技工学校教材

三年制技工学校試用

249445

立体几何与平面解析几何

全国技工学校教材編审委員会編

中南矿冶学院
图書館藏

机械工业出版社

三年制技工学校試用教材

立体几何与平面解析几何

全国技工学校教材編审委員会編

机械工业出版社

本书是由全国技工学校教材编审委員会組織編写并审定的。

本书包括立体几何与平面解析几何两部分。前者共分三章：直綫与平面、多面体及旋轉体；后者包括四章：直綫与方程、圓錐曲綫、坐标变换及极坐标。书中有大量插图，并附有例题、习題和立体几何复习提要。

本书适用于具有初中毕业程度的三年制技工学校学生閱讀。

本书由刘立十同志編写。

立体几何与平面解析几何

全国技工学校教材編审委員会編

（根据中国工业出版社紙型重印）

*

机械工业出版社出版（北京苏州胡同 141 号）

（北京市书刊出版业营业許可証出字第 117 号）

机械工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行·各地新华书店經售

*

开本 787×1092 1/32·印張 7 7/8·插頁 1·字数 173 千字

1963 年 11 月北京第一版，共印 76,079 册

1964 年 12 月北京新一版·1964 年 12 月北京第一次印刷

印数00,001—35,000·定价(科二)0.75元

*

統一书号：K 15033·3599

目 次

第一编 立体几何

第二编 平面解析几何

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第一編 立体几何

第一章 直綫与平面

我們在平面几何里曾經学过一些平面图形的基本性质的理論。这些理論，大都在实际事物里，指导过我們的实践。可是在日常生活或生产实践里所接触到的各种物体，譬如桌椅、书本、手錘、銼刀、机床、木模、鋼軸、齿輪、鉄板等等，它們的图形上的各点，不完全在同一个平面內，而是一种空間图形。盡管制图課教会了我們如何描繪它，但关于空間图形的性质的探討却是缺乏的。因此我們要在平面几何和制图等知識的基础上，进一步研究立体图形的一些基本性质和这些性质的实际应用。

§ 1 平面的基本概念

平面几何中的基本概念是点和直綫，立体几何中的基本概念是点、直綫和平面。

这些概念，都是从实际經驗中得来的。譬如課桌面、划綫平台面、平靜的水面等，我們都把它們看成是平的。从而抽象出平面的概念。

1. 平面的表示法 我們在适当的角度看桌面、繪图板面、划綫平台面等，覚得它們都像平行四边形。所以习慣上，就用平行四边形来表示，如图1—1。

在画一个按水平的位置放着的平面时，总是把平行四边

形的一个銳角画成45°，而把横边画得比另一边长一倍，并且以一个希腊字母或大写的拉丁字母来表示，如图1—1的Ⅰ是平面α，Ⅱ是平面M。

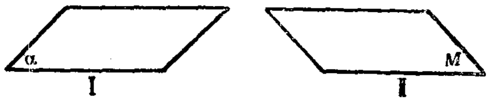


图 1—1

这里应該注意：平面是无限的。这里画的平行四边形虽然是平面的有限部分（指它有明确周界），但却应想像它們是表示在空間能无限伸展的平面。

一条直綫把平面分成两部分，每一部分叫做半平面。

一个面是不是平面，在实践中有一种共同的判定方法。

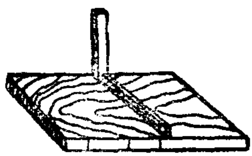


图 1—2

譬如，木工常用曲尺的边沿，紧靠在鉋过的木板面上任意移动（图1—2）；鉗工或銑工也用鋼尺的尺边，放在刮过或銑过的工件表面上任意移动，当他們发现尺边与工件表面处处密合时，就能肯定这个表面是平的。

从而我們得出平面判定的方法：

经过面内任意两点的直线，如果全部在这个面内，这个面就是平面。

2. 平面的基本性质 根据人們千万次实践的結果，我們可以归納出平面的几点基本性质：

（1）如果一条直线有两个点在一个平面上，那末这条直线就在这个平面上。

譬如，織毛綫的織針如果是直的，把它放在玻璃板面上任意滾动都能和板面处处吻合。

（2）如果两个平面有一个公共点，那末它们就会相交，交线必定是过这个公共点的直线。

譬如，用刀片切紙，开始用刀口的一个角尖与紙面接触，当用力下切时，切口就是一条直綫；又如三棱尺的边沿也是一条直綫。

（3）经过不在一直线上的任意三点，可以做一个平面，也只可以作一个平面。

譬如，任意竪起三个指头，在上面放上一块玻璃，不管指头的长短，这三个指头（表示三点）都会和玻璃相接触，并且还决定了这块玻璃的位置（图1—3）。

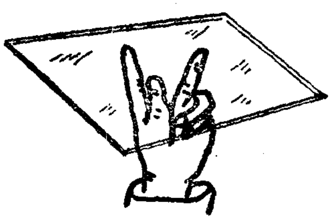


图 1—3

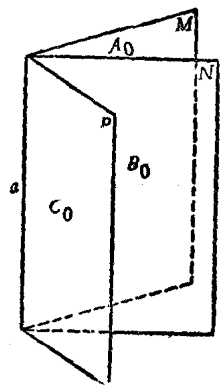


图 1—4

推論　过两点或过一条直线，可以做无数个平面。

譬如，在开門时，可以把門軸（图1—4中的a边）看成一条直綫，开門后門扇停留的每一个位置（图1—4中的平面M、N或P），都表示过門軸（直綫a）的一个平面。

3．平面的确定　通过上面列举的平面的基本性质，我

們可以得出确定平面的几个方法。

（1）**过不在一直綫上的三点，能确定一个平面**（图1—5.Ⅰ）；

（2）**一条直綫和这条直綫外的一点，可以确定一个平面。**

譬如，上面提到过的門，如果繞着門軸任意轉动，可以有无限多的过軸的平面；但是当它关上以后，或者是打开到一定程度停止不动，这个平面就固定了。

通过这一方法，我們还可得出下面三个确定平面的方法。

（3）**过两条相交的直綫，能确定一个平面**（图1—5.Ⅱ）；

（4）**过两条相互平行的直綫，能确定一个平面**（图1—5.Ⅲ）。

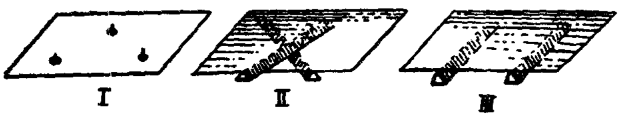


图 1—5

从上面的結論可以看出，三角形必定是一个平面图形，

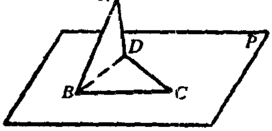


图 1—6

空間任意四点連結的图形，就不一定是一个平面图形。如图1—6 A、B、C、D是空間的任意四点，过B、C、D三点确定一个平面P，如果A也在这个平面內，那末它就成为我們熟悉的四边形，如果A不在这个平面內，显然，ABD确定了另一个平面，它与平面P，相交于BD，

这样的四边形叫做**空间四边形**。从而可知空間四点❶可以确定四个平面。

§ 2 关于空间作图

由于空間几何图形，比平面几何图形多了一个重要的元素——面，所以作图比較复杂一些。現在我們来研究利用平面作图时的一些問題。

1. 空间作图的几项规定

（1）如果能够符合确定平面的任何一个方法，那末这个平面就可以作成；

（2）如果能够知道两个平面相交，那末它們的交綫就可以作成，

（3）如果已經确定了一个平面，那末在这个平面內就可以完成平面几何中的一切作图。

2. 如何完成空间作图

空間图形的主要特点，是要使它在画成之后具有立体感。这就是說如何把不同平面上的点、綫和平面，在一个平面的图紙上把它画出来，并使人能看出左右前后，层次分明。风景画和照片是一种表达形式；机械制图中的直观图——立体图，也是一种表达形式。

一般說来，画图时須要按照一定的規格。譬如，在画水平面的平面时，把平行四边形的一个銳角画成45°；画一个平面或一条直綫被另一个平面遮住时，总是把被遮住的部分的綫段画成虛綫（图1—7），有时也可不画。

此外，还应注意下面的基本作法：

（1）按能够确定平面的方法作出平面；

❶ 以后如无特殊注解，則皆指不在同一平面內的四点。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

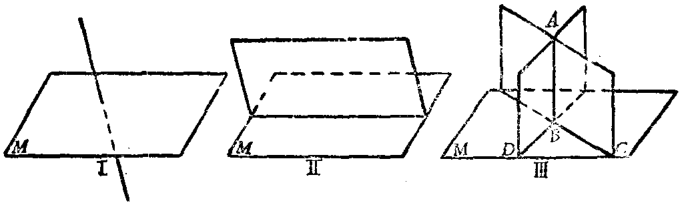


图 1—7

（2）求出已知两个相交平面的交綫；

（3）在一个已知平面內作平面图形。

例 求作已知直綫 a 和已知平面 P的交点。

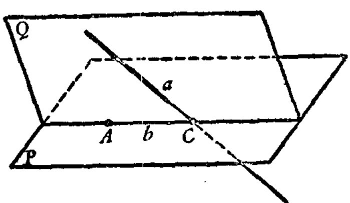


图 1—8

如图1—8，a 为已知直綫，P为已知平面，在平面P內任取一点A，过直綫 a 及点A作平面Q，这时平面Q必和平面P相交（两个平面有一个公共点A），設交綫为过A的直綫 b；再在平面Q上求作两直綫 a、b 的交点C，那末C点即为所求作的交点。

显然，如果 a、b 两直綫平行，这时沒有交点，因此此题无解。

习 題 一

1. 看看、做做、想想，再回答下面的問題：

（1）把一张紙折一下，折痕是一条直綫，为什么？

（2）照相机、測量仪的架子，都是三只脚，却能平稳地放在地面上，为什么？

（3）車廂的底架、大門，常常在中間釘两条平行的木柱或鉄

条，这样可以使木板平整，为什么（图1—9）？

（4）鉋床往返移动，就能把工件鉋平，为什么？

2. 看看、画画、想想，再回答下面的問題：

（1）空間三点，一定能在同一个平面上，但不能肯定这三点就在某一个平面上，为什么？

（2）空間四点，如果有三个点在一条直綫上，这四个点会在一个平面上嗎？为什么？

（3）把一点分别和不过这个点的一条直綫上的三点連結起来，这样得到三条直綫，是不是一定会在同一平面內？为什么？

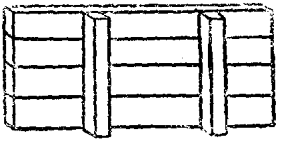


图 1—9

（4）两条平行直綫，同时平行于空間的第三条直綫，这三条直綫能决定几个平面？

（5）一条直綫，分别和两条平行直綫相交，这三条直綫能决定几个平面？

（6）空間三条直綫，两两分别相交，这三条直綫能决定几个平面？

（7）一条直綫同时和两条空間直綫相交，这三条直綫能决定几个平面？

（8）五条綫段依次首尾相接，所得的封閉图形一定是平面图形嗎？

3. 在实习工场里和教室里分别找两个以上关于“一条直綫和直綫外一点确定一个平面”的例子。

4. 画两个相交平面。

§ 3 直线和直线的位置关系

1. 平面內的直线和异面直线 空間两条直綫如果不重合时，它們可能有三种位置关系：

（1）两条直綫相交；

（2）两条直綫平行；

（3）两条直綫既不相交也不平行。

前两种位置关系是我們比較熟悉的，是在同一平面內的两直綫可能存在的位置关系，不平行就相交。至于第三种位置关系，看来好像不存在，实际上这种例子是很多的。

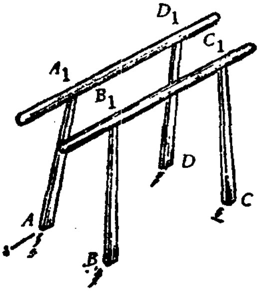


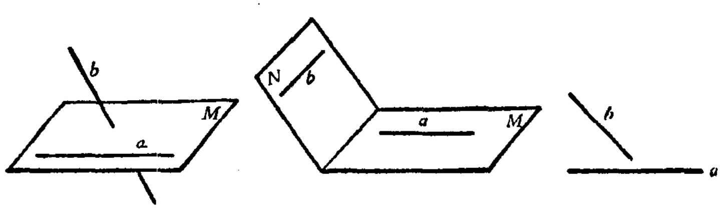
图 1—10

譬如，天花板下悬垂着电灯的灯綫和門窗的横框；长方体形的木箱上底的长边和下底的寬边，它們都可表示为不相交也不平行的两直綫。

又如图 1—10 是一付双杠，如果把每一条木杆看成一条直綫，那末 A_1D_1 和 B_1B、A_1D_1 和 C_1C、B_1C_1 和 A_1A、B_1C_1 和 D_1D 等都是不平行也不相交的直綫，显然，它們都是不在同一平面內的两条直綫。

不在同一个平面內的两条直线，叫做异面直线，它們既不相交，也不平行。

画異面直綫时，要把两条直綫画在不同平面上，才比較容易显示異面直綫的特点。如图 1—11 中的 I 与 II，很容易



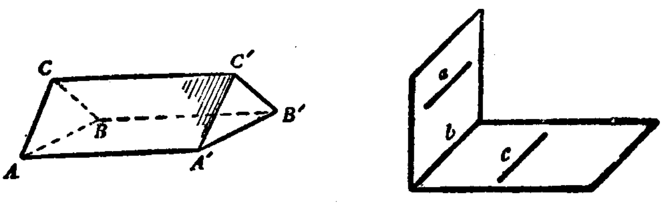
I　　II　　III

图 1—11

看出 a、b 是两条异面直綫，而Ⅲ却很难看出它們是异面直綫。

2．空間直綫的平行关系 这里主要研究三条直綫的平行关系的問題。

显然，在同一个平面内，如果两条直綫同时平行于第三条直綫，那末这两条直綫必平行。如果这三条直綫不同在一个平面内，通过无数事例証明，上面的結論也是正确的。



Ⅰ　　Ⅱ

图 1—12

譬如画图时所用的三棱尺，或者是断面为三角形的一段角鉄，它們的三个棱，并不同在一个平面上，却是彼此平行的（图 1—12．Ⅰ）；又如拿一張紙，在上面画三条平行綫 a、b 和 c，以中間的一条 b 为折痕，把紙折过来，可以看到 a 与 c 仍是平行的（图1—12．Ⅱ）。

一般說来，**不在同一个平面内的三条直綫，如果其中两条直綫都平行于第三条，那末这两条直綫也平行。**

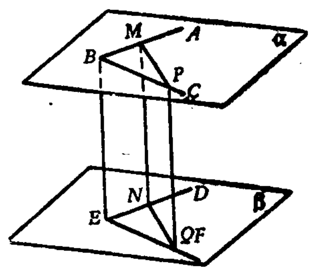


图 1—13

例 已知∠ABC与∠DEF不在同一个平面内，并且它們的对应边互相平行，方向也相同（图 1—13）。求証：

$$\angle ABC=\angle DEF.$$

証明　在AB与DE上，分别截取相等的綫段BM与EN，在BC与EF上，分别截取相等的綫段BP与EQ。連結BE、PQ、MN。

$\because$　$BM \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} EN$，　$BP \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} EQ$.

$\therefore$　BENM 与 BEQP 都是平行四边形。

于是　$MN \mathrel{\underline{\underline{\parallel}}} PQ$。MNQP 是平行四边形，$MP=NQ$。

因此　　　　$\triangle BMP \cong \triangle ENQ$,

$$\angle ABC=\angle DEF.$$

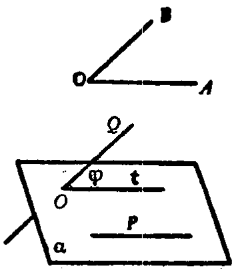


图 1—14

通过这个例題，我們可以說：**空间的两个角，如果它们的对应边互相平行，并且方向也相同，那末这两个角相等。**

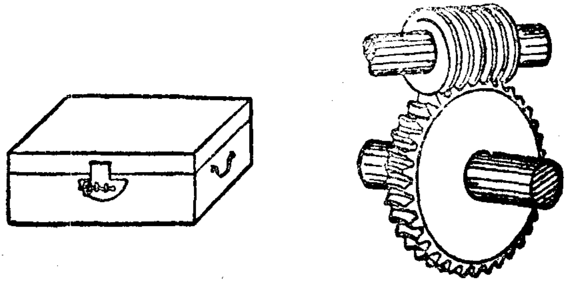
3.　异面直线的交角　在平面图形里，两条相交直綫的位置，常用它們的夹角来表示。但是異面直綫却不相交，我們只能按照下面的方法决定交角。

如图1—14，設p、Q是两条異面直綫。在空間任取一点O，过O引两条射綫OA、OB，使$OA\parallel p$，$OB\parallel Q$。这时所成的角AOB，叫做異面直綫p、Q的交角。根据上面例題的結論，我們可以知道交角的大小，是由p、Q的位置来决定，而和O点的位置无关。为此，我們常把这个点取在p（或者Q）上，当射綫的方向确定以后，所作平行于p（或者Q）的直綫t，就可得到交角φ了（仍看图1—14）。

4.　空间直线的垂直关系　在同一平面上两条直綫相交，如果交角等于90°时，这两条直綫互相垂直。两条異面直綫的垂直关系，也与此相类似。一般說来，**如果两条异面**

直线所成的角是90°时，这两条异面直线互相垂直。

譬如，天花板上悬垂电灯的电綫和門窗的横框都是垂直的，长方体木箱一边的高，和上下底面的任何一个棱也是垂直的（图1—15. Ⅰ）。蝸輪和蝸杆的軸綫是互相垂直的(图1—15. Ⅱ)。这說明了由蝸杆到蝸輪的传动方向轉了90°。



Ⅰ Ⅱ

图 1—15

如果一条直綫，和两条異面直綫都垂直而且相交时，这条直綫，叫做**异面直线的公垂线**。公垂綫和两条異面直綫相交的两个交点間的距离，叫做**两条异面直线的距离**。如图1—16是一个正方体，AA_1与B_1C_1是两条異面直綫，而A_1B_1都和它們垂直相交，直綫A_1B_1就是異面直綫AA_1与B_1C_1的公垂綫；綫段A_1B_1的长，就是異面直綫AA_1与B_1C_1的距离。

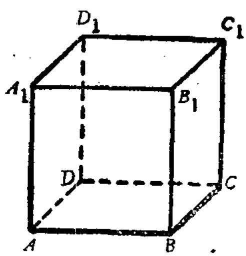


图 1—16

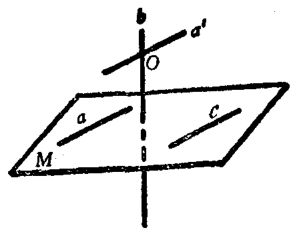


图 1—17

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com