有限差计算与级数求和

郭锡伯

陕西科学技术出版社

YOUXIANCHA JISUAN YU JISHUQIUHE

有限差计算与级数求和

郭 锡 伯

陕西科学技术出版社

内 容 提 要

有限项级数求和法往往因题而异，针对性强。本书主要介绍级数求和的差分方法，这种方法以差分与和分为工具能解决不少类型的级数求和问题，适用面比较宽。

全书分五节：第一节介绍有限差分基本概念和性质；第二节介绍阶乘函数；第三节介绍有限和分的基本概念和性质；第四节介绍级数求和的差分方法；第五节讨论级数求和的应用。

本书是为中学生和大学低年级学生写的课外数学读物。

有限差计算与级数求和

郭 锡 伯

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行 陕西省印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张3.125 字数38,000

1984年10月第1版 1984年10月第1次印刷

印数1—5,600

统一书号：7202·81 定价：0.46元

前　言

函数的有限差分及其计算是计算数学中的一个基本工具，有限差分法也是一些工程问题的有效数值解法之一。本书介绍了有限差分的基本概念、性质和计算，并进而应用于有限项级数求和，这是一个有用而又有趣的题材。

级数求和的方法繁多，但往往要针对不同问题而采用不同的方法和技巧，这使初学者感到无所适从。本书所介绍的基本有限差分的方法，可以解决不少类型的级数求和问题。另一方面，本书所提供的定理和公式，与微积分中的相应内容在形状上有很多类似之处，并且两者还有一定联系。因而对读者来说，无论是否学过微积分，了解本书内容对进一步学习和巩固微积分的知识将会有一定的帮助，并将有助于读者提高解决问题的能力。

作者本着为中学生和大学低年级学生提供数学课外读物的想法编写本书，因而写得便于自学，特别是在每节主要内容之后配有一定数量的例题和习题，这些例、习题包含了我国古代数学在级数研究中所得的某些成果，书后还对部分习题附有答案或提示，这些都有助于读者学习本书。

本书的读者范围是比较广泛的，除中学生和大学低年级学生以外，中级以上各类学校（包括电大）的理工科师生以及具有高中文化水平的数学爱好者均可阅读。

西安交通大学数学系　游兆永

1982年国庆

目　　录

§1 有限差分

一、差分的概念

差分学主要研究当自变量之值改变时，其因变量（或函数）的值发生改变的情形，差分实际上是变量的微小改变。

设 $U=f(x)$，U为自变量x的函数，在所考虑的范围内取有限值，而不管其是否连续。自变量x也不必限制为连续的，可以取一个个特定值，特别是取整数值，如－2，－1，0，1，2，3……，等。

定义 设x的增量为Δx，当x自某值a变到另一值 $a+\Delta x$ 时，U的增量为ΔU，称ΔU为U在$x=a$处的差分，而称Δx 为x的差分。通常"差分"也称"阶差"、"有限差分"等。

在微分学中函数U的差分ΔU与自变量x的差分之比$\dfrac{\Delta U}{\Delta x}$称为差商，当$\Delta x\to 0$时，求这个比值的极限是微分学的问题。但在差分学中$\Delta x$为有限值，它是在所给定的$x$的变化范围内取某一定值的量。差分与差商分别与微分学中的微分与导数相对应，差分与差商是微分与导数的离散化形式，微分与导数则是差分与差商的极限。

现在我们规定$\Delta x=1$（即差分区间定为1）。这无妨一般性，因为当自变量的差分不是1时，我们可以通过自变量的线性变换使自变量的差分等于1。设有一个以 t 为自变

量的函数，其差分$\Delta t=h\neq 1$。此时我们令$t=hx$，则有$\Delta t=h\Delta x$，即$h=h\Delta x$，故仍有$\Delta x=1$。

习惯上记函数$U=f(x)$在x处的值为U_x，在$x=x+i$（i为整数）处的值为U_{x+i}，在$x=x$处差分记为ΔU_x，则

$$\Delta U_x=U_{x+1}-U_x \tag{1—1}$$

称为U在x处一阶差分。一般省略"一阶"二字，简称差分。

例如，$U=x^2$，在x处的一阶差分为

$$\Delta U_x=U_{x+1}-U_x=(x+1)^2-x^2=2x+1;$$

$U=3^x$，在x处的一阶差分为

$$\Delta U_x=U_{x+1}-U_x=3^{x+1}-3^x=3^x(3-1)=2\cdot 3^x\text{等。}$$

由以上例子可以看出，ΔU_x一般还是x的函数，所以仍可以考虑ΔU_x的差分$\Delta(\Delta U_x)$，并以"Δ^2U_x"表示之，则

$$\begin{aligned}\Delta^2U_x&=\Delta(\Delta U_x)=\Delta(U_{x+1}-U_x)\\&=(U_{x+2}-U_{x+1})-(U_{x+1}-U_x)\\&=U_{x+2}-2U_{x+1}+U_x\end{aligned} \tag{1—2}$$

称为U在x处的二阶差分，亦就是一阶差分的差分。类似地

$$\begin{aligned}\Delta^3U_x&=\Delta(\Delta^2U_x)=\Delta(U_{x+2}-2U_{x+1}+U_x)\\&=(U_{x+3}-2U_{x+2}+U_{x+1})-(U_{x+2}-2U_{x+1}+U_x)\\&=U_{x+3}-3U_{x+2}+3U_{x+1}-U_x\end{aligned} \tag{1—3}$$

称为U在x处三阶差分。以此类推可以归纳出"n阶差分"的定义：

$$\begin{aligned}\Delta^nU_x&=\Delta(\Delta^{n-1}U_x)\\&=U_{x+n}-C_n^1U_{x+n-1}+C_n^2U_{x+n-2}-C_n^3U_{x+n-3}+\cdots\cdots\\&\quad+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}U_{x+1}+(-1)^nU_x\end{aligned} \tag{1—4}$$

其中C_n^r是二项式系数

$$C_n^r=\frac{n!}{r!\ (n-r)\ !}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}$$

（1—5）

例如，当$U=3^x$时，$\Delta U_x=2\cdot 3^x$，那末

$$\begin{aligned}\Delta^2 U_x&=\Delta\ (\Delta U_x)\\&=U_{x+2}-2U_{x+1}+U_x\\&=3^{x+2}-2\cdot 3^{x+1}+3^x=4\cdot 3^x=2^2\cdot 3^x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 U_x&=\Delta(\Delta^2 U_x)\\&=U_{x+3}-3U_{x+2}+3U_{x+1}-U_x\\&=3^{x+3}-3\cdot 3^{x+2}+3\cdot 3^{x+1}-3^x\\&=\ (27-27+9-1)\cdot 3^x\\&=8\cdot 3^x=2^3\cdot 3^x\end{aligned}$$

由归纳法可知函数$U=3^x$的n阶差分为

$\Delta^n U_x=\Delta^n 3^x=2^n\cdot 3^x$。

二、数列的差分

当函数$U=f(x)$中的自变量x只能取整数值时，我们称$U=f(x)$为整标函数。将整标函数值依自变量增大的次序排列出来有

U_0，U_1，U_2，……，U_n，……，

这一串数叫做数列，简记为$\{U_k\}$　（$k=0$，1，2，…）

例如，$U=2^{-k}$是一整标函数，由此可得数列$\{2^{-k}\}$：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots\cdots$$

数列符号除用$\{U_k\}$表示外，还常用符号$\{G_k\}$，$\{R_k\}$等表示。若已经指明x取整数值，数列符号也可用$\{U_x\}$来表示。

定义 设数列$\{U_k\}$ $(k=0, 1, 2, \cdots)$，称

$$\Delta U_k = U_{k+1} - U_k \qquad (1-6)$$

为给定数列$\{U_k\}$的一阶差分。类似可定义数列的n阶差分$\Delta^n U_k$。

下面我们引进高阶等差级数的概念做为巩固差分概念的一个例子。

设有一数列

$$U_0, U_1, \cdots\cdots, U_n, \cdots \qquad (1-7)$$

如果接连地从它的后一项减去前一项，那末就得到原数列（1—7）的第一次差所构成的数列

$$U_1-U_0, U_2-U_1, \cdots\cdots, U_n-U_{n-1}, \cdots \qquad (1-8)$$

再接连地将（1—8）的后一项减去前一项又得到数列（1—7）的第二次差所构成的数列，依此类推，布列下表：

	U_0，	U_1，	U_2，	U_3，	U_4，$\cdots$	
一次差	ΔU_0，	ΔU_1，	ΔU_2，	ΔU_3，$\cdots$		
二次差	$\Delta^2 U_0$，	$\Delta^2 U_1$，	$\Delta^2 U_2$，$\cdots$			
三次差	$\Delta^3 U_0$，	$\Delta^3 U_1$，$\cdots$				
四次差	$\Delta^4 U_0 \cdots$					

上表恰好构成一三角形表。从此三角形表中可以看出，由上面函数值开始往右下方一列数值中每个足数皆相同，我们将这些足数相同的各阶差分称为该函数值的领导差分。如ΔU_0，$\Delta^2 U_0$，$\Delta^3 U_0$等即为U_0的领导差分。

如果作了r次，数列（1—7）的每个第r次差都相等，

那末以后的各次差都等于零，则称数列（1—7）为r阶等差数列，与这样的数列相应的级数称为r阶等差级数。一阶等差级数就是通常的算术级数。

〔**例1**〕考虑数列$\{U_k\}=\{k^3\}$（$k=1，2，\cdots$）；

	1		8		27		64		125…
一次差		7		19		37		61…	
二次差			12		18		24…		
三次差				6		6			
四次差					0				

该数列的第三次差都相等（皆为6），故此数列为三阶等差数列。相应的级数为

$$1+8+27+64+125+\cdots$$

或

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots$$

为三阶等差级数。函数值$U_1=1$的领导差分为

$$\Delta U_1=7，\Delta^2 U_1=12，\Delta^3 U_1=6，\cdots$$

我国古代关于高阶等差级数的研究到宋元时期取得了很大进展。北宋的沈括，南宋的杨辉，元朝朱世杰等都在高阶等差级数理论及高阶等差级数求和方面做了大量的工作，成就很大，在中国和世界数学史上有较高地位。

三、差分的性质

性质1　若C为常数，则$\Delta C=0$。

证明：$\Delta C=C-C=0$

只要C_x是一个以1为周期的函数；$C_{x+1}=C_x$就有ΔC_x

$= 0$。

性质2 设U_x、V_x为x的函数，α、β为常数，那末就有

$$\Delta^n (\alpha U_x+\beta V_x) = \alpha\Delta^n U_x+\beta\Delta^n V_x \qquad (1-9)$$

证明：

$$\Delta(\alpha U_x+\beta V_x) = (\alpha U_{x+1}+\beta V_{x+1})-(\alpha U_x+\beta V_x)$$
$$= \alpha(U_{x+1}-U_x)+\beta(V_{x+1}-V_x)$$
$$= \alpha\Delta U_x+\beta\Delta V_x$$

同理，不断使用差分的定义，我们有

$$\Delta^2(\alpha U_x+\beta V_x) = \Delta[\Delta(\alpha U_x+\beta V_x)]$$
$$= (\alpha U_{x+2}+\beta V_{x+2})-2(\alpha U_{x+1}+\beta V_{x+1}) + (\alpha U_x+\beta V_x)$$
$$= \alpha(U_{x+2}-2U_{x+1}+U_x)+\beta(V_{x+2}-2V_{x+1}+V_x)$$
$$= \alpha\Delta^2 U_x+\beta\Delta^2 V_x$$

用归纳法可证

$$\Delta^n(\alpha U_x+\beta V_x) = \alpha\Delta^n U_x+\beta\Delta^n V_x (n=1, 2, 3, \cdots)$$

该性质称为有限差分的线性性质。

性质3 （乘积的差分）

$$\Delta (U_x\cdot V_x) = U_x\Delta V_x+V_{x+1}\Delta U_x \qquad (1-10)$$

或

$$\Delta (U_x\cdot V_x) = V_x\Delta U_x+U_{x+1}\Delta V_x \qquad (1-11)$$

证明： （只证（1—10））

$$\Delta (U_xV_x) = U_{x+1}V_{x+1}-U_xV_x$$
$$= U_{x+1}V_{x+1}-U_xV_{x+1}+U_xV_{x+1}-U_xV_x$$
$$= V_{x+1}(U_{x+1}-U_x)+U_x(V_{x+1}-V_x)$$
$$= V_{x+1}\Delta U_x+U_x\Delta V_x$$

性质 4 （分部性质）

$$\sum_{x=0}^{n} U_x \Delta V_x = U_{n+1} V_{n+1} - U_0 V_0 - \sum_{x=0}^{n} V_{x+1} \Delta U_x \tag{1—12}$$

证明： 设有x的函数W_x，我们有

$$\sum_{x=0}^{n} \Delta W_x = \Delta W_0 + \Delta W_1 + \cdots + \Delta W^n$$

$$= (W_1 - W_0) + (W_2 - W_1) + \cdots$$

$$+ (W_n - W_{n-1}) + (W_{n+1} - W_n)$$

$$= W_{n+1} - W_0$$

令 $W_x = U_x V_x$，并运用性质 3

$$\sum_{x=0}^{n} \Delta (U_x V_x) = \sum_{x=0}^{n} (V_{x+1} \Delta U_x + U_x \Delta V_x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} V_{x+1} \Delta U_x + \sum_{x=0}^{n} U_x \Delta V_x$$

$$= (U_{n+1} V_{n+1}) - (U_0 V_0)$$

从而有

$$\sum_{x=0}^{n} U_x \Delta V_x = U_{n+1} V_{n+1} - U_0 V_0 - \sum_{x=0}^{n} V_{x+1} \Delta U_x$$

证毕。

特别地，在（1—12）中令$U_x = 1$，$\Delta U_x = 0$，得

$$\sum_{x=0}^{n} \Delta V_x = V_{n+1} - V_0 = V_x \Big|_0^{n+1} \tag{1—13}$$

性质5 （商的差分）

$$\Delta\left(\frac{U_x}{V_x}\right)=\frac{V_x\Delta U_x-U_x\Delta V_x}{V_x\cdot V_{x+1}} \qquad (1-14)$$

证明：由差分定义知

$$\Delta\left(\frac{U_x}{V_x}\right)=\frac{U_{x+1}}{V_{x+1}}-\frac{U_x}{V_x}$$

$$=\frac{V_xU_{x+1}-U_xV_{x+1}}{V_x\cdot V_{x+1}}$$

$$=\frac{(V_xU_{x+1}-U_xV_x)-(U_xV_{x+1}-U_xV_x)}{V_x\cdot V_{x+1}}$$

$$=\frac{V_x(U_{x+1}-U_x)-U_x(V_{x+1}-V_x)}{V_x\cdot V_{x+1}}$$

$$=\frac{V_x\Delta U_x-U_x\Delta_x}{V_x\cdot V_{x+1}}$$

证毕。

以上差分的五个性质是很有用处的，读者若有兴趣，还可以和下面五个微积分公式进行比较，从而探讨差分学与微积分的深刻联系。

$dc=0$；

$d(\alpha U_x+\beta V_x)=\alpha dU_x+\beta dV_x$；

$d(U_xV_x)=U_xdV+V_xdU_x$；

$\int U_xdV_x=U_xV_x-\int V_xdU_x$；

$$d\left(\frac{U_x}{V_x}\right)=\frac{V_xdU_x-U_xdV_x}{V_x^2}$$

四、差分公式

利用差分定义和差分性质可以推导下面的公式：

1．若a、b为常数，

$\Delta\ (a+bx)\ =b$；

2．$\Delta^n x^n = n!$；

3．$\Delta\ (\frac{1}{x})\ =\frac{-1}{x(x+1)}$；

4．$\Delta\ (\frac{1}{x^2})\ =\frac{-(2x+1)}{x^2(x+1)^2}$；

5．若a、r为常数，

$\Delta(ar^x)=a(r-1)r^x$；

6．$\Delta lnx = ln(1+\frac{1}{x})$ ；

7．$\Delta C_x^n = C_x^{n-1}$．

以上公式不难推导，我们仅举一例，其余公式的导出留给读者做为练习。

〔例 2〕 推导公式 7 ：$\Delta C_x^n = C_x^{n-1}$．

$$\Delta C_x^n = C_{x+1}^n - C_x^n = \frac{1}{n!}(x+1)\cdot x\cdots(x+1-n+1)$$

$$-\frac{1}{n!}x\cdot(x-1)\cdots(x-n+1)$$

$$=\frac{1}{n!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+2)(x+1-x+n-1)$$

$$=\frac{1}{n!}x(x-1)\cdots(x-n+2)\cdot n$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}x(x-1)\cdots(x-n+2)$$

$$=C_x^{n-1}$$

8. 三角函数的差分

利用差分的定义可以推出下面三角函数的差分公式，其中a、b皆为常数。

(1) $\Delta\sin(a+bx)=2\sin\frac{b}{2}\cos(a+\frac{b}{2}+bx)$；

(2) $\Delta\cos(a+bx)=-2\sin\frac{b}{2}\sin(a+\frac{b}{2}+bx)$；

(3) $\Delta tg(a+bx)=\frac{\sin b}{\cos(a+bx)\cos(a+b+bx)}$，

(4) $\Delta ctg(a+bx)=\frac{-\sin b}{\sin(a+bx)\cos(a+b+bx)}$，

(5) $\Delta arctg(a+bx)=$

$$arctg\frac{b}{b^2x^2+(b^2+2ab)x+ab+a^2+1},$$

当$a=0$，$b=1$时；

(6) $\Delta arctg x=arctg\frac{1}{x^2+x+1}$；

(7) $\Delta\operatorname{arcctg}(a+bx)=$

$$\operatorname{arcctg}\frac{b}{b^2x^2+(b^2+2ab)x+ab+a^2+1}-\frac{\pi}{2},$$ 当$a=0$，$b=1$时；

(8) $\Delta\operatorname{arcctg}x=\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{x^2+x+1}-\dfrac{\pi}{2}$.

〔**例3**〕 推导公式（4）：

$$\Delta\operatorname{ctg}(a+bx)=\operatorname{ctg}[a+b(x+1)]-\operatorname{ctg}(a+bx)$$

$$=\operatorname{ctg}(a+b+bx)-\operatorname{ctg}(a+bx)$$

$$=\frac{\cos(a+b+bx)}{\sin(a+b+bx)}-\frac{\cos(a+bx)}{\sin(a+bx)}$$

$$=\frac{\cos(a+b+bx)\sin(a+bx)}{\sin(a+b+bx)\sin(a+bx)}$$

$$\frac{-\cos(a+bx)\sin(a+b+bx)}{}$$

$$=\frac{\sin(a+bx-a-b-bx)}{\sin(a+bx)\sin(a+b+bx)}$$

$$=\frac{-\sin b}{\sin(a+bx)\sin(a+b+bx)}$$

〔**例4**〕 推导公式（8）：

因为

$$\Delta\operatorname{arcctg}x=\operatorname{arcctg}(x+1)-\operatorname{arcctg}x$$

$$=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(x+1)-\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right]$$