高等学校教材

高等数学

下册

哈尔滨船舶工程学院出版社

高等学校教材

高等数学

下册

马孝珣 郭健 祖国成 编

哈尔滨船舶工程学院出版社

内 容 简 介

本书以1987年高等教育出版社出版的《高等数学课程教学基本要求》为依据，并结合我们多年的教学经验编写而成．书中含有少量高于《要求》的内容，均以符号▽▽▽▽为界．

全书分上、下两册。下册包括多元函数微积分、级数、含参积分、常微分方程。每章后配有习题，书后附有答案。本书可作为高等工科院校各专业的高等数学教材，亦可作为高等理科院校非数学专业的参考书，还适于科技工作者和电视大学、业余大学理工科的学生学习参考。

高等数学（下册）

马孝驹 郭 健 祖国成 编

哈尔滨船舶工程学院出版社出版

新 华 书 店 首 都 发 行 所 发 行

哈尔滨科文印刷厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印张 18.8125 字数475千字

1989年2月第1版 1989年2月第1次印刷

印数：1—5000册

ISBN 7—81007—060—6/O·8

定价：3.25元

前　言

本书是以1987年高等教育出版社出版的《高等数学课程教学基本要求》为依据，结合我校教师多年教学经验，并对有关教师、毕业生和研究生进行了大量调查研究，特别是注意吸收国内外同类教材的优点，经充分讨论编写而成．全书分上、下两册，并另有两册习题课指导教材．

本书以培养学生能力为主线，同时加强基本理论、基本技能与基本方法的训练．

在教材内容的选取上，加强了极限，一元函数微积分学及场论理论．补充了含参变量积分．这样做的目的是为了给学生打下一个坚实的理论基础，同时也为后续课程的学习创造良好条件．

本书编写时，注意了与中学数学课程内容的衔接，在直观引入概念的基础上．再给出严格的定义．在文字和内容的叙述上，力求通俗易懂，由浅入深，表达清晰，结构严谨．每章都配有较多例题，并借助精心配置的例题进一步展开内容，促进学生对概念、定理理解的深化．以及提高他们的解题能力．

为了提高学生用数学分析问题和解决问题的能力．每章都配有一定数量的习题．其中既有基本训练题，也有一定难度的综合题．这些习题有些计算比较复杂，有些逻辑性较强，有些灵活性较大．可在老师指导下进行练习．

本书有少量高于《要求》的内容，均以符号▽▽▽▽为界．其中有的是对某些问题作了进一步说明．有的是今后学习不可缺少的内容．初学者可先不必都去阅读，待有了一定基础后，再学习这一部分内容．

两部书分别由陈正一（第一、十章）、杨天佑（第二、三章）、李照堂(第四、八、九章）、刘云清(第五、六、七章）、马孝珣（第十一、十七章）、祖国成（第十二、十三、十六章）、郭健（第十四、十五、十七章）等同志编写而成。

全书由邓金初副教授主审和统稿，并对书稿的文字和内容作了全面地和细致地反复修改。在编写过程中，郭健同志作了大量组织工作。由于我们水平有限，一定存在不少缺点，期望读者批评指教。

书中全部插图由马孝珣同志绘制。在本书编写过程中，曾得到哈尔滨船舶工程学院有关领导和同志们的鼓励与帮助。在此我们一并表示衷心感谢。

编　　者

1987.9

目　　录

第十一章 多元函数微分法

在前面各章中，所讨论的函数都是只限于一个自变量的函数，称为一元函数．但是在许多实际问题中，所遇到的往往是多个自变量的函数．

例 1 对于1摩尔的理想气体，其压强p，容积V和绝对温度T之间有关系式

$$p=\frac{RT}{V},$$

它描述了因变量p与两个自变量V、T之间的函数关系．这里R为常数．

例 2 长方体的体积公式

$$V=xyz \quad (x>0,\ y>0,\ z>0),$$

它描述了体积V和长方体的长x，宽y与高z之间的函数关系．

这种两个或三个自变量的函数，分别称为二元或者三元函数．当然还能有更多个自变量的函数．一般说来，凡不少于两个自变量的函数，统称为多元函数．与一元函数$y=f(x)$的表示法相类似，因变量u与n个自变量x_1，x_2，…，x_n间的函数关系，可用符号$u=f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$或$y=\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$等来表示．例1中的函数关系可表为$p=f(V,T)$，例2中的函数关系可表为$V=\varphi(x,y,z)$．

多元函数是一元函数的推广，因此，在讨论多元函数时，要经常与一元函数相对比．一方面要注意它与一元函数类似的地方，注意利用一元函数的某些结论来讨论多元函数；另一方面也

要注意，由于自变量个数的增多，而产生的某些本质上是新的内容。

在本章中，将着重讨论二元函数，讨论的结果容易推广到一般多元函数。

§1 多元函数的基本概念

一元函数的定义域是数轴上的点集，二元函数的定义域将是坐标平面上点的集合。因此，在讨论二元函数之前，先简要地介绍一些有关平面点集的知识。

一、平面点集

平面点集 满足某种条件 P 的有序实数对(x,y)的集合 E，称为平面点集，记为

$$E=\{(x,y)\mid (x,y)\text{应满足的条件}P\}.$$

例1 全平面上所有的点组成的集合可表示为

$$R^2=\{(x,y)\mid -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\}.$$

例2 集合

$$E_1=\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$$

是矩形上点的全体，也可记为 $[a,b;\ c,d]$。

邻域 对于正数 $\delta>0$及点$P_0(x_0,y_0)$，点集

$$\left\{(x,y)\middle|\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$的 δ 圆邻域(图11.1)；

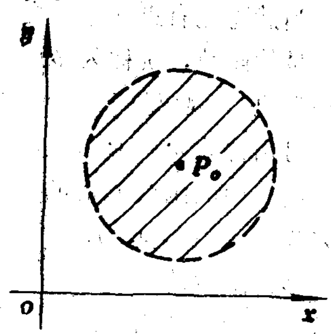

图 11.1

点集

$$\left\{(x,\ y)\,\middle|\,|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta\right\}$$

称为点 $P_0(x_0,y_0)$ 的 δ 方邻域(图11.2)。

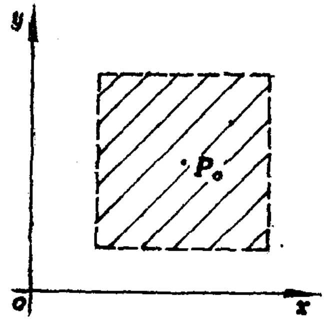

图 11.2

这两种邻域具有如下性质：点 P_0 的任一个圆邻域内可以包含 P_0 的某一个方邻域；反之，P_0 的任一个方邻域内可以包含 P_0 的某一个圆邻域(图11.3)。因此，今后除非特别指出，将不加区别地用“点 P_0 的 δ 邻域”或“点 P_0 的邻域”泛指这两种邻域，并以记号 $U(P_0,\delta)$ 或 $U(P_0)$ 表示。

点 $P_0(x_0,y_0)$ 的空心邻域是指平面点集

$$\left\{(x,y)\,\middle|\,0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}$$

或 $$\left\{(x,y)\,\middle|\,|x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\delta,\ (x,y)\neq(x_0,y_0)\right\}.$$

开集、闭集、区域

设 E 是一个平面点集

1. **内点** 设点 $P\in E$，且 $\exists\varepsilon>0$，使得邻域 $U(P,\varepsilon)\subset E$，则称点 P 是点集 E 的内点(图11.4)。

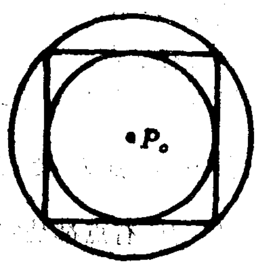

图 11.3

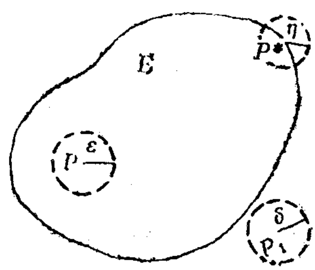

图 11.4

2. **外点** 设点 $P_1 \overline{\in} E$，且 $\exists\delta>0$，使得邻域 $U(P_1,\delta)$ 内没有 E 的点，则称点 P_1 是点集 E 的外点(图11.4)。

3. **边界点** 设点 P^* 是平面上一点，它可以属于 E，也可以不属于 E。若在点 P^* 的任何 η 邻域 $U(P^*,\eta)$ 内，既含有 E 的点，又含有不属于 E 的点，则称点 P^* 是点集 E 的边界点(图11.4)。E 的全体边界点的集合，称为 E 的边界。

例3 设 $E=\{(x,y)|1<x^2+y^2<4\}$，则凡满足 $1<x^2+y^2<4$ 的点 (x,y) 是 E 的内点；凡满足 $x^2+y^2<1$ 或 $x^2+y^2>4$ 的点 (x,y) 是 E 的外点；圆周 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 是 E 的边界。

4. **开集** 如果 E 的点都是 E 的内点，则称 E 为开集。因此开集中的任何一点，都存在一个邻域，使得该邻域全部被包含在这开集中。

5. **聚点** 设 P 是平面上一点，它可以属于 E，也可以不属于 E。如果在 P 的任何一个 δ 邻域 $U(P,\delta)$ 内，至少含有 E 中的一个异于 P 的点，则称 P 是 E 的聚点。显然，任何集合的内点一定是该集合的聚点。

例4 $E=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ 的全部内点和边界点都是聚点。

6. **闭集** 如果点集 E 包含它所有的聚点，或者 E 没有聚点，则称 E 为闭集。

例5 $E_1=\{(x,y)|0<x^2+y^2<1\}$ 是开集。

$E_2=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 1\}$ 是闭集。

有限个点组成的点集是闭集，因为它没有聚点。

在平面上去掉有限个点，剩余的点组成的点集是开集。

例6 设 $E=\left\{\left(\frac{1}{m},\frac{1}{n}\right)\middle| m,\ n \text{ 是自然数}\right\}$。则 E 没有内点（因为 E 的每一点都不是它的内点），E 的所有点都是它的边界点。x 轴上的点 $\left(\frac{1}{m},0\right)$，$y$ 轴上的点 $\left(0,\frac{1}{n}\right)$ 和原点 $(0,0)$ 都是

E 的聚点，但它们不属于 E，也是 E 的边界点．因此点集 E 既不是开集，也不是闭集．

7． **区域** 设 E 是一个开集．若 E 内的任意两点 P、Q，都可以用完全包含于 E 内的折线连结起来，则称 E 是开区域或区域（图11.5）．一个开区域加上它的边界称为闭区域．显然，每一个闭区域都是闭集．今后提到区域时，一般总是指开区域．

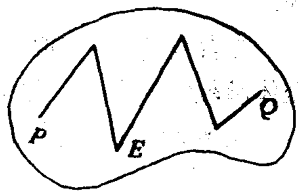

图 11.5

例7 $E_1=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2<1\}$是区域；

$E_2=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$是闭区域；

$E_3=\{(x,y)\mid xy>o\}$是开集，而不是区域．

有界区域 设 D 是一个区域，如果存在常数 $R>0$，使得

$$D\subset U(o,R),$$

其中 0 表示坐标原点(0,0)，则称区域 D 是有界的．不是有界的区域称为无界的．

区域的直径 设 D 是一个区域，则由 D 内任意两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$的距离

$$\rho(P,Q)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

所构成的数集的上确界

$$d(D)=sup\{\rho(P,Q)\mid P,Q\in D\}$$

称为区域 D 的直径．

显然，若区域 D 有界，则 D 的直径 $d(D)$取有限值．

二、二元函数

定义 设 D 是平面点集，R 是实数集，f 是一个规则，如果对 D 中的每一点(x,y)，通过规则 f，在 R 中存在唯一的一个实数 z 和它对应，则称 z 是点(x,y)的函数，记为

$$z=f(x,y),$$

这里 x, y 称自变量，z 称为因变量，点集 D 称为函数 z 的定义域。

当自变量 x, y 取定值时，因变量 z 的相应值称为函数值。全体函数值的集合，称为函数的值域。

函数 $z=f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处的函数值记为 $f(x_0, y_0)$。

例8 函数 $z=\arcsin\dfrac{x}{a}+\arcsin\dfrac{y}{b}\ (a>0,\ b>0)$ 的定义域是

$$\left\{(x, y)\,\middle|\,|x|\leqslant a,\ |y|\leqslant b\right\};$$

函数 $z=\sqrt{x-y^2}$ 的定义域是

$$\left\{(x, y)\,\middle|\,0\leqslant x<+\infty,\ -\sqrt{x}\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\right\};$$

函数 $f(m, n)=\dfrac{m!}{n!(m-n)!}$ 的定义域是

$$\{(m, n)\,|\,m、n\text{ 是非负整数，且 } m\geqslant n\}.$$

二元函数的几何意义

二元函数 $z=f(x, y)$ 能够用三维空间的几何图象表示。

在三维空间中取一个直角坐标系 $o\text{-}xyz$，并设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域 D，是该坐标系中 xy 平面上的一个点集。在 D 上取定一点 (x, y)，由于有唯一的一个值 $z=f(x, y)$ 与之对应，于是得空间中一点 $P(x, y, z)$，对于定义域 D 的每一点，在空间 $o\text{-}xyz$ 中都有这样得到的一点 $P(x, y, z)$ 与之对应，称所有这种点 (x, y, z) 的集合：

$$\{(x, y, z)\,|\,z=f(x, y)\ (x, y)\in D\}$$

为二元函数 $z=f(x, y)$ 的图象，它一般是空间的一块或几块曲面（图11.6）。

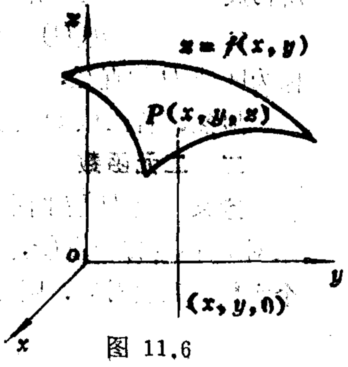

图 11.6

例9 函数 $z=ax+by+c$ 的几何意义是以 $\{a, b, -1\}$ 为法向量且过点 $(0, 0, c)$ 的平面；

函数 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的几何意义是以原点为中心，以1为半径的上半球面；

函数 $z=xy$ 的几何意义是一个双曲抛物面（马鞍面）。

§2 二元函数的极限和连续性

一、二元函数的极限

假设 $P_0(x_0, y_0)$ 点是函数 $f(x, y)$ 的定义域 D 的一个聚点。如果令 D 内的动点 $P(x, y)$ 以任意方式趋向于 $P_0(x_0, y_0)$，且不与 $P_0(x_0, y_0)$ 重合时，$f(x, y)$ 无限逼近唯一的一个常数 A，则称动点 $P(x, y)$ 趋向于 $P_0(x_0, y_0)$ 时函数 $f(x, y)$ 的极限为 A。

与一元函数极限的精确定义相类似，也可以写出二元函数极限的精确定义。

定义 设 $P_0(x_0, y_0)$ 是二元函数 $f(x, y)$ 的定义域 D 的一个聚点(*)，A 是一个确定的数。如果 $\forall \varepsilon>0$，$\exists \delta>0$，使得当

$$P(x, y) \in U(P_0, \delta) \cap D \quad \text{且} \ P \neq P_0$$

时，都有

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon,$$

则称函数 $f(x, y)$ 在动点 $P(x, y)$ 趋向于 $P_0(x_0, y_0)$ 时以 A 为极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)=A$$

---

* $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的聚点的假设，是为了使点集 $\{P(x,y) \mid U(P_0,\delta) \cap D$ 且 $P \neq P_0\}$ 对任何 $\delta>0$ 都是非空的，从而保证动点 P 可以通过取 D 的内点而无限接近 P_0。

或
$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,\ y)=A,$$
也可记作
$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A,$$
这里 $U(P_0,\ \delta)$ 可以是 P_0 的 δ 方邻域，也可以是 δ 圆邻域。

对于二元函数 $f(x,\ y)$，当其中至少有一个自变量趋向无限，例如 $x\to a$，$y\to+\infty$ 时，函数 $f(x,\ y)$ 以 A 为极限，也就是
$$\lim_{\substack{x\to a\\ y\to+\infty}} f(x,\ y)=A$$
的精确定义可以叙述为：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$ 和 $B>0$，使得当
$$|x-a|<\delta,\ \ y>B$$
时，恒有
$$|f(x,\ y)-A|<\varepsilon$$
至于其它情形，可类似写出。

例1 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0$

证 因为由 $(|x|-|y|)^2\geqslant 0$ 可得 $\left|\dfrac{2xy}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1\quad(x^2+y^2\neq 0)$，
从而有
$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=\left|\frac{2xy}{x^2+y^2}\right|\cdot\frac{|x|}{2}\leqslant\frac{|x|}{2}\quad(x^2+y^2\neq 0),$$
所以，对于 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\varepsilon$，则当 $|x|<\delta$，$|y|<\delta$ $\big((x,\ y)\neq(0,\ 0)\big)$ 时，就恒有
$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{|x|}{2}<\frac{\delta}{2}<\varepsilon,$$
于是
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$$

上述证明中用的是方形邻域，如果用圆形邻域，则可证明如下：

因为 $x^2 \leqslant x^2+y^2$，$|y| \leqslant \sqrt{x^2+y^2}$，

所以

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right| = \frac{x^2 |y|}{x^2+y^2} \leqslant \frac{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (x^2+y^2 \neq 0)$$

于是，对于 $\varepsilon>0$，只要取 $\delta=\varepsilon$，则当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$ 时，就恒有

$$\left|\frac{x^2 y}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon.$$

例2 设 $f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & \big((x, y)\neq(0, 0)\big), \\ 0 & \big((x, y)=(0, 0)\big).\end{cases}$ 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x, y)=0$ 及 $\lim\limits_{\substack{y\to 0\\ x=0}} f(x, y)=0$，但 $\lim\limits_{(x, y)\to(0, 0)} f(x, y)$ 不存在。

证 因为在 x 轴上 $f(x, 0)=0$，故当动点 (x, y) 沿 x 轴趋向于 $(0, 0)$ 时，有

$$\lim_{x\to 0} f(x, 0)=0$$

此即

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x, y)=0;$$

同样，在 y 轴上 $f(0, y)=0$，故当动点 (x, y) 沿 y 轴趋向于 $(0, 0)$ 时，有

$$\lim_{y\to 0} f(0, y)=0$$

此即

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} f(x, y)=0;$$