高等学校理工科数学基础

高等数学

（上）

主　编　杜先能　孙国正
副主编　蒋　威　侯为波　祝东进

Gaodeng shuxue

安徽大学出版社

高 等 学 校 理 工 科 数 学 基 础

高 等 数 学

（上）

主　编　杜先能　孙国正

副主编　蒋　威　侯为波　祝东进

安 徽 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上/杜先能,孙国正主编.—合肥:安徽大学出版社,2003.9

(高等学校理工科数学基础)

ISBN 7-81052-700-2

Ⅰ.高... Ⅱ.①杜...②孙... Ⅲ.高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 071879 号

高等数学(上)

主　编　杜先能　孙国正

副主编　蒋　威　侯为波　祝东进

出版发行	安徽大学出版社 (合肥市肥西路 3 号　邮编 230039)	**经　销**	各地新华书店
		印　刷	安徽省天歌印刷厂
联系电话	编辑室 0551-5108438 发行部 0551-5107784	**开　本**	787×960　1/16
		印　张	20.25
电子邮箱	ahdxchps@mail.hf.ah.cn	**字　数**	352.5 千
责任编辑	鲍家全　徐　建	**版　次**	2003 年 9 月第 1 版
封面设计	张　犇	**印　次**	2003 年 9 月第 1 次印刷

ISBN 7-81052-700-2/O·34　　**定　价**　24.50 元

如有影响阅读的印装质量问题,请与出版社发行部联系调换

参 编 人 员

王良龙	孙国正	刘树德	束立生
何江宏	杜先能	宋寿柏	陆　斌
郭大伟	侯为波	祝东进	赵礼峰
胡舒合	徐建华	徐德璋	殷晓斌
蒋　威	雍锡琪		

前　　言

微积分是理工科非数学专业最重要的一门基础课，对培养面向21世纪的复合型应用人才起着至关重要的作用。为此，我们根据全国高等学校理工科《高等数学教学大纲》，参照2003、2004年《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》，在安徽大学原自编系列教材《高等数学》（安徽大学出版社，1999年版）的基础上，集中省内多所高校长期从事高等数学教学，具有丰富教学经验的老师，本着推陈出新、锐意改革的宗旨，编写了这套微积分教材。本书是《高等数学》体系中微积分部分的上册，是整个高等数学理论的基础。

我们始终坚持微积分教学不仅仅是讲授基础数学知识，为其他学科提供工具，更重要的是传授现代数学思想，培养科学创新意识，提高应用数学能力。在编写过程中，我们做了以下一些尝试。

1. 抓住本质，突出重点，强调微积分的基本思想和基本方法。我们把主要精力集中在最基本、最主要的内容上，真正让读者学深学透。对抽象难懂的概念，抓住其实质，使用通俗流畅的语言阐述清楚，并由应用实例作导引，使读者明白易懂。而对简单和非关键的内容，力求删繁就简，言简意赅，不拖泥带水。例如，我们加强了极限、连续概念的解析，目的是使读者从总体上把握微积分的基本思想；又例如，考虑到读者在中学已经学过了较多的集合和函数的知识，为避免不必要的重复，我们将之作为预备知识进行精简和改写，而对分段函数的内容，则突出其特点，加强对其本质的理解。在微分方程章节中，我们简要回顾其基本概念和基本理论，重点在介绍各类微分方程的求解方法上。另外，本书从始至终以极限为基本线索，注意各章节内容之间的内在联系，立足于为读者传授微积分的基本思想和基本方法。

2. 突出数学建模思想，注重培养学生应用数学能力。尽管有不少专业在其后续教学中还要开设数学模型课程，但我们认为，如果在像微积分这样的基础课程教学中能充分体现数学建模思想，在抽象的数学定理、数学公式与丰富多彩、纷繁复杂的客观世界之间架起一座数学应用桥梁，岂不真正起到学以致用的效果！编写中，我们结合教学进程，适当地介绍了用微积分理论

解决实际问题的若干应用实例。例如,在极限与连续章节后,给出连续函数的两个应用实例;在一元函数微分学中,我们介绍了6个应用实例;在积分学中,整个第7章都是在讲解定积分如何应用于几何学、物理学等学科。这些实例,不仅使读者感到抽象的微积分理论趣味无穷,进而激发其学习微积分的兴趣,而且对培养读者的数学应用能力帮助极大。

3.坚持循序渐近原则,注意渗透现代数学思想,促进微积分与相关科学分支的结合。本书从一般的集合、映射入手,引入函数的概念,重点落脚在分段函数的理解上。从数列极限出发,引入各种类型的函数极限概念,导出连续函数的概念及其重要性质,再以极限为基础,引入一元函数微分、积分的概念,着重强调它们的应用。又例如,以微分和积分为基础,介绍了有关数值计算的基本思想和基本方法,结合微分方程介绍数学建模和生态数学模型,许多例题直接来源于自然科学、社会科学的相关前沿领域。所有这些,为微积分和相关数理分支的有机结合提供了一个可供操作使用的应用平台。

4.本着学以致用原则,精心设计典型例题和习题。本书精心挑选和设计各类典型例题,一方面巩固和理解所学理论,另一方面加强数学思维的训练,锻炼数学思维能力。此外,本书每节配备了大量习题供读者训练,每章还精心设计了综合练习题,供复习提高使用,目的是扩大读者视野,熟练数学技巧,提高综合应用数学的能力。

5.理顺教学内容体系,推陈出新,体现科学创造意识。数代杰出科学家经过约300年的不懈努力,建成了微积分大厦,改革谈何容易。但是,科学技术的突飞猛进,也为微积分注入了新的活力,因此作为一本改革教材,应充分体现这种数学发展趋势。本书对许多定理的证明,作了简化或采用新的证法。例如,各种微分中值定理,传统教材中均使用直观证明方法,我们在此给出富有发展的、能充分体现创新思维的一套新证明。在教材内容体系上作了精心安排,力求繁简得当,重点突出,不搞平均分配。为满足某些专业课程的教学需要,我们把微分方程的内容放到本册中。另外,我们还编写了若干附录,方便读者使用本教材。

本书的总体框架与编写大纲由省内多所高校的老师及省教育厅JYXM2003108项目组成员集体反复讨论后确定。第1章由杜先能编写,第2、7两章由王良龙编写,第3至第6章分别由蒋威、雍锡琪、胡舒合、何江宏编写,第8章由徐建华编写,最后由王良龙协调统稿,对教材的整体格式和行文作了统一处理,对全书的文字进行润色,并编写了附录1、附录2。

本书的编写是在安徽大学、安徽师范大学、淮北煤炭师范学院三校数学系、教务处的领导和许多教师的大力支持下完成的。省教育厅教改

JYXM2003108项目组成员参与编写并提出许多宝贵建议，使本书质量得以极大提高。安徽大学数学系部分老师演算了全书的习题。在此一并致谢。

在本书的编写过程中，我们参阅了国内外许多教材，谨表诚挚谢意。

囿于编者学识，加之任务本身难度大，时间仓促，书中的错误与缺陷在所难免，恳请同行、读者提出宝贵意见，使本书在教学实践中不断完善。

编者

2003年9月

目 录

第1章

函 数

高等数学的主要研究对象是函数.本章主要介绍函数的概念、函数的几种特性、复合函数与反函数的概念、基本初等函数和初等函数以及双曲函数的概念,它们是初等数学中相应内容的延伸与拓广,作为本书的预备知识.

§1.1 集合、常量与变量

1.集合

集合是数学中最基本的概念,要给它下精确定义很困难,只能通过具体例子加以说明.例如某校全体学生,实数全体,等等.一般地,集合是指具有某种特定性质的事物的全体.组成集合的个体称为该集合的元素,个体 a 是集合 S 的元素,记为 $a\in S$,读作 a 属于 S;a 不是集合 S 的元素记为 $a\overline{\in} S$,读作 a 不属于 S.

全体自然数的集合记作 N;全体整数的集合记作 Z;全体有理数的集合记作 Q;全体实数的集合记作 R.

如果集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则说 A 是 B 的子集,记作 $A\subset B$,读作 A 包含于 B.例如 $N\subset Z$,$Z\subset Q$,$Q\subset R$.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与 B 相等,记为 $A=B$.例如,若 A 只含有两个元素 $+1,-1$.B 是方程 $x^2-1=0$ 的解的集合,则 $A=B$.

不含任何元素的集合称为空集,记作 $\varnothing$.且规定 $\varnothing$ 是任何集合的子集.

集合有两种表示法.如果一个集合所含元素有限,可用列举法表示它,即在花括号内列出其所有元素.例如由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 A,可用列举法表示为

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

如果一个集合的元素无法一一列出或不必一一列出,可用描述法表示它,即在花括号内左边写出元素的一般符号,右边写出元素满足的一般条件,中间用一竖线隔开.例如,A 是方程 $x^2-1=0$ 的实数解的集合,则 A 可表

示为

$$A = \{x \in R \mid x^2 - 1 = 0\}.$$

一些数的集合简称为数集，本书中用得较多的数集是区间.

设 a,b 为实数且 $a<b$，数集

$$\{x \in R \mid a < x < b\}$$

称为开区间，记作 (a,b)，这里 a,b 分别称为开区间 (a,b) 的端点. 注意 $a \overline{\in} (a,b)$，$b \overline{\in} (a,b)$. 数集

$$\{x \in R \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为一个闭区间，记作 $[a,b]$. a,b 也称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，但 $a \in [a,b]$，$b \in [a,b]$.

类似地，我们记

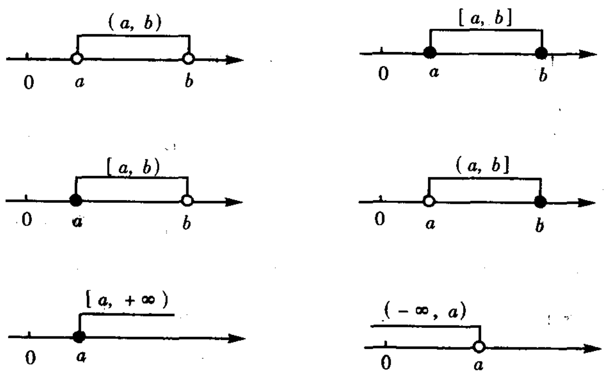
$$[a,b) = \{x \in R \mid a \leqslant x < b\},$$
$$(a,b] = \{x \in R \mid a < x \leqslant b\}.$$

$[a,b)$，$(a,b]$ 均称为半开区间.

以上区间均是有限区间，此外还有所谓无限区间的概念. 引进正无穷大 $+\infty$，负无穷大 $-\infty$. 定义

$$[a,+\infty) = \{x \in R \mid a \leqslant x\},$$
$$(-\infty,a) = \{x \in R \mid x < a\}.$$

以上所述六种区间可在数轴上直观地表示出来.



全体实数的集合也记作 $(-\infty,+\infty)$. 即

$$R = (-\infty,+\infty).$$

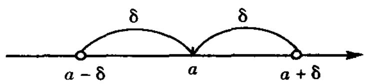
以上各种区间可统称为“区间”，常用 I 表示.

邻域也是一个常用的概念. 设 $a \in R$，δ 是个正实数. 数集

$$\{x \in R \mid -\delta < x - a < \delta\} = \{x \in R \mid |x - a| < \delta\}$$

称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$. a 称为该邻域的中心，δ 称为其半径. 不

难看出 $U(a,\delta)$就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$. 如下图所示



有时要把邻域 $U(a,\delta)$的中心 a 去掉,$U(a,\delta)$去掉中心 a 后,称为点 a 的去心δ 邻域,记为 $\mathring{U}(a,\delta)$. 即

$$\begin{aligned}\mathring{U}(a,\delta) &= \{x\in R \mid -\delta < x-a < \delta, x\neq a\}\\ &= \{x\in R \mid 0<|x-a|<\delta\}.\end{aligned}$$

2. 常量与变量

在一个变化过程中有些量始终保持不变,即取一个固定的数值,这样的量叫做常量. 有些量在变化过程中是变化着的,它可以取不同的数值,这样的量称为变量.

例如,把一密闭容器内的气体加热时,气体的体积及气体的质量是保持不变的,它们是常量;而气体的温度与压强则是变化着的,它们是变量.

§1.2 函数的概念

在一个变化过程中,几个变量同时变化着,它们之间往往按一定规律在变,既相互依存,又相互制约.

例 1 考虑圆的面积 A 与其半径 r 之间的相互关系,它们满足 $A=\pi r^2$,当半径 r 取任一正数时,圆的面积 A 由上式唯一确定下来.

例 2 汽车以 a 千米/小时的速度匀速行驶,考虑行驶时间 t 与行驶路程 s 之间的关系,知道 $s=at$. 这里变量 t 与 s 在变化过程中相互制约. 如果 t 取某一固定的正数,则 s 由关系式 $s=at$ 唯一确定下来.

以上两个具体例子都表达了两个变量之间的相互依存关系. 即一种对应法则,这种法则本质为,当其中一个变量在一定范围内任意取定一个数值时,另一个变量按这种对应法则就有唯一确定的值与之对应. 由此,我们给出函数的概念.

定义 设 x,y 是两个变量,D 是一个数集. 如果对每个 $x\in D$,按照某一对应法则 f,变量 y 均有唯一确定的值与 x 对应,则称 y 为 x 的函数,记作 $y=f(x)$. 数集 D 叫该函数的定义域,x 叫自变量,y 叫因变量. 当 x 取遍数集 D 时,对应的 y 的全体组成的数集

$$W=\{y\in R \mid y=f(x), x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)$的值域.

值得注意的是,如果两个函数有相同的定义域,且有完全相同的对应法

则,尽管两个函数的表现方式不同,两者本质上是相同的.例如函数$y=|x|$与函数$\beta=\sqrt{\alpha^2}$本质上是一样的.

在实际问题中,函数的定义域是由实际问题确定的,自变量的取值要使实际问题有意义,如上面两个例子中,函数的定义域均为$D=(0,+\infty)$.

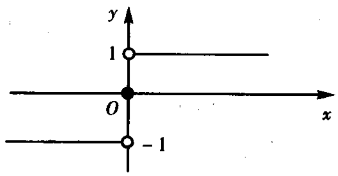
如果不是实际问题,我们约定函数的定义域就是使该函数有意义的所有自变量的集合.例如函数$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$的定义域为$(-1,1)$.

表示函数的方法通常有三种,即解析法,列表法,图像法.有的函数在整个定义域中不能用统一的解析式给出,这时可用分段描述的方法给出其解析式.这样的函数称为分段函数.这里给出一些例子.

例3 函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

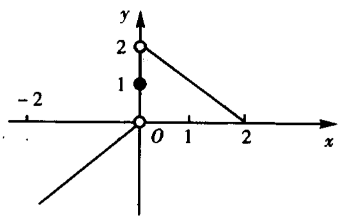
其定义域为$D=(-\infty,+\infty)$,值域为$W=\{1,0,-1\}$,称它为符号函数.函数图像为



例4 函数

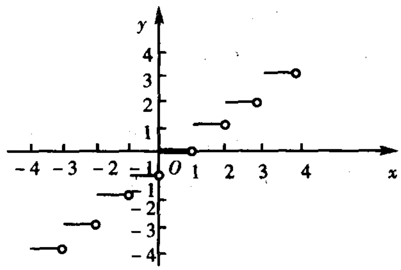
$$y=\begin{cases}x, & x\in[-2,0)\\ 1, & x=0\\ 2-x, & x\in(0,2]\end{cases}$$

其定义域为$[-2,2]$,值域为$[-2,2)$.其图像为



例5 设x为任一实数,不超过x的最大整数记为$[x]$.例如,$[\frac{5}{7}]=0$,

$[-\sqrt{2}]=-2,[\sqrt{3}]=1,[-3.5]=-4,[-2]=-2$. 把 x 视作自变量，则 $y=[x]$ 是 x 的函数，称作取整函数，其定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域是 $W=Z$，它的图像是“阶梯”形的.



§1.3 函数的几种特性

1. 有界性

定义 设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 D，数集 $X\subset D$. 如果存在正数 M，使得对任意 $x\in X$ 均有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界. 如果这样的正数 M 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 X 上无界，此时对任何正数 M，总存在 $x\in X$，使 $|f(x)|>M$.

不难看出，对于函数 $f(x)$ 及数集 $X\subset D$，若存在两个数 A 和 B，使对任意 $x\in X$，均有 $A\leqslant f(x)\leqslant B$，则 $f(x)$ 在 X 上有界. 从几何上看，若函数 $f(x)$ 在 $x\in X$ 的范围内，其图像介于两条水平直线 $y=A$，$y=B$ 之间，则 $f(x)$ 在 X 上有界

例如：函数 $f(x)=\sin x$. 对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$，因而函数 $f(x)=\sin x$ 在其定义域上是有界的. 对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，它在区间 $(0,1)$ 上是无界的. 事实上，对于任意给定的正数 M（不妨设 $M>1$），可找到 $x_0=\dfrac{1}{2M}\in(0,1)$ 使得 $|f(x_0)|=\left|\dfrac{1}{x_0}\right|=2M>M$. 但是 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(1,2)$ 上有界. 因为可取 $M=1$，对任意 $x\in(1,2)$，显然有 $|f(x)|=\left|\dfrac{1}{x}\right|=\dfrac{1}{x}<M$.

2. 单调性

定义 设函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，区间 $I\subset D$. 如果对于任意 x_1，$x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时恒有

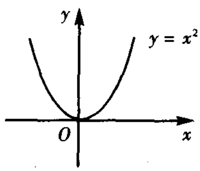
$$f(x_1) < f(x_2),$$

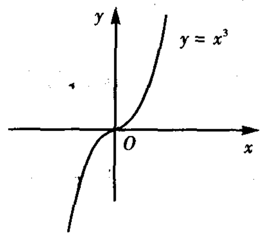
则称函数 $f(x)$在区间 I 上单调增加;如果对于任意 $x_1,x_2\in I$,当 $x_1<x_2$ 时,恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调减少的.单调增加,单调减少的函数统称为单调函数.

例如,函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上单调增加,而在区间$(-\infty,0]$上单调减少;而在$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数.又例如函数 $f(x)=x^3$ 在其定义域$(-\infty,+\infty)$上是单调增加的.





3.奇偶性

定义 设函数 $f(x)$的定义域 D 关于坐标原点对称(即若 $x\in D$,则 $-x\in D$).如果对任意 $x\in D$,恒有

$$f(-x)=f(x),$$

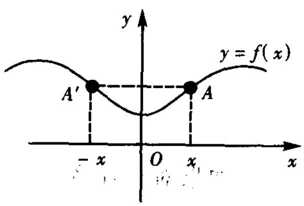
则称函数 $f(x)$为偶函数.如果对于任意 $x\in D$,恒有

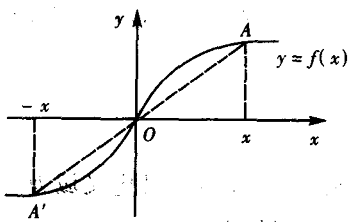
$$f(-x)=-f(x),$$

则称 $f(x)$为奇函数.

例如,$f(x)=x^2$ 是偶函数,因为 $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$,而 $f(x)=x^3$ 是奇函数,因为 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$.

不难看出,偶函数的图像关于 y 轴对称.若 $f(x)$是偶函数,则$f(-x)=f(x)$,假设 $A(x,f(x))$是其图像上一点,则与 A 关于 y 轴对称的点 $A'(-x,f(x))$显然也在 $f(x)$的图像上,这意味着 $f(x)$的图像关于 y 轴对称.





类似地，奇函数的图像关于原点对称. 因为若 $f(x)$ 是奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$. 假设 $A(x,f(x))$ 是 $f(x)$ 的图像上一点，则与 A 关于原点对称的点 $A'(-x,-f(x))$ 也在 $f(x)$ 的图像上，这意味着 $f(x)$ 的图像关于原点对称.

例如，函数 $y=x^2+x^4$，$y=\cos x$ 均是偶函数，而函数 $y=x^3+x$，$y=\sin x$ 均是奇函数.

函数 $y=x^2+x+1$，$y=\sin x+\cos x$ 既不是偶函数，也不是奇函数.

4. 周期性

定义 设函数 $f(x)$ 的定义域是 D. 如果存在一个不为零的数 l，使得对任意 $x\in D$ 有 $x\pm l\in D$，且

$$f(x+l)=f(x)$$

恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，l 为 $f(x)$ 的一个周期.

显然，若 l 是 $f(x)$ 的一个周期，则对任意整数 $k\in Z$，kl 均是 $f(x)$ 的周期. 通常说的函数的周期一般指的是该函数的最小正周期.

例如，函数 $\sin x$，$\cos x$ 均以 2π 为周期，而 $\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

从几何上看，若 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数，则 $f(x)$ 在定义域内每个长为 l 的区间上，图像有相同的形状.

§1.4 复合函数与反函数

1. 复合函数

先看一个例子，设

$$y=\sqrt{u}，而\ u=1-x^2，$$

以 $1-x^2$ 代替前式中的 u，得 $y=\sqrt{1-x^2}$，此时我们说函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 是由函数 $y=\sqrt{u}$ 及函数 $u=1-x^2$ 复合而成的一个复合函数. 一般地，有下面的概念.

定义 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=\varphi(x)$ 的定义域为 D_2，值域为 W_2，并且 $W_2\subset D_1$. 此时，对于任意 $x\in D_2$，按法则 $u=\varphi(x)$ 有唯一确定的 $u\in W_2$ 与 x 对应. 而 $W_2\subset D_1$，这个 u 属于 $y=f(u)$ 的定义域 D_1，按对应法则 $y=f(u)$，此时又有唯一确定的 y 与 u 对应，进而与 x 对应，由此确定了一个以 x 为自变量，以 y 为因变量的函数，称这个函数为由 $y=f(u)$ 及 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数，记为

$$y=f[\varphi(x)],$$

这里 u 叫做中间变量.