概率统计学习指导

何灿芝编

概率统计学习指导
何灿芝编
责任编辑：胡海清
*
湖南科学技术出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新華書店发行　湖南省新华印刷二厂印刷
*
1984年2月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米　1/32　印张：12.25　字数：280,000
印数：1——23,200
统一书号：13204·92　定价：1.70元

前　言

概率统计已被广泛地应用到各个科学分支和各个生产部门中．正如美籍中国数学家钟开莱先生在1974年3月所说的那样：在过去半个世纪中，概率论从一个较小的、孤立的课题发展成为一个与数学许多其它分支相互影响，内容宽广而深入的学科．同时，它对各种应用科学，诸如统计学、运筹学、生物学、经济学和心理学的数学化起着中心作用——这里仅举几个在它们的名称前早已牢固地安上“数学”这个前缀词的科学．

的确，概率统计一经与实际相结合，便立即呈现出“千树万树梨花开”的繁荣景象．它不但在科学领域中赢得了地位，而且在国民经济中赢得了地位．因此，它不但在大学课程中赢得了位置，而且在中学和一些专科学校的课程中也赢得了位置．于是学习它和要求学习它的人与日俱增，几乎出现了一种“概率热”．我们编写此书的目的，就在于给初学概率统计的读者提供一些方便．

本书的特点是：①以工程数学的概率统计教材为线索，由浅入深进行指导，力求重点和难点突出．书中有大量评注和思考问题，能帮助读者深刻理解、牢固掌握基本概念；有例题210道，能帮助读者打开思路，掌握基

本解题方法；有习题203道，能帮助读者提高分析问题和解决问题的能力；还附有各专业试题8份共有试题150道，研究生考题40道，供读者选用。②内容适用于理工科大学、电大、夜大和各种专科学校学过微积分的学生；对于没有学过微积分的读者，也可以取第一章的有关内容；对新开《概率统计》课的老师也许能有所参考。

在此书的编写过程中，得到了许多老师和学生的热情帮助，并由唐象能副教授审查了原稿，提出了宝贵的修改意见．在此，一并表示衷心的感谢。

限于编者的水平，本书缺点和错误难免，谨请读者批评指正。

编　者

一九八三年于岳麓山下

目　录

（注：书中凡标有＊的部分，难度大一点）

浅谈学习概率统计

恩格斯说："在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。"概率统计正是发现和研究这些规律的科学。它研究的对象是随机现象(偶然性的东西)。这种现象不能用"因果关系"加以严格控制和准确预测，也不能用一些简单的物理定律加以概括，而须从大量观测中综合分析，找出规律性。这就决定了概率统计独特的思想方法，使初学者感到它的基本概念抽象，基本方法难以掌握，习题难作。这是学习的不利因素。但只要讲究学习方法，勤奋努力，不利因素就会变成有利因素。概率统计之难恰好能培养读者分析问题和解决问题的能力，增长聪明才智。

那么应该怎样来学习概率统计呢？这里谈两点，供读者参考。

一　深刻理解、牢固掌握基本概念。

深刻理解、牢固掌握基本概念是学好概率统计的基础。特别是一些承上启下的关键概念，必须经过多次反复，逐步加深理解，以达到最后较牢固地掌握它。如"概率"这个概念是由具体(频率的稳定值)⟶抽象(公理化定义)⟶具体(古典定义)，而逐步在脑子里建立起来的。一些重要的基本概念还必须加以比较、应用，才能牢固地掌握。如：1.频率与概率；2.无条件概率与条件概率；3.事件的互逆，互不相容和相互独立；4.随机变量与普通变量；5.随机变量的分布函数与随机变量函数的分

布；6.随机变量的相关与独立；7.大数定律与中心极限定理；8.小概率事件与实际推断原理；9.样本与总体；10.参数估计与假设检验，等等。只有了解它们的关系与区别，才能深刻地理解，牢固地掌握，熟炼地运用这些基本概念。

二　多做练习，狠抓解题基本功。

多做练习，多加思考，在解题上狠下功夫，是学好概率统计的关键。我国著名数学家华罗庚说过：学数学不作练习，好比入宝山而空返。学概率统计更是这样。

解题时值得注意的几个问题：

1.注意抓典型问题。概率统计中遇到的是从生产、生活到科学技术各个领域的五花八门的问题，这就决定了问题的多样化、复杂性，解题时要用到多种工具，而且灵活性很大，使初学者往往在某个问题面前束手无策。这就需要抓住一些有代表性的典型问题，从中打开思路，找到规律，学会解题的一些基本方法。譬如，对古典概型，若能熟炼地掌握三类典型问题（摸球问题，分房问题，随机取数问题），则常遇到的大部分古典问题就可归结为这三类问题之一来处理。

2.注意问题的转化。有时将难解的复杂问题转化成其它问题就迎刃而解了。例如，若要求和事件的概率，不好求时就可以将问题转化为求积事件的概率，即$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=1-P(\bar{A}_1\bar{A}_2\cdots\bar{A}_n)$；反之，若要求积事件的概率，不好求时也可转化为和事件的概率来求。

3.注意事件的分解。有些复杂事件的概率难于计算，但将它分解成多个互不相容的简单事件之和就好计算了，这就是全概公式的应用。至于如何将事件分解，请见全概公式之后的“注意”。

4.注意对模棱两可的问题进行全面的、具体的分析。例如，

将n个球装入m个盒的问题，要看球是否可分辨，还要看盒是否可分辨。请见例1.39和练习1.6。

5.注意一题多解．解概率统计问题，特别是概率问题，有时对同一问题，由于思路不同，可能导致不同的解法，甚至有的是错误的解法。学会直接和间接，从正面下手和从反面下手等多种解题方法，可以比较优劣，纠正错误，提高解题能力。

第一章　随机事件与随机事件的概率

粗略地说，在一定条件下，可能发生也可能不发生的事情称为随机事件，随机事件发生可能性的大小称为概率。所谓一定条件是指非常广泛的一类试验——随机试验。我们考虑的随机事件总是伴随着随机试验而发生的。

学习这一章的基本要求是

1. 掌握随机试验，样本空间和随机事件的概念，熟悉事件之间的关系与运算。

2. 正确理解随机事件的概率定义，熟记概率的有关性质。

3. 熟练掌握古典概型的三类问题：(一)摸球问题；(二)分房问题；(三)随机取数问题。

4. 掌握条件概率和有关条件概率的三个公式：乘法公式；全概率公式和逆概率公式。

5. 掌握随机事件和随机试验的独立性概念，并能熟练运用。

6. 了解事件的互逆，互斥(互不相容)和相互独立三者之间的关系。

一　随机试验与随机事件

1. [随机试验]　具有下列三个特性的试验称为随机试验：

1°　试验可以在相同条件下重复进行；

2° 各次试验的结果不一定相同，但能事先明确试验的所有可能结果；

3° 进行某一次试验之前，不能确定哪个结果会发生。

随机试验（以后简称试验）常用E表示。若试验$\widetilde{E}$是由一串试验$E_1, E_2, \cdots, E_n$依次各做一次所组成的，则称$\widetilde{E}$为复合试验，记作

$$\widetilde{E}=E_1\times E_2\times\cdots\times E_n.$$

例1.1 设有下列试验：

E_1 掷一枚硬币，观察正(H)反(T)出现的情况。

E_2 袋中有编号为1，2，…，n的n个球，从中任取一个球，观察球的号码。

E_3 一个质地均匀的陀螺的圆周上均匀地刻有区间$[0,3)$上诸数字，在桌面上旋转它，当它停下来时，观察圆周与桌面接触处的刻度。

E_4 将一枚硬币连抛三次，观察正面出现的情况。

显然，E_1-E_4都是随机试验，它们均满足条件1°—3°，且E_4是复合试验。

2．［随机事件］ 在一次随机试验中，可能发生也可能不发生，而在大量的重复试验中具有某种统计规律性的事情称为随机事件（简称事件）常以大写字母A，B，C表示。每次试验中必然发生的事情称为必然事件，记作S；必然不发生的事情称为不可能事件，记作ϕ。而试验的每一个可能结果称为基本事件或称为样本点，常以e表示。

［注意］（i）必然事件与不可能事件本来是描写绝对型现象的，但为了方便，把它们看作特殊的随机事件；（ii）基本事件是最简单的随机事件，试验中的任何事件都是由基本事件组成的。

例1.2 在E_1中，$A=\{$出现正面$H\}$是随机事件，且是基本事件；在E_2中，$A_1=\{$取的号码数小于3$\}$是随机事件，$A_2=\{$取的号码数大于0$\}$是必然事件，$A_3=\{$取的号码数小于1$\}$是不可能事件，$A_4=\{$取的号码是$n\}$是基本事件。

3．［样本空间］ 在随机试验E中，基本事件（样本点）的全体所组成的集合称为E的样本空间（基本空间），以S表示。

例1.3 E_1的样本空间$S_1=\{H, T\}$；E_2的样本空间$S_2=\{1, 2, \cdots, n\}$；E_3的样本空间$S_3=[0, 3)$；E_4的样本空间$S_4=\{(HTT), (THT), (TTH), (HHT), (HTH), (THH), (HHH), (TTT)\}$。

例1.4 袋中有5只球，其中有三只红球，编号为1,2,3，有二只黄球，编号为一，二。现从中任取一只球，E_1：观察颜色；E_2观察号码。试分别写出E_1与E_2的样本空间。

解 E_1的样本空间为$S_1=\{$红，黄$\}$；

E_2的样本空间为$S_2=\{1, 2, 3,$ 一，二$\}$。

［注意］ (i) 样本空间是由随机试验决定的，不同的试验具有不同的样本空间，如例1.4中，$E_1\neq E_2$，故$S_1\neq S_2$。(ii) 样本空间可以是各种对象的集合，即可以是数集也可以不是数集。

4．［事件之间的关系与运算］ 设E是随机试验，S是样本空间，也表示必然事件，ϕ表示不可能事件，也表示空集。$A, B, A_i (i=1, 2, \cdots)$是$E$的事件。

1° 子事件 若A发生$\Longrightarrow B$发生，则称A是B的子事件，记作$A\subset B$或$B\supset A$。间子关系

2° 相等事件 若A发生$\Longleftrightarrow B$发生；或$A\subset B$且$B\subset A$，则称A与B是相等事件，记作$A=B$。

3° 和事件 表示A与B中至少有一个发生的事件称为A与B的和事件记作$A\cup B$，类似地，表示$A_1, A_2, \cdots, A_i\cdots$中至少有

一个发生的事件称为A_1，A_2，…，A_i，…，的和事件，记作$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_i \cup \cdots = \bigcup_i A_i \quad i=1，2，\cdots$。

4° 积事件 表示A与B同时发生的事件称为A与B的积事件，记作$A \cap B$，或简记为AB。类似地，表示A_1，$A_2 \cdots A_i$，…同时发生的事件称为A_1，A_2，…，A_i…的积事件，记作$A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_i \cap \cdots = \bigcap_i A_i = A_1 A_2 \cdots A_i \cdots$。

5° 差事件 表示A发生而B不发生的事件称为A与B的差事件，记作$A-B$。

6° 互不相容事件 若A与B不能同时发生，即$AB=\phi$，则称A与B是互相不相容事件(或互斥事件)，反之称A与B相容。

7° 对立事件 若A与B中有且仅有一个发生，即$A \cup B = S$且$AB=\phi$，则称A是B的对立事件，或B是A的对立事件，A的对立事件记作$\bar{A}$。

[注意] (i) 事件是由基本事件组成的，故它是样本空间的子集，事件之间的关系与运算完全与集合之间的关系和运算一致，只是术语不同而已，请见下表。

记号	概率论	集合论
S	样本空间，必然事件	空间
ϕ	不可能事件	空集
e	基本事件(样本点)	元素
A	事件	子集
$\bar{A}$	A的对立事件	A的余集
$A \subset B$	A是B的子事件	A是B的子集
$A=B$	A与B是相等事件	A与B是相等集合
$A \cup B$	A与B的和事件	A与B的并集
$A \cap B$	A与B的积事件	A与B的交集
$A-B$	A与B的差事件	A与B的差集
$AB=\phi$	A与B互不相容	A与B无相同元素

(ii) 事件运算的性质完全相同于集合运算的性质。

5. [事件之间的常用关系]：

(一) 设A、B、C为三事件，则

1° $A\cup B=B\cup A$; $AB=BA$. (交换律)

2° $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$. (结合律)

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

3° $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$. (分配律)

$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

(二) 设$A_i(i=1,2,\cdots)$是有限个或可列个事件，则

4° $\overline{\bigcup_i A_i}=\bigcap_i \bar{A}_i$. (隶莫根定理)

5° $\overline{\bigcap_i A_i}=\bigcup_i \bar{A}_i$.

特别有 $\overline{A_1\cup A_2}=\bar{A}_1\cap\bar{A}_2$; $\overline{A_1\cap A_2}=\bar{A}_1\cup\bar{A}_2$.

(三) 设A, B为任意二事件，则

6° $A\cup B=A\cup(B-AB)=A\cup B\bar{A}$ 且

$A(B-AB)=\phi$, $A(B\bar{A})=\phi$.

7° $A=AB\cup A\bar{B}$ 且 $AB\cap A\bar{B}=\phi$.

8° $A-B=A\bar{B}$.

9° 若$A\subset B$，则$\bar{A}\supset\bar{B}$.

10° 若$A\subset B$，则$B=A\cup(B-A)$ 且 $A(B-A)=\phi$.

例1.5 设A,B,C为三事件，试用事件的运算关系表示下列事件：

(1) A,B,C都发生；

(2) A,B,C都不发生；

(3) A,B,C中至少有一个发生；

(4) A,B,C中最多有一个发生；

(5) A,B,C中至少有两个发生；

(6) A,B,C中最多有两个发生.

解 (1) $\{A,B,C$都发生$\}=ABC$.

(2) $\{A,B,C$都不发生$\}$

$=\{\bar{A},\ \bar{B},\ \bar{C}$都发生$\}=\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

(3) $\{A,B,C$中至少有一个发生$\}$

$=\{A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\}\cup\{\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}\}\cup$

$(ABC)=A\cup B\cup C$.

(4) $\{A,B,C$中最多有一个发生$\}$

$=\{A$、B、C都不发生或只有一个发生$\}$

$=(\bar{A}\bar{B}\bar{C})\cup\{A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\}$.

(5) $\{A,B,C$中至少有两个发生$\}$

$=\{AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\}\cup(ABC)$

$=AB\cup BC\cup AC$.

(6) $\{A,B,C$中最多有两个发生$\}$

$=(\bar{A}\bar{B}\bar{C})\cup\{A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\}$

$\cup\{AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC\}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$.

上面事件也可以用相应的对立事件来表示. (1) 的对立事件是(6)，事实上有

$$\overline{ABC}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}.$$

千万不要以为(1) 的对立事件是(2). 同理，(2)的对立事件是(3)，(4)的对立事件是(5).

〔注意〕 (i) 我们所考虑的事件的运算是对同一个试验中的事件而言的. (ii) 事件A不发生则它的对立事件$\bar{A}$一定发生. (iii) 只要有事件A包含的基本事件出现，就说A发生。

例1.6 E:某地区有100人是1920年出生的，考察到2000年