

概率统计学习指导

何灿芝编



概率统计学习指导

何 灿 芝 编

责任编辑：胡海清

*

湖南科学技术出版社出版

(长沙市展览馆路14号)

湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷二厂印刷

*

1984年2月第1版第1次印刷

开本：787×1092毫米 1/32 印张：12.25 字数：280,000

印数：1—23,200

统一书号：13204·92 定价：1.70元

前 言

概率统计已被广泛地应用到各个科学分支和各个生产部门中。正如美籍中国数学家钟开莱先生在1974年3月所说的那样：在过去半个世纪中，概率论从一个较小的、孤立的课题发展成为一个与数学许多其它分支相互影响，内容宽广而深入的学科。同时，它对各种应用科学，诸如统计学、运筹学、生物学、经济学和心理学的数学化起着中心作用——这里仅举几个在它们的名称前早已牢固地安上“数学”这个前缀词的科学。

的确，概率统计一经与实际相结合，便立即呈现出“千树万树梨花开”的繁荣景象。它不但在科学领域中赢得了地位，而且在国民经济中赢得了地位。因此，它不但在大学课程中赢得了位置，而且在中学和一些专科学校的课程中也赢得了位置。于是学习它和要求学习它的人与日俱增，几乎出现了一种“概率热”。我们编写此书的目的，就在于给初学概率统计的读者提供一些方便。

本书的特点是：①以工程数学的概率统计教材为线索，由浅入深进行指导，力求重点和难点突出。书中有大量评注和思考问题，能帮助读者深刻理解、牢固掌握基本概念；有例题210道，能帮助读者打开思路，掌握基

本解题方法；有习题203道，能帮助读者提高分析问题和解决问题的能力；还附有各专业试题8份共有试题150道，研究生考题40道，供读者选用。②内容适用于理工科大学、电大、夜大和各种专科学校学过微积分的学生；对于没有学过微积分的读者，也可以取第一章的有关内容；对新开《概率统计》课的老师也许能有所参考。

在此书的编写过程中，得到了许多老师和学生的热情帮助，并由唐象能副教授审查了原稿，提出了宝贵的修改意见。在此，一并表示衷心的感谢。

限于编者的水平，本书缺点和错误难免，谨请读者批评指正。

编 者

一九八三年于岳麓山下

目 录

浅谈学习概率统计	(1)
第一章 随机事件与随机事件的概率	(4)
一 随机试验与随机事件	(4)
1. 随机试验 2. 随机事件 3. 样本空间 4. 事件之间的关系与运算 5. 事件之间的常用关系	(4)
二 随机事件的概率	(10)
1. 频率 2. 概率的统计定义 3. 概率的性质 *4. 概率的公理化定义	(10)
三 古典概率与几何概率	(14)
1. 古典概型 2. 概率的古典定义 3. 几何概型	(14)
四 条件概率及其有关公式	(27)
1. 条件概率 2. 乘法公式 3. 全概率公式 4. 逆概率公式	(27)
五 独立性	(37)
1. 事件的独立性 2. 试验的独立性	(37)
六 问答与思考	(41)
练习一	(47)
第二章 一维随机变量及其分布	(52)
一 一维随机变量及其分布函数	(52)
1. 一维随机变量的定义 2. 随机变量的概率分布 3. 分布函数的定义 4. 分布函数的性质	(52)
二 一维离散型随机变量及其分布律	(56)

1. 定义	2. 分布律的性质	3. 几个常用分布	(56)
三 一维连续型随机变量及其分布密度			(64)
1. 定义	2. 性质	3. 几个常用分布	(64)
四 问答与思考			(74)
练习二			(80)
第三章 多维随机变量及其分布			(83)
一 多维随机变量及其分布			(83)
1. 多维随机变量	2. 分布函数	3. 二维分布函数的性质	
4. 二维离散型变量及其分布律	5. 二维连续型随机变量及其分布密度		(83)
二 边缘分布			(91)
1. 边缘分布函数	2. 离散型随机变量的边缘分布律	3. 二维连续型随机变量的边缘分布密度	(91)
三 条件分布			(98)
1. 离散型随机变量的条件分布律	2. 连续型随机变量的条件分布密度		(98)
四 随机变量的相互独立性			(102)
1. 随机变量相互独立的定义	2. 独立性的等价条件		(102)
五 问答与思考			(110)
练习三			(116)
第四章 随机变量的函数及其分布			(119)
一 一维随机变量的函数及其分布			(119)
1. 一维离散型随机变量的函数的分布律	2. 一维连续型随机变量的函数的分布		(119)
二 二维随机变量的函数及其分布			(126)
1. 二维离散型随机变量的函数的分布	2. 二维连续型随机变量的函数及其分布	3. 二维随机变量的函数组的分布	(126)
三 问答与思考			(147)

练习四	(152)
第五章 随机变量的数字特征	(155)
一 数学期望	(155)
1. 数学期望的定义 2. 随机变量的函数的数学期望 3. 数学期望的性质	(155)
二 方差和均方差	(166)
1. 方差的定义 2. 方差的性质	(166)
三 协方差和相关系数	(173)
1. 协方差和相关系数的定义 2. 协方差的性质 3. 有关相关系数的定理 *4. 原点矩与中心矩 *5. 混合矩与协方差矩阵	(173)
四 问答与思考	(183)
练习五	(188)
第六章 极限定理	(192)
一 大数定律	(192)
1. 随机变量的收敛性 2. 实际推断原理 3. 大数定律的一般提法 4. 车贝晓夫不等式 5. 几个常用的大数定律	(192)
二 中心极限定理	(200)
1. 中心极限定理的一般提法 2. 几个常见的中心极限定理	(200)
三 问答与思考	(210)
练习六	(214)
第七章 参数估计	(217)
一 随机样本与统计量	(217)
1. 总体与样本 2. 统计量 3. 常用统计量及其分布	(217)
二 参数的点估计方法	(220)
1. 顺序统计量法 2. 矩估计法 3. 极大似然估计法 4. 估计量的简单性质	(220)

三 区间估计.....	(232)
1. 置信区间 2. 正态母体的均值与方差的区间估计 3. 二正 态母体均值差、方差比的区间估计.....	(232)
四 问答与思考.....	(241)
练习七.....	(244)
第八章 假设检验.....	(247)
一 假设检验的基本步骤和承担的风险.....	(247)
1. 基本步骤 2. 风险 3. 判断结论	(247)
二 单个正态总体的假设检验问题.....	(249)
三 双正态总体的假设检验问题.....	(255)
四 问答与思考.....	(262)
练习八.....	(266)
练习解答.....	(269)
附表 1 标准正态分布表.....	(343)
附表 2 泊松分布表.....	(345)
附表 3 t 分布表	(347)
附表 4 χ^2 分布表.....	(349)
附表 5 F 分布表	(352)
附录I 排列组合.....	(361)
附录II 试题选编.....	(363)
参考书目.....	(384)

(注: 书中凡标有*的部分, 难度大一点)

浅谈学习概率统计

恩格斯说：“在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性始终是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只是在于发现这些规律。”概率统计正是发现和研究这些规律的科学。它研究的对象是随机现象（偶然性的东西）。这种现象不能用“因果关系”加以严格控制和准确预测，也不能用一些简单的物理定律加以概括，而须从大量观测中综合分析，找出规律性。这就决定了概率统计独特的思想方法，使初学者感到它的基本概念抽象，基本方法难以掌握，习题难作。这是学习的不利因素。但只要讲究学习方法，勤奋努力，不利因素就会变成有利因素。概率统计之难恰好能培养读者分析问题和解决问题的能力，增长聪明才智。

那么应该怎样来学习概率统计呢？这里谈两点，供读者参考。

一 深刻理解、牢固掌握基本概念。

深刻理解、牢固掌握基本概念是学好概率统计的基础。特别是一些承上启下的关键概念，必须经过多次反复，逐步加深理解，以达到最后较牢固地掌握它。如“概率”这个概念是由具体（频率的稳定值） $\rightarrow$ 抽象（公理化定义） $\rightarrow$ 具体（古典定义），而逐步在脑子里建立起来的。一些重要的基本概念还必须加以比较、应用，才能牢固地掌握。如：1. 频率与概率；2. 无条件概率与条件概率；3. 事件的互逆，互不相容和相互独立；4. 随机变量与普通变量；5. 随机变量的分布函数与随机变量函数的分

布；6. 随机变量的相关与独立；7. 大数定律与中心极限定理；8. 小概率事件与实际推断原理；9. 样本与总体；10. 参数估计与假设检验，等等。只有了解它们的关系与区别，才能深刻地理解，牢固地掌握，熟练地运用这些基本概念。

二 多做练习，狠抓解题基本功。

多做练习，多加思考，在解题上狠下功夫，是学好概率统计的关键。我国著名数学家华罗庚说过：学数学不作练习，好比入宝山而空返。学概率统计更是这样。

解题时值得注意的几个问题：

1. **注意抓典型问题。** 概率统计中遇到的是从生产、生活到科学技术各个领域的五花八门的问题，这就决定了问题的多样化、复杂性，解题时要用到多种工具，而且灵活性很大，使初学者往往在某个问题面前束手无策。这就需要抓住一些有代表性的典型问题，从中打开思路，找到规律，学会解题的一些基本方法。譬如，对古典概型，若能熟练地掌握三类典型问题（摸球问题，分房问题，随机取数问题），则常遇到的大部分古典问题就可归结为这三类问题之一来处理。

2. **注意问题的转化。** 有时将难解的复杂问题转化成其它问题就迎刃而解了。例如，若要求和事件的概率，不好求时就可以将问题转化为求积事件的概率，即 $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \dots \bar{A}_n)$ ；反之，若要求积事件的概率，不好求时也可转化为和事件的概率来求。

3. **注意事件的分解。** 有些复杂事件的概率难于计算，但将它分解成多个互不相容的简单事件之和就好计算了，这就是全概公式的应用。至于如何将事件分解，请见全概公式之后的“注意”。

4. **注意对模棱两可的问题进行全面的、具体的分析。** 例如，

将 n 个球装入 m 个盒的问题，要看球是否可分辨，还要看盒是否可分辨。请见例1.39和练习1.6。

5. 注意一题多解。解概率统计问题，特别是概率问题，有时对同一问题，由于思路不同，可能导致不同的解法，甚至有的是错误的解法。学会直接和间接，从正面下手和从反面下手等多种解题方法，可以比较优劣，纠正错误，提高解题能力。

第一章 随机事件与随机事件的概率

粗略地说，在一定条件下，可能发生也可能不发生的事情称为随机事件，随机事件发生可能性的大小称为概率。所谓一定条件是指非常广泛的一类试验——随机试验。我们考虑的随机事件总是伴随着随机试验而发生的。

学习这一章的基本要求是

1. 掌握随机试验，样本空间和随机事件的概念，熟悉事件之间的关系与运算。
2. 正确理解随机事件的概率定义，熟记概率的有关性质。
3. 熟练掌握古典概型的三类问题：（一）摸球问题；（二）分房问题；（三）随机取数问题。
4. 掌握条件概率和有关条件概率的三个公式：乘法公式，全概率公式和逆概率公式。
5. 掌握随机事件和随机试验的独立性概念，并能熟练运用。
6. 了解事件的互逆，互斥（互不相容）和相互独立三者之间的关系。

一 随机试验与随机事件

1. 「随机试验」 具有下列三个特性的试验称为 随机试验：

1° 试验可以在相同条件下重复进行；

2° 各次试验的结果不一定相同，但能事先明确试验的所有可能结果；

3° 进行某一次试验之前，不能确定哪个结果会发生。

随机试验（以后简称试验）常用 E 表示。若试验 $\tilde{E}$ 是由一串试验 $E_1, E_2, \dots, E_n$ 依次各做一次所组成的，则称 $\tilde{E}$ 为复合试验，记作

$$\tilde{E} = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n.$$

例1.1 设有下列试验：

E_1 掷一枚硬币，观察正(H)反(T)出现的情况。

E_2 袋中有编号为 $1, 2, \dots, n$ 的 n 个球，从中任取一个球，观察球的号码。

E_3 一个质地均匀的陀螺的圆周上均匀地刻有区间 $[0, 3)$ 上诸数字，在桌面上旋转它，当它停下来时，观察圆周与桌面接触处的刻度。

E_4 将一枚硬币连抛三次，观察正面出现的情况。

显然， $E_1 - E_4$ 都是随机试验，它们均满足条件1°—3°，且 E_4 是复合试验。

2. [随机事件] 在一次随机试验中，可能发生也可能不发生，而在大量的重复试验中具有某种统计规律性的事情称为随机事件（简称事件）常以大写字母 A, B, C 表示。每次试验中必然发生的事情称为必然事件，记作 S ；必然不发生的事情称为不可能事件，记作 ϕ 。而试验的每一个可能结果称为基本事件或称为样本点，常以 e 表示。

[注意] (i) 必然事件与不可能事件本来是描写绝对型现象的，但为了方便，把它们看作特殊的随机事件；(ii) 基本事件是最简单的随机事件，试验中的任何事件都是由基本事件组成的。

例1.2 在 E_1 中, $A = \{\text{出现正面}H\}$ 是随机事件, 且是基本事件; 在 E_2 中, $A_1 = \{\text{取的号码数小于}3\}$ 是随机事件, $A_2 = \{\text{取的号码数大于}0\}$ 是必然事件, $A_3 = \{\text{取的号码数小于}1\}$ 是不可能事件, $A_4 = \{\text{取的号码是}n\}$ 是基本事件。

3. [样本空间] 在随机试验 E 中, 基本事件(样本点)的全体所组成的集合称为 E 的样本空间(基本空间), 以 S 表示。

例1.3 E_1 的样本空间 $S_1 = \{H, T\}$; E_2 的样本空间 $S_2 = \{1, 2, \dots, n\}$; E_3 的样本空间 $S_3 = [0, 3)$; E_4 的样本空间 $S_4 = \{(HTT), (THT), (TTH), (HHT), (HTH), (THH), (HHH), (TTT)\}$ 。

例1.4 袋中有5只球, 其中有三只红球, 编号为1, 2, 3, 有二只黄球, 编号为一, 二。现从中任取一只球, E_1 : 观察颜色; E_2 观察号码。试分别写出 E_1 与 E_2 的样本空间。

解 E_1 的样本空间为 $S_1 = \{\text{红, 黄}\}$;

E_2 的样本空间为 $S_2 = \{1, 2, 3, \text{一}, \text{二}\}$ 。

[注意] (i) 样本空间是由随机试验决定的, 不同的试验具有不同的样本空间, 如例1.4中, $E_1 \neq E_2$, 故 $S_1 \neq S_2$ 。(ii) 样本空间可以是各种对象的集合, 即可以是数集也可以不是数集。

4. [事件之间的关系与运算] 设 E 是随机试验, S 是样本空间, 也表示必然事件, ϕ 表示不可能事件, 也表示空集。 $A, B, A_i (i=1, 2, \dots)$ 是 E 的事件。

1° 子事件 若 A 发生 $\implies B$ 发生, 则称 A 是 B 的子事件, 记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$ 。

2° 相等事件 若 A 发生 $\iff B$ 发生; 或 $A \subset B$ 且 $B \subset A$, 则称 A 与 B 是相等事件, 记作 $A = B$ 。

3° 和事件 表示 A 与 B 中至少有一个发生的事件称为 A 与 B 的和事件记作 $A \cup B$, 类似地, 表示 $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ 中至少有

一个发生的事件称为 $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ 的和事件,记作 $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_i \cup \dots = \bigcup A_i \quad i=1, 2, \dots$.

4° 积事件 表示 A 与 B 同时发生的事件称为 A 与 B 的积事件,记作 $\underline{A \cap B}$,或简记为 $\underline{AB}$.类似地,表示 $A_1, A_2 \dots A_i, \dots$ 同时发生的事件称为 $A_1, A_2, \dots, A_i, \dots$ 的积事件,记作 $A_1 \cap A_2 \dots \cap A_i \cap \dots = \bigcap A_i = A_1 A_2 \dots A_i \dots$.

5° 差事件 表示 A 发生而 B 不发生的事件称为 A 与 B 的差事件,记作 $A - B$.

6° 互不相容事件 若 A 与 B 不能同时发生,即 $\underline{AB} = \phi$,则称 A 与 B 是互不相容事件(或互斥事件),反之称 A 与 B 相容.

7° 对立事件 若 A 与 B 中有且仅有一个发生,即 $A \cup B = S$ 且 $\underline{AB} = \phi$,则称 A 是 B 的对立事件,或 B 是 A 的对立事件, A 的对立事件记作 $\bar{A}$.

[注意] (i) 事件是由基本事件组成的,故它是样本空间的子集,事件之间的关系与运算完全与集合之间的关系和运算一致,只是术语不同而已,请见下表.

记 号	概 率 论	集 合 论
S	样本空间,必然事件	空间
ϕ	不可能事件	空集
ω	基本事件(样本点)	元素
A	事件	子集
$\bar{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A \subset B$	A 是 B 的子事件	A 是 B 的子集
$A = B$	A 与 B 是相等事件	A 与 B 是相等集合
$A \cup B$	A 与 B 的和事件	A 与 B 的并集
$A \cap B$	A 与 B 的积事件	A 与 B 的交集
$A - B$	A 与 B 的差事件	A 与 B 的差集
$AB = \phi$	A 与 B 互不相容	A 与 B 无相同元素

(ii) 事件运算的性质完全相同于集合运算的性质。

5. [事件之间的常用关系]:

(一) 设 A, B, C 为三事件, 则

$$1^\circ A \cup B = B \cup A, AB = BA. \quad (\text{交换律})$$

$$2^\circ (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C). \quad (\text{结合律})$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

$$3^\circ (A \cup B)C = (AC) \cup (BC). \quad (\text{分配律})$$

$$(AB) \cup C = (A \cup C)(B \cup C).$$

★ (二) 设 $A_i (i=1, 2, \dots)$ 是有限个或可列个事件, 则

$$4^\circ \overline{\bigcup_i A_i} = \bigcap_i \bar{A}_i. \quad (\text{隶莫根定理})$$

$$5^\circ \overline{\bigcap_i A_i} = \bigcup_i \bar{A}_i.$$

特别有 $\overline{A_1 \cup A_2} = \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2; \overline{A_1 \cap A_2} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2.$

(三) 设 A, B 为任意二事件, 则

$$6^\circ A \cup B = A \cup (B - AB) = A \cup B\bar{A} \quad \text{且}$$

$$A(B - AB) = \phi, A(B\bar{A}) = \phi.$$

$$7^\circ A = AB \cup A\bar{B} \quad \text{且} \quad AB \cap A\bar{B} = \phi.$$

$$8^\circ A - B = A\bar{B}.$$

$$9^\circ \text{若 } A \subset B, \text{ 则 } \bar{A} \supset \bar{B}.$$

$$10^\circ \text{若 } A \subset B, \text{ 则 } B = A \cup (B - A) \quad \text{且} \quad A(B - A) = \phi.$$

✓ 例1.5 设 A, B, C 为三事件, 试用事件的运算关系表示下列事件:

(1) A, B, C 都发生;

(2) A, B, C 都不发生;

(3) A, B, C 中至少有一个发生;

(4) A, B, C 中最多有一个发生;

(5) A, B, C 中至少有两个发生;

(6) A, B, C 中最多有两个发生.

解 (1) $\{A, B, C \text{都发生}\} = ABC.$

(2) $\{A, B, C \text{都不发生}\}$

$$= \{\bar{A}, \bar{B}, \bar{C} \text{都发生}\} = \bar{A} \bar{B} \bar{C}.$$

(3) $\{A, B, C \text{中至少有一个发生}\}$

$$= \{A \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C} \cup \bar{A} \bar{B} C\} \cup \{\bar{A} B C \cup A \bar{B} C \cup A B \bar{C}\} \cup \\ (ABC) = A \cup B \cup C.$$

(4) $\{A, B, C \text{中最多有一个发生}\}$

$$= \{A, B, C \text{都不发生或只有一个发生}\}$$

$$= (\bar{A} \bar{B} \bar{C}) \cup \{A \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C} \cup \bar{A} \bar{B} C\}.$$

(5) $\{A, B, C \text{中至少有两个发生}\}$

$$= \{A B \bar{C} \cup A \bar{B} C \cup \bar{A} B C\} \cup (ABC)$$

$$= AB \cup BC \cup AC.$$

(6) $\{A, B, C \text{中最多有两个发生}\}$

$$= (\bar{A} \bar{B} \bar{C}) \cup \{A \bar{B} \bar{C} \cup \bar{A} B \bar{C} \cup \bar{A} \bar{B} C\} \\ \cup \{A B \bar{C} \cup A \bar{B} C \cup \bar{A} B C\} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}.$$

上面事件也可以用相应的对立事件来表示。(1)的对立事件是(6), 事实上有

$$\overline{ABC} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}.$$

千万不要以为(1)的对立事件是(2)。同理,(2)的对立事件是(3),(4)的对立事件是(5)。

[注意] (i) 我们所考虑的事件的运算是对同一个试验中的事件而言的。(ii) 事件A不发生则它的对立事件 $\bar{A}$ 一定发生。(iii) 只要有事件A包含的基本事件出现, 就说A发生。

例1.6 E: 某地区有100人是1920年出生的, 考察到2000年