第十章 电磁辐射及原理	263
10-1 电流元辐射	263
10-2 天线的方向性	268
10-3 对称天线辐射	271
10-4 天线阵辐射	273

10-5 电流环辐射	277
10-6 对偶原理	280
10-7 镜像原理	282
10-8 互易原理	286
10-9 惠更斯原理	289
10-10 面天线辐射	292
思考题	297
习题	298
附 录	300
一、符号、单位及量纲	300
二、SI 单位的倍数单位	302
三、矢量恒等式	302
四、正交曲面坐标系	303
五、 δ 函数	305
六、柱贝塞尔函数	306
七、勒让德函数	309
八、电磁波的波段划分及其主要应用	311
索 引	313
参考文献	319

第一章 矢量分析

在前言中已经指出,电磁场是矢量场,因此,矢量分析是研究电磁场特性的基本数学工具之一。本章将系统地叙述有关矢量分析的主要内容。我们首先在直角坐标系中讨论矢量的定义,矢量的代数运算以及矢量的微分与积分运算,然后根据圆柱坐标系及球坐标系与直角坐标系的变量之间的关系,推导出圆柱坐标系及球坐标系中的矢量表示及其运算规则。在这一章中,还要介绍矢量分析中几个重要定理,即高斯定理、斯托克斯定理、格林定理、惟一性定理及亥姆霍兹定理。

1-1 标量与矢量

仅具有大小特征的量称为标量。例如长度、面积、体积、温度、气压、密度、能量及电位等物理量都是标量。不仅具有大小而且具有方向特征的量称为矢量。例如:力、位移、速度、加速度、电场强度及磁场强度等物理量都是矢量。本书以黑斜体表示矢量。标量的空间分布构成标量场,矢量的空间分布构成矢量场。

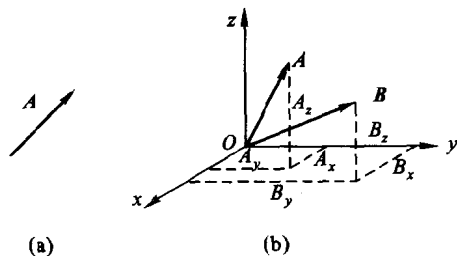


图 1-1-1 矢量的表示

矢量 A 的几何表示是一条有向线段,如图 1-1-1(a)所示,线段的长度表示矢量 A 的大小,其指向表示矢量 A 的方向。在直角坐标系中,若把代表矢量 A 和 B 的有向线段的始端放在坐标系的原点,如图 1-1-1(b)所示,则不同的矢量,其终端坐标不同。矢量 A 的终端坐标为 (A_x, A_y, A_z) ; 矢量 B 的终端坐标为 (B_x, B_y, B_z) ; 通常, A_x, A_y, A_z 称为矢量 A 的三个相应的坐标分量; B_x, B_y, B_z 称为矢量 B 的三个相应的坐标分量。由此可见,在三维空间中,一个矢量可用其三个坐标分量来表示。反之,三个标量可用一个矢量来代替。这正是

矢量运算比标量运算简洁的原因。当然,表示一个矢量的三个标量并不是任意的,它们必须是矢量的三个坐标分量。用三个坐标分量表示一个矢量称为三维空间矢量的代数表示。可以推知,在二维空间中,一个矢量仅需要两个坐标分量来表示,而在一维空间中,一个矢量仅需要一个坐标分量。

通常,矢量的大小及方向均随空间坐标而变化,若矢量的大小及方向均与空间坐标无关,这种矢量称为常矢量。

1-2 矢量的代数运算

当矢量 A 与矢量 B 的大小及方向均相同时,则认为 $A = B$ 。因此在同一坐标系中,只有当两个矢量的各个相应坐标分量均相同时,才可认为两个矢量相等。

矢量可以进行加法运算,且加法运算符合结合律和交换律,即

$$\text{结合律} \quad (A + B) + C = A + (B + C) \quad (1-2-1)$$

$$\text{交换律} \quad A + B = B + A \quad (1-2-2)$$

两个矢量相减可以归结为相加运算,例如

$$A - B = A + (-B) \quad (1-2-3)$$

式中 $-B$ 表示与矢量 B 大小相等方向相反的矢量。矢量运算的几何表示如图 1-2-1 所示。在同一个坐标系中,两个矢量的加减运算就是对应坐标分量的相加和相减。例如在直角坐标系中,若矢量 A 的坐标分量为 (A_x, A_y, A_z) , 矢量 B 的坐标分量为 (B_x, B_y, B_z) , 则 $A + B = C$ 的合成矢量的坐标分量为 $(A_x + B_x, A_y + B_y, A_z + B_z)$ 。

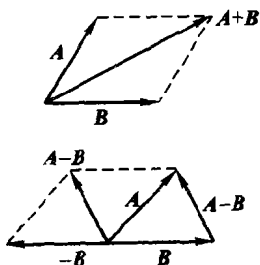


图 1-2-1 矢量加减

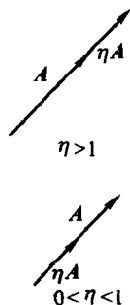


图 1-2-2 矢量与标量相乘

矢量与标量之间可以进行乘法运算。当矢量 A 与正标量 η 相乘时,其乘积仍然是一个矢量,但各个坐标分量乘以 η 倍,即乘积 ηA 的坐标分量为 $(\eta A_x, \eta A_y, \eta A_z)$ 。可见,若 $\eta > 1$,则乘积矢量伸长;若 $0 < \eta < 1$,则乘积矢量缩短,如图

1-2-2 所示。可见矢量与正标量相乘时,仅矢量的大小发生改变,其方向仍然保持不变。显然,矢量与负标量相乘时,不仅大小发生改变,其方向也恰好反转。

矢量之间的乘法运算与标量之间,以及标量与矢量之间的乘法运算规则截然不同,矢量之间的乘法运算有两种形式:标积和矢积。

1-3 矢量的标积

两个矢量的标积又称为点积或内积,以点号“ \cdot ”表示。在直角坐标系中,若矢量 \mathbf{A} 的坐标分量为 (A_x, A_y, A_z) , 矢量 \mathbf{B} 的坐标分量为 (B_x, B_y, B_z) , 则矢量 \mathbf{A} 与矢量 \mathbf{B} 标积的代数定义为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \quad (1-3-1)$$

由此可见,两个矢量的标积是一个标量。显然,矢量标积的运算符合交换律,即

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \quad (1-3-2)$$

根据矢量标积的定义得知,矢量 \mathbf{A} 与其本身的标积为

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \quad (1-3-3)$$

显然, $\sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$ 为矢量 \mathbf{A} 的大小。矢量的大小称为矢量的模,以绝对值符号 $|\mathbf{A}|$ 或白体 A 表示,即

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1-3-4)$$

矢量模为 1 的矢量称为单位矢量。任一矢量 \mathbf{A} 可写成

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

根据矢量与标量的乘法规则,得知上式中矢量 $\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ 的直角坐标分量为

$$\left[\frac{A_x}{|\mathbf{A}|}, \frac{A_y}{|\mathbf{A}|}, \frac{A_z}{|\mathbf{A}|} \right]$$

由于 $\sqrt{\left[\frac{A_x}{|\mathbf{A}|} \right]^2 + \left[\frac{A_y}{|\mathbf{A}|} \right]^2 + \left[\frac{A_z}{|\mathbf{A}|} \right]^2} = 1$, 可见矢量 $\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$ 的模为 1, 所以矢量 $\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$

称为矢量 \mathbf{A} 的单位矢量,以 e_a 表示,即

$$e_a = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \quad (1-3-5)$$

由此得

$$\mathbf{A} = |\mathbf{A}| e_a \quad (1-3-6)$$

式中 e_a 是矢量 \mathbf{A} 的单位矢量,其模为 1,方向与 \mathbf{A} 相同。式(1-3-6)表明,任一矢量等于该矢量的模与其单位矢量的乘积。

若 e_x, e_y, e_z 分别表示 x 轴、 y 轴、 z 轴方向上的单位矢量, 则矢量 A 在三个坐标轴上的投影分别为 $A_x e_x, A_y e_y, A_z e_z$, 那么矢量 A 为三个坐标轴上投影的合成矢量, 即

$$A = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z \quad (1-3-7)$$

而矢量 A 的单位矢量 e_a 可表示为

$$e_a = \frac{A_x}{|A|} e_x + \frac{A_y}{|A|} e_y + \frac{A_z}{|A|} e_z \quad (1-3-8)$$

或者写为

$$e_a = e_x \cos \alpha + e_y \cos \beta + e_z \cos \gamma \quad (1-3-9)$$

式中角度 α, β, γ 分别为矢量 A 与坐标轴 x, y, z 的夹角, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 称为矢量 A 的方向余弦。

矢量标积的几何意义如图 1-3-1 所示。

设 $A = |A| e_x, B = B_x e_x + B_y e_y$, 若矢量 B 与 x 轴的夹角为 θ , 则

$$B_x = |B| \cos \theta \quad B_y = |B| \sin \theta$$

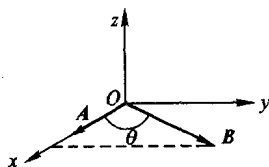


图 1-3-1 矢量的标积

那么由式(1-3-1)得

$$A \cdot B = |A| |B| \cos \theta \quad (1-3-10)$$

式中 $|B| \cos \theta$ 是矢量 B 在矢量 A 方向上的投影大小, $|A| \cos \theta$ 是矢量 A 在矢量 B 方向上的投影大小。式(1-3-10)表明, 标积 $A \cdot B$ 等于矢量 A 的模与矢量 B 在矢量 A 的方向上的投影大小的乘积, 或者说等于矢量 B 的模与矢量 A 在矢量 B 的方向上的投影大小的乘积。显然

$$A \cdot B = \begin{cases} 0 & A \perp B \\ |A| |B| & A // B \end{cases}$$

1-4 矢量的矢积

矢量的矢积又称为叉积或外积, 以叉号“ \times ”表示。在直角坐标系中, 若矢量 A 和矢量 B 分别为:

$$\begin{cases} A = A_x e_x + A_y e_y + A_z e_z \\ B = B_x e_x + B_y e_y + B_z e_z \end{cases}$$

则矢量 A 与矢量 B 矢积的代数定义可用行列式表示为

$$A \times B = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (1-4-1)$$

由此可见,两个矢量的矢积仍然是一个矢量。矢量之间的矢积运算不符合交换律。读者根据定义可以证明:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A}) \quad (1-4-2)$$

矢量矢积的几何意义如图 1-4-1 所示。

设矢量 $\mathbf{A} = |\mathbf{A}|e_x$, 矢量 $\mathbf{B} = B_x e_x + B_y e_y$, 若矢量 \mathbf{A} 与矢量 \mathbf{B} 之间的夹角为 θ , 则由式(1-4-1)得

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = e_z |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta \quad (1-4-3)$$

可见,矢量 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ 的方向与矢量 \mathbf{A} 及矢量 \mathbf{B} 垂直, 且由矢量 \mathbf{A} 旋转到矢量 \mathbf{B} , 并与矢量 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ 构成

右旋关系, 矢量 $(\mathbf{A} \times \mathbf{B})$ 的大小为 $|\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta$ 。图 1-4-1 矢量的矢积显然

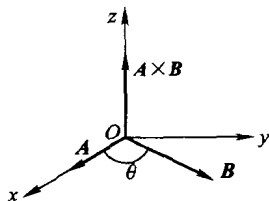


图 1-4-1 矢量的矢积

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \begin{cases} 0 & \mathbf{A} // \mathbf{B} \\ |\mathbf{A}| |\mathbf{B}| & \mathbf{A} \perp \mathbf{B} \end{cases} \quad (1-4-4)$$

1-5 标量场的方向导数与梯度

标量场中各点标量的大小可能不等, 因此某点标量沿着各个方向的变化率可能不同。为了描述标量场的这种变化特性, 通常引入方向导数的概念。标量场在某点的方向导数表示标量场自该点沿某一方向上的变化率。

如图 1-5-1 所示, 标量场 Φ 在 P 点沿 l 方向上的方向导数 $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial l} \right|_P$ 定义为

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial l} \right|_P = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Phi(P') - \Phi(P)}{\Delta l} \quad (1-5-1)$$

式中 Δl 为 P 点与 P' 点之间的距离。

在直角坐标系中, 方向导数 $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial l} \right|_P$ 可写为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial l} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial l} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial l}$$

若矢量 l 的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$, 则上式变为

$$\frac{\partial \Phi}{\partial l} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos \gamma \quad (1-5-2)$$

若令 $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)$ 为矢量 \mathbf{G} 的三个坐标分量, 即

$$\mathbf{G} = e_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + e_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + e_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \quad (1-5-3)$$

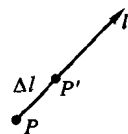


图 1-5-1 方向导数