概率论 数理统计 与随机过程

钱能生 杜桂莲 编著

华南理工大学出版社

概率论、数理统计与随机过程

钱能生　杜桂莲　编著

華南理工大學出版社
·广州·

图书在版编目(CIP)数据

概率论、数理统计与随机过程/钱能生,杜桂莲编著.—广州:华南理工大学出版社,2003.7
ISBN 7-5623-1930-8

Ⅰ.概… Ⅱ.①钱…②杜… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 ③随机过程-高等学校-教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 025686 号

总 发 行:华南理工大学出版社
(广州五山华南理工大学 17 号楼,邮编 510640)
发行部电话:020-87113487 87111048(传真)
E-mail: scut202@scut.edu.cn
http://www2.scut.edu.cn/press
责任编辑:欧立局
印 刷 者:广东农垦印刷厂
开 本:850×1168 1/32 **印张**:13.5 **字数**:300 千
版 次:2003 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
印 数:1~3 500 册
定 价:20.00 元

序　言

概率论与数理统计是从数量上研究随机现象客观规律的一门数学学科，是近代数学的重要组成部分。现在概率论与数理统计已广泛应用于自然科学、社会科学、工程技术、工农业生产和军事技术中，并且正广泛地与其他学科相互渗透与结合，成为近代航天航空理论、近代经济理论、管理科学等学科的应用与研究的重要工具，也是科学家、工程技术人员和经济管理人员最常用的工具。因此它也必定成为理工科（甚至文科）的一门必修基础课。

概率论与数理统计和其他数学分支一样，是由实践的需要而产生的。它的某些思想在公元前 220 年就已出现于我国的文献里。古代我国的人口调查、天文观测就应用了统计方法，而系统的研究被公认为从 17 世纪中叶开始。1654 年法国有个叫 De Mere 的赌徒向数学家 Pascal（1623—1662）提出了一个如何分赌注的问题。简略地说，就是甲、乙两个赌徒分别下了 a 个单位和 b 个单位的赌注，并按某种方式赌了起来，规定甲胜一局甲就得一分，乙胜一局乙也得一分，且谁先得到某个确定的分数谁就赢得所有赌注（$a+b$）。但在谁也没有获得规定的分数时赌博因故中止了。如果甲需得 n 分而乙需得 m 分才能赢得所有（$a+b$）赌注，问该如何“公平”地分这些赌注？为解决这一难题，Pascal 与当时著

名数学家 Fermat（1601—1665）建立了联系，从而使当时很多有名的数学家对这一类问题产生了浓厚的兴趣，他们的研究成果使得概率论这个新领域得到了迅速的发展。我们应该永远记住对概率论的发展作出杰出贡献的人物。他们是：17—18 世纪的 Huygens、Bernoulli、De Moivre、Simpson、Buffon，19 世纪的 Laplace、Gauss、Poisson、Chebyshev、Markov，20 世纪的 Kolmogorov、Khintchine、K. Itô 等等。需要指出的是，尽管在古典概型的叙述中有许多关于赌博的语言或例子，但决不能说只是由赌博的需要才产生概率论的，因为当时对测量误差、社会保险等问题的研究提出了这种需要，因此才有许多人从事这方面理论的研究。把赌博当作一种最简单的随机现象模型，因为它的机会均等性使问题提得简单明确，它的直观性又像几何直观一样能帮助人们逻辑思考。一句话，是借助它的简单性、生动性和有趣性来吸引学子们的学习兴趣和热情。

本书是为高等院校本专科学生学习概率论与数理统计而编著的教材，撰写过程中参考了教育部 1980 年颁发的《概率论与数理统计教学大纲》。为适应目前授课时数少、学生学习负担重的特点，本书力求做到：概念引入时背景直观，材料生动、丰富，理论推导严谨，同时注意实际方面的应用。另外，本书还力求做到学生只需具有高等数学（微积分部分）的知识就可阅读和自学，学生在能独立完成每章后面少量精选的习题后就能基本上掌握该章所学知识。

自 20 世纪 30 年代 Kolmogorov 奠定概率论的严格数学基础以来，概率论这一古老的学科正一日千里地向前发展，

囿于本书的篇幅而不能提及一二，深为憾事。

本书亦是笔者几十年教概率、统计和随机过程的一个总结。书中如有错讹或不妥之处，敬请专家、同仁，请读者们指正。

编著者

2003 年 1 月于江门

目 录

第 1 章　随机事件及其概率

1.1　随机事件

1.1.1　随机现象

在现实世界中，我们经常碰到两类不同的现象：一类是确定性现象，即在一定条件下，必然会发生某一种结果或必然不发生某一种结果的现象；另一类是所谓随机现象，即在同样条件下，多次进行同一试验，所得结果并不完全一样，而且事先不能预知将会发生什么结果的现象. 比如：

例 1　纯水在一个大气压下加热到100℃就沸腾.

例 2　同性电荷必然互相排斥.

例 3　抛一枚均匀硬币，必往下落.

例 4　抛一枚均匀硬币，落下后，可能正面向上，也可能反面朝上.

例 5　在一副扑克牌中，任取一张，可能是黑桃 A 或者

红桃 K，也可能是方块 8 或梅花 Q 等 54 种不同的结果.

例 6 在某厂的一批产品中，随机抽取 4 件进行检查，抽到的次品数可能是 0，1，2，3，4.

其中例 1、2、3 是确定性现象，例 4、5、6 是随机现象.

随机现象虽然在相同的条件下可能的结果不止一个，以及每次事前不能准确预知哪一种结果会出现，但是经过长期的观察与实践，人们逐渐发现所谓随机现象不可预知只是对一次或少数几次观察与实践而言，当在相同条件下进行大量的观察与实践时，不确定性现象的每个可能结果都呈现出某种规律性. 例如，多次抛一枚均匀硬币，正、反面出现的次数接近相等，而且试验次数越多，正、反面出现的次数越接近，即出现正面的次数与试验的总次数之比愈来愈接近 0.5. 据载，历史上许多大统计学家都曾不厌其烦地进行过这种试验：

实验者	实验次数	正面出现的次数	正面频率
De Mogan	2048 次	1061 次	0.518
Buffon	4040 次	2048 次	0.5069
Pearson	24000 次	12012 次	0.5005
Wiener	30000 次	14994 次	0.4998

又如，用同一测高仪对某一高山进行多次测量，每次测量的结果都不会完全一样，但其测量值的平均值总会接近某一个数，或在某一个数值附近摆动. 再如每年高考的考生成绩，随机抽测一位，其分数并无什么规律，但大批的考生成绩总会出现高分(或低分) 的考生所占总考生的百分比偏低，而介于高分与低分之间的考生所占总考生的百分比偏高的规

律性现象.概率论与数理统计就是研究这种随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.1.2 随机试验和随机事件

在这里把对自然现象的一次观察或进行一次科学试验统统称为一个试验，所谓随机试验就是具有如下特征的试验：

①可在相同条件下重复进行；

②每次试验的可能结果至少两个以上，但是能事先知道试验的全部结果或范围；

③每次试验前不能准确预知哪个结果会出现.

例如：E_1(抛一枚均匀硬币的试验)：多次抛一枚均匀的硬币，出现正面或反面两种不同的结果.虽然每次出现的结果不是正面就是反面，但在每次抛前是不能准确预知哪面会出现.

E_2(射击试验)：多次观察一射击运动员击中靶的环数，其结果无非是0，1，2，…，10环，但每次射击前不能准确预知该运动员击中的环数.

E_3(重复摸球试验)：设一袋中有编号分别为1，2，…，8的8个同类球，从中任摸一球，观察其号码后又放回袋中，然后再从中任摸一球，观察其号码后又放回袋中(这样的摸球方法称为“有放回”)，多次重复这一试验，各次摸得的球的号码不会全同，虽然每次摸得的结果只能是号码1,2,…,8之一，但是每次摸球前却不能准确预知哪个号码的球被摸得.

以上三个试验都是随机试验，简称试验.随机试验的每

个可能结果称为该试验的随机事件，简称为事件，一般用大写字母 A，B，C 等表示. 例如：在试验 E_3 中，“摸得的球的号码为 3”是试验 E_3 的一个可能结果，故是 E_3 的一个事件. 在一定研究范围内不能再分的事件，称为基本事件. 如试验 E_1 中“出现正面”“出现反面”皆为基本事件，而 E_3 中“摸得的球的号码大于 6”是由“摸得的球的号码为 7”与“摸得的球的号码为 8”两个基本事件组合而成的，称为复合事件，它也是一个事件.

注意：并不是若干个基本事件一定能组合为复合事件！

在一定条件下，必然发生的事件，称为必然事件，记作 Ω. 例如上述 E_3 中的 $\Omega=\{1, 2, \cdots, 8\}$. 在一定条件下，必然不发生的事件称为不可能事件，记作 $\varnothing$，如上述 E_3 中“摸到的球的号码为 -1”是不可能事件. 必然事件和不可能事件实质上都是确定性现象的表现，只是为了便于研究，通常把它们当作随机事件的两种极端情况来看待.

1.1.3 事件的关系和运算

在某些问题的研究中，讨论的往往不只是一个事件，而是好些事件，而这些事件之间又存在着某种关系. 下面引进事件之间的几种主要关系及作用在事件上的运算.

为方便计，先解释一下什么叫事件 A 发生. 比如，掷一枚骰子，观察它朝上一面的点数，这是一个随机试验，其全部结果是{1 点，2 点，3 点，4 点，5 点，6 点}，基本事件为{出现 1 点}，…，{出现 6 点}. 而“出现偶数点”是由“出现 2 点”，“出现 4 点”，“出现 6 点”等三个基本事件组成. 所谓“出

现偶数点”这一事件 A 发生，是指在一次试验中“出现 2 点”或“出现 4 点”或“出现 6 点”. 将基本事件看成一个点或称为样本点，随机试验的全部基本事件就构成了一个必然事件 Ω，我们称之为样本空间，而随机事件就是由样本空间中某些样本点构成的集合. 是随机事件之间的关系就与集合之间的关系建立了某种对应. 下面叙述事件之间的关系及运算.

1. 包含关系

如果事件 A 发生，必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 被事件 B 所包含，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$. 即凡是 A 中的基本事件或样本点，必然是 B 中的基本事件或样本点. 包含关系显然具有以下性质：

①$A \subset A$；

②若 $A \subset B$，$B \subset C$，则 $A \subset C$；

③ $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

2. 相等关系

如果事件 A 与事件 B 满足 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，则 A 与 B 相等. 其概率涵义是：凡是 A 中的样本点也必然是 B 中的样本点，反之亦然. 或者通俗地说，A，B 中有一个出现，另一个也必出现，即 A 与 B 就是一回事. 因此，有时用 $A = \{\cdots\}$ 来表示事件，大括号中的“…”是描述事件特征的.

3. 和(并)

事件 A 和 B 至少有一个发生，称为事件 A 与事件 B 之和，记为 $A \cup B$，表示 A 发生或者 B 发生的事件. 这里应注意的是 $A \cup B$ 与事件“A 和 B 恰有一个发生”（即 A 发生，B 不发生，或者 B 发生，A 不发生）是不同的，$A \cup B$ 是由 A 与 B 的样本点合起来构成的集合(或事件). 事件 A_1，A_2 …，A_n 中至少有一个发生，称为事件 A_1，A_2，…，A_n 的和，记为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. 事件列 A_1, A_2，…，A_n，…至少有一个发生，称为事件列的和，记为 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

4. 积(交)

事件 A 和 B 同时发生，称为事件 A 与事件 B 之积，记为 $A \cap B$ 或 AB. 事件 A_1，A_2，…，A_n 同时发生，称为 A_1，A_2，…，A_n 的积，记为 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. 事件列 A_1，A_2，…，A_n，…同时发生，称为事件列的积，记为 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

5. 互不相容关系

如果事件 A 和事件 B 不能同时发生，即 $A \cap B = \varnothing$，则称 A 与 B 互不相容，即事件 A 与事件 B 没有公共的样本点. 所谓 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是 n 个互不相容事件，指的是其中任何两个事件都是互不相容的. 所谓事件列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是