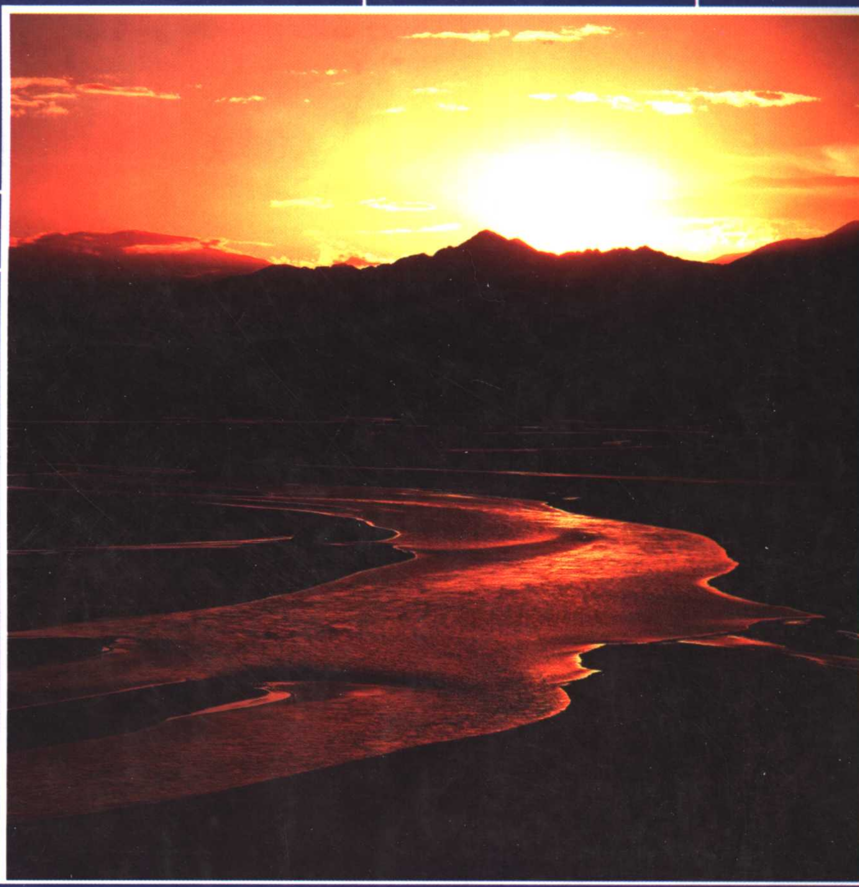
总量控制中的离散规划

胡炳清 编著



中国环境科学出版社

总量控制中的离散规划

胡炳清　　编著

中国环境科学出版社

·北　京·

图书在版编目（CIP）数据

总量控制中的离散规划/胡炳清编著．—北京：中国环境科学出版社，2000

ISBN 7-80135-959-3

Ⅰ．总… Ⅱ．胡… Ⅲ．总排污量控制-离散控制 Ⅳ．X32

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2000）第 04658 号

中国环境科学出版社出版发行

（100036 北京海淀区普惠南里 14 号）

化学工业出版社印刷厂印刷

各地新华书店经售

*

2000 年 3 月第 一 版 开本 787×1092 1/16

2000 年 3 月第一次印刷 印张 9

印数 1—1000 字数 213 千字

定价：28.00 元

序

自从80年代初在北京市大气环境质量标准制订中首次提出运用离散规划问题以来，在国家“六·五”和“七·五”规划水环境容量攻关中进行了大量的应用和实践，并逐步形成了快速排除解法，取得了良好的经济、社会和环境效益。

在以往的线性规划中，对于离散的数据常常通过一定的数学方法，如分段线性化，形成线性函数，以满足线性规划的要求。这些方法虽然暂时解决了计算上的难题，但往往使计算没有相应可操作的方案，在实施中造成难于操作、结果偏差大的情况。而近来广泛应用的整数规划虽然能解决离散规划问题，但要求规划者要有良好的数学规划理论基础和实践经验，才可能做出一个物理模型合理、逻辑模型清晰和数学模型精确的规划模型体系。另外，整数规划需要分配大量的决策变量，占用巨额的计算机内存资源，限制了规划模型的实际可求解规模。离散规划模型是从实践中认识和提炼的典型规划模型，克服了线性规划和整数规划之不足，其计算方法充分利用了离散规划模型的自身固有规律，提出的离散规划模型体系具有规划模型简洁、概念明确、优化结果可操作性强等特点。正因为如此，离散规划成功地应用于“六·五”规划的沱江攻关后，得到广大环境科研和管理工作者的推崇，应用案例已达数以百计。

长期以来，由于对离散规划理论和方法缺乏系统研究，应用将达10年的快速排除解法不仅在计算方法上仍存在较严重的缺陷，而且已不适合于环境规划中日益提出的要求，如多个控制点或面同时约束的区域环境规划。本研究提出的最速下降搜索解法，较好地解决了这一问题，与以往的离散规划计算方法相比该解法具有以下特点：(1) 寻求最优解的能力更强；(2) 可以实现多个控制点或面的同时优化；(3) 计算规模和计算速度大大提高；(4) 更适合于环境标准的科学制定和合理的科学决策。

本书首次较全面、系统地研究了离散规划问题，就其来由、特点、存在必要性、数学模型和数据处理进行了详细论述；从离散规划问题的直观解法——图解法出发，研究了离散规划的物理类型，剖析了数值计算方法，客观系统地介绍和评价了快速排除解法，进而重点论述了最速下降搜索解法的原理和方法，揭示了最速下降搜索解法的重要规律，并给予了论证。从理论上详细分析了最速下降搜索解法寻求最优解时可能出现与污染源编号次序有关的产生条件，为了消除数据有序相关性和满意解与最优解之间的波动现象，提出了最速下降搜索解法的两种改进方案，即分枝堆栈解法和多级下降搜索解法。在解决计算方法的基础上，提出了离散规划问题的灵敏度分析，为规划优化结果定量分析提供了依据，为环境规划和科学决策提供了有效的量化手段。通过离散规划问题在总量控制中的应用实例，重点比较了快速排除解法和最速下降搜索解法，提出了影响系数的获取和确定的方法及灵敏度分析中负边际效应的处理办法。最后，提出了离散规

划问题的标准数学模型及基本要求，以及离散规划的其他几种数学模型的标准化方法。作为离散规划问题在非环境领域中的应用，介绍了应用离散规划数学模型及最速下降搜索解法求解一维资源分配问题（属于动态规划范畴）的实例。

本书提出的最速下降搜索解法已实现软件化。软件开发采用模块设计、动态分配、在线帮助、菜单界面和汉化手段等先进技术，该软件具有用户界面友好、操作简单方便、系统配置灵活、全屏幕数据录入与编辑和联机帮助等功能与特点。

总之，本书的出版丰富了运筹学研究内容，在原始离散规划模型的理论框架和求解方法上有突破性进展，为环境科学和管理提供了新的更有效的技术支持，具有良好的应用前景！

柴发合

1999年3月18日

目　录

第一章 导 言

第一节 运筹学概述

在生产建设、计划管理、科学试验和军事等许多方面，人们总是想采取种种措施以获得最优的结果，这类问题就叫做最优化问题。运筹学所研究的正是这类最优化问题。

运筹学作为科学名字是出现在20世纪30年代末。当时英、美对付德国的空袭，雷达作为防空系统的一部分，从技术上是可行的，但实际运用时却并不理想。为此，一些科学家就如何合理运用雷达开始进行一类新问题的研究，因为它与研究技术问题不同，就称之为“运用研究”（Operational Research）。早在1939年苏联学者康托洛维奇（Л.В.Кднторовиц）在解决工业生产组织和经济管理时，已提出了类似线性规划的模型，并给出了“解乘数法”的求解方法，第二次世界大战期间，由于军事运输的需要，提出了线性规划问题的解法。1947年丹捷格（G.B.Dantzig）提出的单纯方法就是这方面最杰出的算法。1960年康托洛维奇再次发表了《最佳资源利用的经济计算》一书后，才受到国内外的重视，为此康托洛维奇获得了诺贝尔奖金。到50年代初，H.W.Kuhn和A.W.Tucker提出了非线性规划的基本定理，为这方面的发展奠定了理论基础，此后，其应用也涉及到各个领域。K.Bellman提出了动态规划的最优化原则，创立了动态规划这一重要分支，其应用也是极为普遍的。60年代可以说是最优化方法飞速发展的10年。

运筹学的早期研究历史可追溯到1914年，军事运筹学中的兰彻斯特（Lanchester）战斗方程是在1914年提出的，排队论的先驱者丹麦工程师爱尔朗（Erlang）1917年在哥本哈根电话公司研究电话通讯系统时，提出了排队论的一些著名公式，存贮论的最优批量公式是在20世纪20年代初提出的。值得一提的是，丹捷格认为线性规划模型的提出是受到了列昂捷夫的投入产出模型（1932年）的影响，关于线性规划的理论是受到了冯·诺意曼（Von Neumaun）的帮助。冯·诺意曼和摩根斯坦（O.Morgenstern）合著的《对策论与经济行为》(1944）是对策论的奠基作。

随着运筹学应用的不断扩大，运筹数学也得到了飞速的发展，并形成了运筹学的许多分支。如数学规划（线性规划、非线性规划、整数规划、目标规划、动态规划、随机规划等)、图论与网络、排队论（随机服务系统理论)、存贮论、对策论、决策论、维修

更新理论、搜索论、可靠性和质量管理等。

运筹学是一门应用科学，至今还没有统一而确切的定义。莫斯（P.M.Morse）和金博尔（G.E.Kimball）曾对运筹学作出的定义是："为决策机构在对其控制下业务活动进行决策时，提供以数量化为基础的科学方法。"这一定义强调的是科学方法，这含义不单是某种研究方法的分散和偶然的应用，而是可用于整个一类问题上，又强调以量化为基础，必然要用数学。但任何决策都包含定量和定性两方面，而定性方面又不能简单地用数学表示，如政治、社会等因素，只有综合多种因素的决策才是全面的。运筹学的另一定义是："运筹学是一门应用科学，广泛应用现有的科学技术知识和数学方法，解决实际中提出的专门问题，为决策者选择最优决策提供定量依据"。这定义表明运筹学具有多学科交叉的特点。运筹学是强调最优决策，"最"是过分理想了，在实际生活中往往用次优、满意等概念代替最优。因此，运筹学的又一定义是："运筹学是一种给出问题坏的答案的艺术，否则问题的结果会更坏"。

为了有效地应用运筹学，前英国运筹学学会会长托姆林森提出6条原则：(1) 合伙原则，是指运筹学工作者要和各方面人，尤其是同实际部门工作者合作；(2) 催化原则，在多学科共同解决某问题时，要引导人们改变一些常规的看法；(3) 互相渗透原则，要求多部门彼此渗透地考虑问题，而不是只局限于本部门；(4) 独立原则，在研究问题时，不应受某人或某部门的特殊政策所左右，应独立从事工作；(5) 宽容原则，解决问题的思路要宽，方法要多，而不是局限于某种特定的方法；(6) 平衡原则，要考虑各种矛盾的平衡、关系的平衡。

运筹学模型的一般数学形式可用下列表达式描述：

目标的评价原则： $U = f(x_i, y_j, \xi_k)$

约束条件： $g(x_i, y_j, \xi_k) \geqslant Q$

其中：x_i——为可控变量；

y_j——为已知参数；

ξ_k——为随机因素。

目标的评价准则，一般要求达到最佳（最大或最小）、适中、满意等。准则可以是单一的，也可是多个的。约束条件可以没有，也可有多个。当 g 是等式时，即为平衡条件。当模型中无随机因素时，称它为确定性模型，否则为随机模型。随机模型的评价准则可用期望值，也可用方差，还可用某种概率分布来表示。当可控变量只取离散值时，称为离散模型，否则称为连续模型。

第二节　离散规划问题来由

1982年车宇湖等在《环境科学学报》上发表了"大气质量标准技术经济评定的数学模型"论文，该文从研究大气质量与改善大气环境的技术措施及经济投资三者之间的关系着手，建立一套数学模型，为大气标准的评定提供了一个实用工具，并将此理论模型应用于北京市 SO_2 年平均浓度二级标准的评定工作，得出以 $0.08mg/m^3$ 为宜的结论。

国家制定环境质量标准时需要考虑很多因素，除了依据维护人体健康的卫生基准及其他的生态基准外，有一个很重要的因素就是技术水平和经济力量的可行问题，标准订得太松，达不到改造环境的目的，标准订得太严，超出国家技术经济力量的可行限，便成为脱离实际的空谈。因此，对环境标准必须进行技术经济的评价与决策。

设一个城市有 N 个源头（点源和面源小源块）它们的源强（作为变量）分别为 Q_j（$j=1$，2，…，N）。对于固定的源头 j，可有一系列的技术措施组合：

$R_j=\{L_j \mid L_j$ 遍历源头 j 的所有技术措施组合$\}$，每种技术措施组合 L_j，都对应着一个源强 Q_j，记此映射为：

$$G_j: L_j \overset{G_j}{\quad} Q_j,\ L_j \in R_j$$

技术措施组合 L_j 同时也对应着一个费用 P_j，记此映射为：

$$H_j: L_j \overset{H_j}{\quad} P_j,\ L_j \in R_j$$

显然有 $Q_j \geqslant 0$ 和 $P_j \geqslant 0$，令：

$A_j=\{Q_j \mid Q_j=G_j(L_j)$，$L_j$ 遍历源头 j 的所有技术措施组合$\}$。

$B_j=\{P_j \mid P_j=H_j(L_j)$，$L_j$ 遍历源头 j 的所有技术组合$\}$。

设对任一 $Q_j \in A_j$，存在 t 个技术措施组合 $L_j^{(h)}$（$h=1$，2，…，t），使得：

$$G_j(L_j^{(h)}) = Q_j$$

取映射：

$$F_j: Q_j \overset{F_j}{\quad} P_j = \min_{h=1,2,\cdots,t} H_j(L_j^{(h)})$$

我们的规划问题就是：

约束条件：

$$f_i(Q_1, Q_2, \cdots, Q_N) \leqslant C_0,\ i=1, 2, \cdots, M;\ C_0>0 \tag{1-1}$$

目标：

$$\min P = \sum_{j=1}^{N} P_j = \sum_{j=1}^{N} F_j(Q_j) \tag{1-2}$$

其中（1-1）式为某约束区域或约束点的浓度表达式，C_0 为浓度约束值，即所取的环境值。

容易证明，由目前常用的气质模式出发而得出的一点浓度、或一区域平均浓度、或对某时段平均的浓度与源强分布（即 Q_1，Q_2，…，Q_N）都是呈线性关系的，文献[4]也采取了这种观点。

例如，常用的点源正态模式：

$$C = \frac{Q}{\pi u \sigma_y \sigma_Z} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma_Z^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)$$

其中 C 为地面污染物浓度（mg/m^3），Q 为源强（mg/s），u 为排放口的平均风速（m/s），h 为有效源高（m），σ_y、σ_Z 分别为水平及垂直方向扩散标准差（m），y 为计算点距烟羽的侧风向距离（m）。

系数：
$$\alpha=\frac{1}{\pi u\sigma_y\sigma_Z}\exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma_Z^2}-\frac{y^2}{2\sigma_y^2}\right)$$
称为源强系数，但它与源强无关，面源情形也有类似公式。某一计算点的浓度为各点源面源的浓度贡献之和，故该点浓度是源强的线性表达式。时间平均浓度只是对某时段出现气象频数作加权平均，故线性性质不变，地域平均亦然。

由此可知：
$$f_i(Q_1,Q_2,\cdots,Q_N)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}Q_j$$
这样，我们的规划问题就成为：

约束条件：
$$\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}Q_j\leqslant C_0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ M;\ C_0>0;\ \alpha_{ij}>0 \tag{1-3}$$
目标：
$$\min P=\sum_{j=1}^{N}P_j=\sum_{j=1}^{N}F_j(Q_j) \tag{1-4}$$
称此规划问题为“离散规划”。

该文提出了离散规划的直接解法并给出了计算框图。

廖庆宜和夏青在中德水环境标准学术讨论会上提交了“制订总量控制排放标准的技术、经济模型”论文。该文介绍了一维河流中制定总量控制排放标准的技术、经济模型的建立，并详细叙述了该模型的快速排除解法具体步骤，最后给出了此算法在中国沱江的应用实例。

在污染源达到浓度控制排放标准，受纳水体仍不能实现水质目标时。需要根据水质标准，优化分配各污染源的容许排放量，实施总量控制。优化的准则是：选择可行处理技术，使达到水质目标的总治理投资最小。国内、外解决此问题的一般方法是：建立费用函数，选择线性规划等优化计算方法求解。但是，由污染源类型与处理技术的多样性所决定，污染物去除率与费用之间没有连续的函数关系（或关系很差），而只有一一映照的关系。费用函数的连续特征与真实情况往往不符合。该文介绍的技术、经济模型及其解法，则在于克服费用函数方法的欠缺。

认为技术、经济模型由三部分构成：

(1) 用线性方程形式表达的排污量与水质指标值之间的定量关系；

(2) 根据技术方案，将污染源排放量由小到大排布的源强矩阵表；

(3) 与源强表一一对应的治理方案投资额矩阵表。

该文提出了单约束离散规划数学模型。在沱江实际应用中，在长达 348km 的沱江河段中，有 18 个主要污染源欲实行总量控制，根据河流功能划分了 10 个水质控制断面，因而又成为多约束离散规划问题。

由于离散规划方法在沱江的成功应用和单断面（约束）快速排除解法软件的开发，1986 年以后，离散规划理论、方法和软件在全国得到了广泛应用。

1991 年在清理（调试、汉化）软件中，发现了快速排除解法软件在编程中的问题，在改正了软件存在问题的同时，思考着这样一个问题：即使一条单一的城市河流，在流

入、流经和流出的不同河段范围内，有着不同的使用功能和水质保护要求，应将其划分为不同的功能区，分别对待，因而单约束的快速排除解法就无能为力，必须开发多约束的离散规划问题的解法，以满足实际工作需要。经过几个月摸索，取得了可喜的成果，提出了离散规划问题的最速下降搜索解法，在《环境科学论文集》（1990—1991）中发表了这一成果。

总之离散规划问题来自于环境科研与管理中，并在环境领域中不断实践应用，不断得到发展与完善。离散规划至少能解决如下三个环境问题：

（1）环境质量标准的技术经济评价；

（2）满足环境质量标准的最佳实施方案确定；

（3）环境容量资源的最优分配。

第二章　离散规划的数学模型

第一节　数学模型

在解决环境污染实施总量控制的过程中，当污染源达到浓度控制排放标准，受纳体（如大气、水体等）仍不能实现其环境目标时，需要根据受纳体质量标准，优化分配各污染源的允许排放量，以保证总量控制的实施。优化的基本内容是环境质量标准与改善受纳体环境的技术措施及经济投资。各个污染源的技术措施及经济投资很难用一个连续函数加以表达，尤其用简单的线性连续函数表示。由此可见，离散规划问题就是在具有各污染源的若干项技术措施及对应投资的情况下，寻求满足受纳体环境质量标准或受纳体功能区质量要求的、投资最小的各个污染源的技术措施组合方案。

离散规划问题的数学模型可表达如下：

目标函数：
$$\min P = \sum_{j=1}^{N} P(j, k(j)) \tag{2-1}$$

约束条件：
$$\sum_{j=1}^{N} A(i,j) \cdot B(j,k(j)) \leqslant DS(i) \tag{2-2}$$

且 $i = 1,2,\cdots,M; j = 1,2,\cdots,N; k(j) \in \{1,2,\cdots,L(j)\}; DS(i) > 0$

式中：$P(j,k(j))$—— 表示第 j 个源采用第$k(j)$ 个技术措施的投资额；

$A(i,j)$—— 表示第 j 个源对第 i 个控制点或面的影响系数；

$B(j,k(j))$—— 表示第 j 个源采用第$k(j)$ 个技术措施时的排放量；

$DS(i)$—— 表示第 i 个控制点或面的环境质量控制指标值；

$L(j)$—— 表示第 j 个源的方案数；

M—— 表示控制点或面的个数；

N—— 表示污染源的个数；

$k(j)$—— 表示第 j 个源被采纳的方案号；

$L = \max\{L(j) \mid j = 1,2,\cdots,N\}$—— 表示本规划问题中的最大方案数。

从上述离散规划数学模型可以发现，要求解离散规划的最优解其关键是如何确定 $k(j)$，也即每一源被优化的方案号。

同时，为了求解离散规划对模型数据有如下的约定：同一污染源其排放量与投资额

是一一对应的反序满单映射关系。简单地说是排放量按从小到大排列，投资额则按从大到小排列。

这一约定不仅在技术上很容易做到，而且可以保证每一个源进入模型的方案是优化的，具体数据处理方法见本章第三节。

第二节　离散规划的特殊性及存在必要性

离散规划问题从本质上来说归属于整数规划问题，因为根据离散规划问题的特点：每个源参加规划的有 $L(j)$ 个方案，但其中只能且必须取一种方案（包括不治理的方案），故很容易通过增加 0—1 决策变量，转换为整数规划问题。上述离散规划问题转化为（混合）整数规划问题的数学模型如下：

目标函数：
$$\min P = \sum_{j=1}^{N}\sum_{k=1}^{L(j)} X(j,k)\cdot P(j,k) \tag{2-3}$$

约束条件：
$$\sum_{j=1}^{N} A(i,j)\sum_{k=1}^{L(j)} X(j,k)\cdot B(j,k) \leqslant DS(i) \tag{2-4}$$
$$\sum_{k=1}^{L(j)} X(j,k) = 1 \tag{2-5}$$
$$X(j,k) \geqslant 0 \tag{2-6}$$

且 $i = 1,2,\cdots,M$；　$k = 1,2,\cdots,L(j)$；　$j = 1,2,\cdots,N$；　$DS(i) > 0$

式中，$X(j,k)$ 为 0—1 整变量，即当 $X(j,k) = 1$ 时表示第 j 个源采用第 k 个技术措施。其余含义同上。

由此可见，离散规划与整数规划之间的关系是特殊与一般的关系，其特殊性表现在：0—1 整变量 $X(j,k)$ 以源为一单元，所对应的 $P(j,k)$ 和 $B(j,k)$ 存在一一对应的反序满单映射关系，使求解式(2-3)至式(2-6)整数规划模型时，也即确定 $X(j,k)$ 时具有特殊规律，如 $X(j,k_1)$ 不满足式(2-4)，若 $k_2 > k_1$，则 $X(j,k_2)$ 也不满式(2-4)。

以下从计算规模、计算次数及计算机内存需求等三个方面来说明离散规划问题存在的必要性：

1. 计算规模

对于同一实际问题，作为离散规划问题看待，则其规模为 $N\times L$，而作为（混合）整数规划问题看待，则其规模为 $\left[\sum_{j=1}^{N} L(j)\right]\times(N+M)$（化为标准形式后，实际计算规模为 $\left[\sum_{j=1}^{N} L(j)+N+2M+1\right]\times(N+2M+1)$）。离散规划问题的决策变量只有 N 个，而整数规划的决策变量扩大到 $\sum_{j=1}^{N} L(j)$ 个，约束条件由 M 个扩大到（$N+M$）个。由此可见，对于同样的问题由离散规划问题转化为整数规划问题后，计算规模将大大增加，这样势必限制求解问题的实际规模，即污染源个数和方案个数。

2. 计算次数（影响时间与速度）

若离散规划和整数规划都采用穷举法，那么，离散规划的可能组合方案为 $\prod_{j=1}^{N} L(j)$，整数规划 可能的运算次数为 $2^{\sum_{j=1}^{N} L(j)}$。现令：

$$T = \frac{2^{\sum_{j=1}^{N} L(j)}}{\prod_{j=1}^{N} L(j)} - 1 \tag{2-7}$$

则 T 为离散规划转化为整数规划后可能增加的运算次数的倍数。

所以：

$$T = 2^{\left[\sum_{j=1}^{N} L(j) - \log_2 \prod_{j=1}^{N} L(j)\right]} - 1 \tag{2-8}$$

为了说明同一问题由离散规划转化为整数规划可能增加的运算次数，我们用实际数据加以说明。例如有 4 个污染源，每个源有 4 种技术措施，则：

$$T = 2^{[16 - \log_2^{4^4}]} - 1 = 2^{[16-8]} - 1 = 2^8 - 1 = 255$$

当 N 和 $L(j)(j = 1,2,\cdots,N)$ 很大时，T 将变得十分巨大。如有 100 个源，每个源有 8 种技术措施，则 T 为 $2^{500} - 1$，即 T 约为 $3.273390605 \times 10^{150}$。

3. 计算机内存需求

从离散规划与整数规划对内存的要求来看，离散规划最大数组为 $\max[N \times L, N \times M]$，而整数规划实际所需最大数组（化为标准形式后），为 $\left[\sum_{j=1}^{N} L(j) + N + 2M + 1\right] \times (N + 2M + 1)$。因此，一旦离散规划规模较大时，转化为整数规划在计算机内存上是不允许的。（从目前水平来看，微型计算机可解的混合整数规划的决策变量小于 300 个，化为离散规划的实际问题则可解的污染源和方案数会更小）。

综上所述，离散规划是整数规划的一种特例，必须利用离散规划问题的特殊性，研究一种或多种方法求解离散规划问题，才能更好地解决实际中出现的离散规划问题，扩大计算规模，提高计算速度，降低内存需求，尤其在微机上能求解较大规模的离散规划问题。

第三节　数据处理

前已所述，为了求解离散规划，减少冗余数据，必须使 B 表与 P 表中每一源满足反序满单映射。首先介绍文献[1]中的方法。

可以证明，在集合 B 与 P（省去下标 j）中存在子集 B'' 与 P''，F 是它们之间的反序满单映射，且 B'' 中不失去离散规划（1-1）～（1-2）的最优解分量，兹举一例说明子 集 B''

与 P'' 的求法。

例，设某源头为减少某污染物的排放有10种可供选择的技术措施，分别记为 $L_1, L_2, \cdots, L_{10}$。采取一种措施，该污染物的排放源强便会降低某一水平，为此需花费一定的投资，假设这10种技术措施所对应的源强与投资列于表2-1。

表 2-1　10种措施对应的源强与投资

措　施	源强		投资	
	g/s	序　号	万　元	序　号
L_1	0.8	1	3.6	6
L_2	1.2	2	1.8	2
L_3	1.2	2	4.0	7
L_4	25.2	5	2.7	4
L_5	3.36	3	3.8	6
L_6	25.2	5	0.5	1
L_7	13.1	4	2.5	3
L_8	0.8	1	4.0	7
L_9	13.8	4	3.0	5
L_{10}	1.2	2	4.0	7

注：表中序号是依从小到大的顺序编列的。

因此，

$$R = \{L_1, L_2, L_3, \cdots, L_{10}\},$$
$$B = \{1,2,3,4,5\},$$
$$P = \{1,2,3,4,5,6\},$$

对应关系如图2-1。

注意，集合 B 与 P 中的数码是它们各自元素的顺序编号，不是元素本身。

由映射 F 的定义，即得：

$$F(1) = 6, F(2) = 2, F(3) = 6, F(4) = 3, F(5) = 1, \tag{2-9}$$

在（2-9）式所表示的函数表中，对于值相同的自变量值，保留最小者，其余删去，如 $F(1)=F(3)=6$，则弃3存1。这样便得到 B 与 P 中的两个子集 B' 与 P'，F 是它们之间的满单映射（如图2-2所示），但还不是反序满单射，例如，在 B' 中，$2<4$ 同时有：

$$F(2) = 2 < 3 = F(4)$$

数偶对 $\{(2,\ 2);\ (4,\ 3)\}$ 称为保序数偶对，且称数偶（4，3）大于数偶（2，2），对于所有的保序数偶对，弃大存小，便得到子集 B'' 和 P''（如图2-3所示），而 F 便是其间的反序满单映射，易见，P'' 中不会失去离散规划（1-1）～（1-2）的最优解分量。

经过上述 F 映射后，最终进入模型的技术措施（方案）如表2-2。

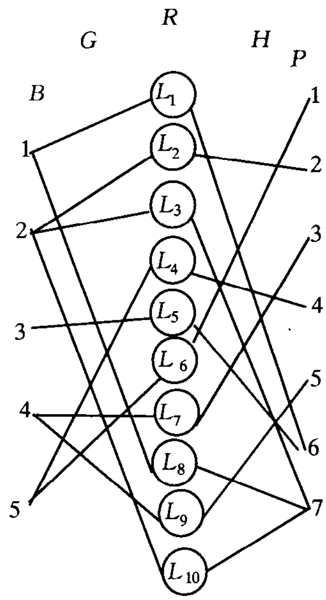


图 2-1 例中的对应关系

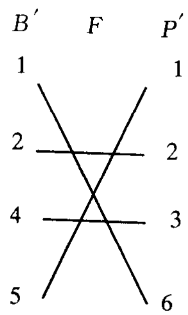


图 2-2 满单映射

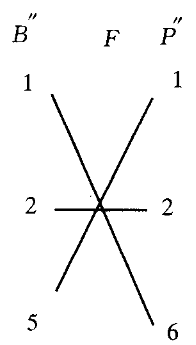


图 2-3 反序满单映射

表 2-2 经 F 映射后的技术措施表

措施	源强 g/s	源强 序号	投资 万元	投资 序号
L_1	0.8	1	3.8	6
L_2	1.2	2	1.8	2
L_6	25.2	5	0.5	1

现介绍一种在计算机上易于实现，方法简单的数据处理方法，这种方法的实现步骤