上汽通用五菱汽车股份有限公司资助出版

CAE Technique of Sheet Metal Forming for Automotive Body Panels

汽车覆盖件冲压成形 CAE 技术

LeiZhengbao
雷正保　编著

National University Defence Technology of Press
国防科技大学出版社
Changsha
长沙

前　言

汽车工业是衡量一个国家工业水平的重要标志,已被主要工业发达国家和新兴工业国家列为国民经济的支柱产业。经济全球化和世界市场一体化的加速发展,更激化了汽车制造企业间的竞争,汽车更新换代的步伐不断加快,汽车产品的市场寿命正在缩短,汽车研发周期已缩短到1~2年,呈现出了几乎每年都有款式新、质量优、性能好、造型美观、乘坐舒适的新车型面市的竞争格局。进一步缩短汽车改型换代的周期,提高汽车品质已成为竞争取胜的决定因素。在汽车设计制造的整个周期中,车身模具特别是汽车覆盖件模具的设计制造水平,一直是制约汽车产品开发速度与品质的核心因素。因为仅模具设计和制造就占汽车研发周期约三分之二的时间与资金,模具的设计制造事实上已成为进一步缩短汽车换型周期、提高汽车品质的主要瓶颈。

模具的设计制造是一个技术、资金密集型的工业门类,一直是人们关注的焦点。为确保汽车品质,提高市场竞争力,人们对模具特别是对汽车覆盖件模具提出了越来越高的要求。由于汽车覆盖件几何形状的复杂性,基于过分简化与近似的分析模型,常常难以预测冲压过程中坯料的变形情况,不能正确判断坯料的成形性,从而不能正确评价模具设计的正确性,冲压过程中可能出现的问题也只能在模具加工以后的试模中暴露出来,因此,大大增加了模具调试的难度,甚至导致整个设计报废。

在汽车覆盖件模具设计制造中,CAE技术意义重大。应用CAE技术,一方面,能够在模具制造之前,从理论上认证成形的可行性,减少模具设计方案的风险,从而达到低成本、短周期进行模具的设计制造;另一方面,可以实现模具设计与工艺参数的优化,利用CAE技术可以模拟坯料在冲压过程的真实状况,能够实现从坯料夹持、压边圈压合、拉延筋设置、冲压加载、卸载回弹及切边回弹的全过程模拟,定量地确定破裂、起皱、鼓动、回弹的部位与严重程度;能够分析模具间隙、摩擦状态、压边力大小、材料参数、冲压速度等各种因素对冲压过程的影响,并进行灵敏度分析与优化设计;还可以根据坯料在冲压过程中的流动和变形情况确定合适的毛坯形状和尺寸。

同时,CAE技术还可与通用的CAD/CAM软件,如UG、Pro/E等集成为CAD/CAE/CAM一体化技术。这样,无须动用实际的原材料和设备,就可以准确地模拟产品设计、制造及检验的全过程,可科学预测汽车覆盖件模具设计、生产、工艺及

调度管理的可行性和合理性，并优化实施方案。模具 CAD、CAE、CAM 的结合过程大致如下：首先利用 CAD 技术进行模具设计，这里，模具 CAD 包括工艺和结构设计两方面，工艺设计主要解决模具型面的造型，技术难度大，它是结构设计与 CAE 分析共同的基础；结构设计即模具设计，是根据工艺设计的结果来设计模具的具体结构；接着进行 CAE 分析，根据分析结果，确定模具设计与工艺参数的修改或优化方案，并反馈到几何建模阶段，修改模具设计与相关工艺参数，再进行 CAE 分析，如此循环直到获得满意的 CAE 分析结果；随后利用 CAD/CAM 软件的加工模块，通过 NC 数控加工仿真，生成刀位文件，控制数控机床加工制造模具，并完成模具铸模设计；最后进行钳工修配和试模，进一步验证与完善 CAE 分析模型。

在汽车覆盖件冲压成形 CAD/CAE/CAM 一体化技术中，与 CAD/CAM 相关的技术已出版了大量的文献可供参考，而与 CAE 相关的技术资料就相对少些，涉及重大工程应用的 CAE 技术资料就更少了。本书正是立足工程应用，以切实有利于解决生产实际问题为目标而编著的，书中汇集了作者在上汽通用五菱汽车股份有限公司做博士后期间搜集的资料和积累的经验，以及从大量工程实际应用中提炼出来的典型例题。

全书共分九章。第一章概要地论述了汽车覆盖件冲压成形的力学基础，这也是动态显式有限元方法的理论基础，是进行 CAE 分析的必备基础；第二章介绍了进行汽车覆盖件冲压成形过程分析的动态显式有限元方法的基本原理，在简要介绍增量运动方程的表述形式与有限元离散方程、本构关系、单元理论及增量运动方程求解应采用的积分格式的基础上，重点介绍了中心差分法及其数值稳定性、高斯积分法及其应用、单元尺寸与网格划分规则、沙漏特征及前置参数法沙漏控制理论，介绍了常用单元公式的特点、单元对角质量矩阵的形成方法及应力更新方法；第三章在介绍了汽车覆盖件常用材料及其冲压成形性能的基础上，详细论述了汽车覆盖件冲压成形 CAE 分析中最常用的五种材料模型——刚体材料模型、幂指数塑性材料模型、分段线性材料模型、厚向异性弹塑性材料模型及 3 参数 Barlat 材料模型，并给出了一些材料模型输入参数的例子，给出了 3 参数 Barlat 材料模型输入参数的详细说明；第四章完整地论述了汽车覆盖件冲压成形 CAE 分析中最常用的三种壳单元理论，即 BELYTSCHKO－LIN－TSAY 壳单元、C^0 三角形壳单元及 Hughes－Liu 壳单元理论；第五章阐述了汽车覆盖件冲压成形 CAE 分析中的接触搜寻与接触力计算方法以及接触定义注意事项，重点论述了增量搜寻方法、桶式分类搜寻法及基于罚参数法接触刚度的接触力计算方法；第六章根据摩擦学基本原理，分析了汽车覆盖件冲压成形中的摩擦特性及 CAE 分析中摩擦力的数值计算方法；第七章论述了汽车覆盖件冲压成形中存在的主要缺陷，分析了缺陷的成因、

LS－DYNA 在汽车覆盖件冲压成形 CAE 分析中的应用方法与 LS－DYNA的关键词输入文件及有关注意事项，并给出了典型实例的完整 LS－DYNA关键词输入文件及分析结果与实际冲压结果的对比资料；第八章应用 CAE 技术，讨论了汽车覆盖件冲压成形过程中工艺参数(包括模具间隙、坯料初始形状、摩擦特性、压边力)对冲压结果的影响，讨论了 CAE 模型中各因素(包括壳单元公式、材料模型、力函数模拟拉延筋作用、模具网格密度、坯料是否采用网格自适应技术、采用自适应技术时网格初始形状)对 CAE 结果的影响，通过对大量典型冲压件的对比分析，得出了一系列工程应用针对性很强的重要结论；第九章在介绍了汽车覆盖件经冲压、脱模、切边等工艺，及零件回弹量计算通用的平衡迭代方法之后，介绍了两种应用 LS－DYNA 进行回弹量计算的方法，并重点阐述了“DYNAIN”回弹分析方法，包括DYNAIN 文件的获取、冲压件的裁剪(即切边，下同)、网格粗化、回弹分析的 LS－DYNA 关键词输入文件生成方法及各种注意事项，给出了利用“DYNAIN”回弹分析方法计算回弹量的大量实例，并在实例中再次强调了回弹分析中一些关键参数的选择原则与方法。

本书包括了上汽通用五菱汽车股份有限公司攻关项目“大型复杂汽车覆盖件冲压成型 CAD/CAE/CAM 一体化技术研究与开发及应用示范”、湖南省中青年基金项目“汽车车身覆盖件冲压成型 CAD/CAE/CAM 一体化技术”(项目编号00JZY2137)、湖南省自然基金项目“汽车覆盖件冲压过程的无网格模具 CAE 方法”(项目编号 02JJY2067)的有关研究成果。本书的编写得到了中南大学教授钟掘院士及湖南大学教授钟志华的悉心指导；得到了上汽通用五菱汽车股份有限公司领导与专家沈阳、华盛海、彭子荣、张正湘、蒋桂华及同事曹献文、林骥、范文健、覃佩玲、黄志玲、郑东方、罗梦玲、梁步坤、吴瀚、黄永光、张维刚(湖南大学)、谢晖(湖南大学)、曾氩(长沙理工大学)、路平(长沙理工大学)等的全力支持与帮助；得到了上汽通用五菱汽车股份有限公司专家付爱军、黄充的通力合作，且书中全部算例的 CAD 文件(IGES 格式)及有关工艺参数都是这两位专家提供的；得到了谢玉洪、李海侠两位研究生的帮助，他们翻译并整理了部分参考资料；本书凝结了夫人侯石静、儿子雷葛西的长期无私奉献。作者对曾经支持、帮助和关心过本书出版的各位同行、参考文献作者、审稿者和出版者致以诚挚的谢意。

限于作者水平，虽经反复修改，书中错误仍难避免，敬请指正。

雷正保

2003 年 3 月 12 日

目　录

第 1 章　汽车覆盖件冲压成形力学基础

1.1　求和约定与 δ_{ij} 符号

1.1.1　指标符号(指标记号)法

在张量分析中广泛应用指标记号,而且将直角坐标系 $oxyz$ 改为 $ox_1x_2x_3$ 较方便。

对于一组 n 变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的集合通常就记为 $x_i,i=1,2,\cdots,n$。当 x_i 单独出现时,它可代表 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中的任意一个变量。i 的集合必须在每种情况下标明,比如上例,标明 $i=1,2,\cdots,n$。这里的符号 i 叫做指标。一般说来,指标可写在右上角或右下角,其取值范围均限定为 1,2,3。

对于有三个独立量的集合,通常用一个下指标符号表示。如一点的坐标记作 x_i,表示 (x_1,x_2,x_3)即(x,y,z),下指标 i 取值为 1,2,3(写为 $i=1,2,3$)。

1.1.2　求和约定

求和约定是这样的:在一项内一个文字指标的重复出现,就表示对该指标的变程中的每一个元素求和。指标 i 的变程是 1,2,3,对于全体求和的指标称为哑指标,不求和的指标称为自由指标。

按照这一约定,遇到重复的字母指标,就必须把字母指标取值为 1,2,3 时所得到的各项加起来,这一约定不适用于数字指标。表示哑指标的字母可任意改变,但规定在同一项中不允许同一指标出现三次和三次以上。

因为哑指标只是说明求和记号,至于采用什么符号是无关紧要的,因此

$$a_ix_i=a_jx_j=a_mx_m=\cdots=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3$$

$$a_ia_i=a_ja_j=a_ma_m=\cdots=a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2$$

$$dx_idx_i=dx_jdx_j=dx_mdx_m=\cdots=(dx_1)^2+(dx_2)^2+(dx_3)^2$$

$$\sigma_{ii}=\sigma_{jj}=\sigma_{mm}=\cdots=\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}$$

括号运用需要特别注意,如$(\sigma_{ii})^2=(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})^2$,而 $\sigma_{ii}{}^2=\sigma_{11}{}^2+\sigma_{22}{}^2+\sigma_{33}{}^2$,即$(\sigma_{ii})^2\neq\sigma_{ii}{}^2$。在做任何其他运算以前,相加必须在括号以内实现。

求和约定也适用于含有导数的项,在同一个字母的几个下标之间加一撇表示求导之意,如

$$a_{i,i}=\frac{\partial a_i}{\partial x_i}=\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial a_2}+\frac{\partial a_3}{\partial a_3}$$

$$a_{ij,j}=\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}=\frac{\partial a_{i1}}{\partial x_1}+\frac{\partial a_{i2}}{\partial x_2}+\frac{\partial a_{i3}}{\partial x_3}$$

$$a_{i,jj}=\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j\partial x_j}=\frac{\partial a_i}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_3^2}$$

无论什么时候，只要同一个文字指标(例如字母 i)在乘积中或在同一项中出现两次，则理解为对所有同类项求和(即关于 $i=1,2,3$ 求和)。

为了避免由于对两个求和采用同一字母而使约定的求和记号含糊不清，可以在这一方程式中用某个字母作为哑指标，而到下一个方程换用另一个字母作为哑指标；也可以在同一方程的左端用某个字母作哑指标，而在它的右端换用另一个字母。

1.1.3 δ_{ij}符号

δ_{ij}称为 Kronecker delta，是张量分析中的基本记号。

δ_{ij}定义：当 $i=j$ 时，$\delta_{11}=\delta_{22}=\delta_{33}=1$；当 $i\neq j$ 时，$\delta_{21}=\delta_{23}=\delta_{31}=\delta_{12}=\delta_{32}=\delta_{13}=0$。$i,j$ 取值均为 1,2,3。

δ_{ij}用矩阵表示，则是单位矩阵，即

$$(\delta_{ij})=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$\delta_{ij}a_ix_j$ 式中 i 是哑指标，j 也是哑指标，均有求和之意，即

$$\begin{aligned}\delta_{ij}a_ix_j &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}a_ix_j = \sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3}\delta_{ij}x_j\right)a_i\\ &= \sum_{i=1}^{3}(\delta_{i1}x_1+\delta_{i2}x_2+\delta_{i3}x_3)a_i\\ &= \delta_{11}a_1x_1+\delta_{21}a_2x_1+\delta_{31}a_3x_1+\delta_{12}a_1x_2+\delta_{22}a_2x_2\\ &\quad+\delta_{32}a_3x_2+\delta_{13}a_1x_3+\delta_{23}a_2x_3+\delta_{33}a_3x_3\end{aligned}$$

因为
$$\delta_{12}=\delta_{23}=\delta_{31}=\delta_{21}=\delta_{3}=\delta_{13}=0$$

故
$$\begin{aligned}\delta_{ij}a_ix_j &= \delta_{11}a_1x_1+\delta_{22}a_2x_2+\delta_{33}a_3x_3\\ &= a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=a_ix_i=a_jx_j\end{aligned}$$

同理可得
$$\delta_{ij}dx_idx_j=dx_idx_i=dx_jdx_j$$

所以
$$\begin{aligned}(ds)^2 &= \delta_{ij}dx_idx_j=dx_idx_i=dx_jdx_j\\ &= (dx_1)^2+(dx_2)^2+(dx_3)^2\end{aligned}$$

1.1.4 $r_{ij}s_{jk}=t_{ik}$方程

在一个方程中，如 $r_{ij}s_{jk}=t_{ik}$，其等号两边的自由指标(i 和 k)必须相同，而方程表示对所有自由指标的值都成立，因此，上述方程可写为

$$r_{ij}s_{jk}=r_{i1}s_{1k}+r_{i2}s_{2k}=r_{i3}s_{3k}=t_{ik}$$

对不同的 i,k 值组合可以得到不同的方程，故上式共表示九个方程。

1.2 张量

距离、时间、温度等简单物理量，只需一个标量就可以表示出来，其量值为一实数。而位

移、速度、力等物理量为空间矢量，需要用空间坐标系中的三个分量来表示。

对应力状态、应变状态等复杂物理量，则需要用空间坐标系中的三个矢量，也即九个分量才能完整地表示出来，这就需引入张量。张量是矢量的推广，与矢量相类似，可以定义由若干个当坐标系改变时满足转换关系的分量所组成的集合为张量。

设某物理量(如应力、应变等)q，它关于 $x_i(i=1,2,3)$的空间坐标系存在九个分量 $q_{ij}(i,j=1,2,3)$。若将 x_i 空间坐标系的坐标轴绕原点 O 旋转一个角度，则得新的空间坐标系 $x_k(k=1',2',3')$。新的空间坐标系 x_k 的坐标轴在原坐标系 x 中的方向余弦记为 l_k 或 $l_{rj}(i,j=1,2,3;k,r=1',2',3')$。由于 $\cos(x_k、x_i)=\cos(x_i、x_k)$，所以 $l_{ki}=l_{ik}$，$l_{rj}=l_{jr}$，则 q 对于新的空间坐标系 x_k 的九个分量为 $q_{kr}(k,r=1',2',3')$。若 q 在坐标系 x 中的九个分量 q_{ij} 与坐标系 x_k 中的九个分量 q_{kr} 之间存在如下线性变换关系

$$q_{kr}=q_{ij}l_{ki}l_{rj}\qquad(i,j=1,2,3;k,r=1',2',3')\tag{1-1}$$

则 q 为张量，用矩阵表示为

$$q_{ij}=\begin{bmatrix}q_{11}&q_{12}&q_{13}\\q_{21}&q_{22}&q_{23}\\q_{31}&q_{32}&q_{33}\end{bmatrix}$$

张量所带的下角标的数目称为张量的阶数。q_{ij} 是二阶张量，矢量是一阶张量，而标量则是零阶张量。式(1-1)为二阶张量的判别式。

张量具有如下基本性质：

(1) 存在张量不变量。张量的分量一定可以组成某些函数 $f(q_{ij})$，这些函数值与坐标轴的选取无关，即不随坐标而变，这样的函数就叫张量的不变量。对于二阶张量，存在三个独立的不变量。

(2) 张量可以叠加和分解。几个同阶张量各对应的分量之和或差定义为另一同阶张量；两个相同的张量之差定义为零张量。

(3) 张量可分对称张量、非对称张量、反对称张量。若 $q_{ij}=q_{ji}$，则 q 为对称张量；若 $q_{ij}\neq q_{ji}$，则 q 为非对称张量；若 $q_{ij}=-q_{ji}$，则 q 为反对称张量。

(4) 二阶对称张量存在三个主轴和三个主值。如取主轴为坐标轴，则两个下角标不同的分量都将为零，只留下两个下角标相同的三个分量，称为主值。

1.3 应力分析

1.3.1 应力符号的规定

1.应力分量符号的表示方法

两个下角标相同的是正应力分量，例如 σ_{xx} 即表示 x 面上平行于 x 轴的正应力分量，一般简写为 σ_x；两个下角标不同的是剪应力分量，例如 τ_{xy} 即表示 x 面上平行于 y 轴的剪应力分量。

2.弹、塑性力学中应力符号的规定

应力正负号规定如下：如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，这个截面就称

为一个正面,这个面的应力分量就以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。相反,如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向,这个截面就称为一个负面,这个面上的应力分量就以沿坐标轴负方向为正,沿坐标轴正方向为负。

注意:虽然上述正负号规定对于正应力来说,结果和材料力学中的规定相同(拉应力为正,压应力为负),但是,对于剪应力来说,结果却和材料力学中的规定不完全相同。

剪应力互等定律 $\tau_{ij} = \tau_{ji}$,表明作用在两垂直面上并且垂直于该两面交线的剪应力是互等的(大小相等,正负号也相同)。因此,剪应力记号的两个脚码可以对调。

3.材料力学中应力符号的规定

无论材料截面的方位如何,背离材料面的方向作用的法向应力为正,朝着材料面作用的法向应力为负;对材料截面成顺时针方向作用的剪应力为正,反时针方向作用的剪应力为负。

如果采用材料力学的正负号规定,则剪应力的互等关系将成为

$$\tau_{xy} = -\tau_{yx}$$

$$\tau_{yz} = -\tau_{zy}$$

$$\tau_{zx} = -\tau_{xz}$$

即大小相等、符号相反。

4.弹、塑性力学与材料力学中应力符号规定的比较

法向应力:均是拉应力为正、压应力为负。

剪应力:按材料力学规定:$\tau_{y} = -\tau_{y}$,$\tau_{yz} = -\tau_{zy}$,$\tau_{zx} = -\tau_{xz}$;

按弹、塑性力学规定:$\tau_{xy} = \tau_{yx}$,$\tau_{yz} = \tau_{zy}$,$\tau_{zx} = \tau_{xz}$

1.3.2 点的应力状态

表示点应力状态的九个应力分量构成一个二阶张量,称为应力张量,用张量符号 σ_{ij} 表示,由于剪应力互等,所以应力张量是二阶对称张量(其中的每一分量称为应力张量之分量),记为

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad 或 \quad \sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \cdot & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \cdot & \cdot & \sigma_z \end{bmatrix} \tag{1-2}$$

1.3.3 主应力和应力张量不变量

1.主应力

如果表示一点应力状态的九个应力分量已知,则过该点的斜切微分面上的正应力 σ 和剪应力 τ 都将随外法线 N 的方向余弦 l, m, n 的变化而变化。当 l, m, n 在某一组合情况下,斜切微分面上的全应力 S 和正应力 σ 重合,而剪应力 $\tau = 0$,这种剪应力为零的微分面称为主平面。主平面上的正应力叫做主应力;主平面的法线方向,也就是主应力方向,叫做应力主方向或应力主轴。主应力按如下方法确定:[15,32]

设

$$
\left.\begin{aligned}
J_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\
J_2 &= -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \tau_{xy}^{\ 2} + \tau_{yz}^{\ 2} + \tau_{zx}^{\ 2} \\
J_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - (\sigma_x\tau_{yz}^{\ 2} + \sigma_y\tau_{zx}^{\ 2} + \sigma_z\tau_{xy}^{\ 2})
\end{aligned}\right\} \tag{1-3}
$$

整理后得

$$
\sigma^3 - J_1\sigma^2 - J_2\sigma - J_3 = 0 \tag{1-4}
$$

式(1-4)称为应力状态特征方程,可以证明[15,32],该方程必然有三个实根,也就是三个主应力,一般用 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ 表示。

2.应力张量不变量

根据应力状态特征方程式(1-4)可解得一点的主应力大小。对于一个确定的应力状态,主应力只能有一组值,即主应力具有单值性,因此,应力状态特征方程式(1-4)中的系数 J_1,J_2,J_3 也应该是单值的,不随坐标而变。于是可以得出如下的重要结论:尽管应力张量的各分量随坐标而变,但 J,J_2,J_3 的函数值是不变的,所以,J,J_2,J_3 分别称为应力张量的第一、第二、第三不变量。

若取三个应力主方向为坐标轴,则一点的应力状态只有三个主应力,应力张量为

$$
\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \tag{1-5}
$$

应力张量的三个不变量为

$$
\left.\begin{aligned}
J_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\
J_2 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) \\
J_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3
\end{aligned}\right\} \tag{1-6}
$$

利用应力张量不变量,可以判别应力状态的异同。如果两个应力张量的不变量分别相等,则两个应力状态相同,否则,两个应力状态不同。

1.3.4 应力偏张量和应力球张量

任意一个物体受力作用后都要发生变形,变形可分为两部分:体积的改变和形状的改变。由材料力学知识可知,受力物体单位体积的改变为

$$
\theta = \frac{1-2v}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{1-7}
$$

式中:v——材料的泊松比;

E——材料的弹性模量;

现设 σ_m 为三个正应力分量的平均值,称平均应力(或静水应力),即

$$
\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}J_1 \tag{1-8}
$$

可见,σ_m 是不变量,与所取的坐标无关,即对于一个确定的应力状态,它为单值,说明受力物体体积的改变与平均应力有关。于是可将三个正应力分量写成

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= (\sigma_x - \sigma_m) + \sigma_m = \sigma'_x + \sigma_m \\
\sigma_y &= (\sigma_y - \sigma_m) + \sigma_m = \sigma'_y + \sigma_m \\
\sigma_z &= (\sigma_z - \sigma_m) + \sigma_m = \sigma'_z + \sigma_m
\end{aligned}
$$

根据张量可叠加和可分解的基本性质,将上式代入应力张量表达式中则可将应力张量分解为两个张量。即

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_x-\sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_y-\sigma_m & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z-\sigma_m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sigma_m & 0 & 0\\ 0 & \sigma_m & 0\\ 0 & 0 & \sigma_m\end{bmatrix}$$

$$=\sigma'_{ij}+\delta_{ij}\sigma_m \tag{1-9}$$

若取主轴坐标系,则式(1-9)为

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sigma_1-\sigma_m & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2-\sigma_m & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3-\sigma_m\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\sigma_m & 0 & 0\\ 0 & \sigma_m & 0\\ 0 & 0 & \sigma_m\end{bmatrix}$$

$$=\sigma'_{ij}+\delta_{ij}\sigma_m \tag{1-10}$$

式(1-9)中,$\delta_{ij}\sigma_m$ 表示球应力状态,也称静水应力状态,称为应力球张量,其任何方向都是主方向,且主应力相同,均为平均应力 σ_m。球应力状态在任何斜微分面上都没有剪应力,而从塑性变形机理可知,无论是滑移还是孪生,或晶界滑移,都主要与剪应力有关,所以应力球张量不能使物体产生形状变化(塑性变形),只能使物体产生体积变化。

式(1-9)中的 σ'_{ij}称为应力偏张量,它是由原应力张量分解出球张量后得到的,即

$$\sigma'_{ij}=\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma_m \tag{1-11}$$

由于被分解出的应力球张量没有剪应力,任意方向都是主方向且主应力相等,因此,应力偏张量 σ'_{ij}的剪应力分量、主剪应力、最大剪应力以及应力主轴等都与原应力张量相同。因而应力偏张量只能使物体产生形状变化,而不能使物体产生体积变化,即材料的塑性变形是由应力偏张量引起的。

应力偏张量是二阶对称张量,因此,它同样存在三个不变量,分别用 J'_1,J'_2,J'_3 表示。将应力偏张量的分量代入式(1-3),可得

$$\left.\begin{aligned}&J'_1=0\\&J'_2=\frac{1}{6}[(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}{}^2+\tau_{yz}{}^2+\tau_{zx}{}^2)]\\&J'_3=\begin{vmatrix}\sigma'_x & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma'_y & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma'_z\end{vmatrix}\end{aligned}\right\} \tag{1-12}$$

对于主轴坐标系,则

$$\left.\begin{aligned}&J'_1=0\\&J'_2=\frac{1}{6}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]\\&J'_3=\sigma'_1\sigma'_2\sigma'_3\end{aligned}\right\} \tag{1-13}$$

应力偏张量的第一不变量 $J'_1=0$,表明应力偏张量中已经没有静水应力成分。第二不变量 J' 与屈服准则有关。第三不变量 J'_3 决定了应变的类型,即 $J'_3>0$ 属伸长类应变;$J'_3=0$ 属平面应变;$J'_3<0$ 属压缩类应变。

1.3.5 八面体应力和等效应力

1.八面体应力

以受力物体内任意点的应力主轴为坐标轴,在无限靠近该点作等倾斜的微分面,其法线与三个主轴的夹角都相等,在主轴坐标系空间八个象限中的等倾斜微分面构成一个正八面体,正八面体的每个平面称为八面体平面,八面体平面上的应力称为八面体应力(详见文献[15])。

八面体正应力 σ_8 和八面体剪应力 τ_8 为

$$\sigma_8 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_m = \frac{1}{3}J_1 \tag{1-14}$$

$$\begin{aligned}\tau_8 &= \pm\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \pm\frac{2}{3}\sqrt{{\tau_{12}}^2 + {\tau_{23}}^2 + {\tau_{31}}^2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}J'_2}\end{aligned} \tag{1-15}$$

可见,σ_8 就是平均应力,即球张量,是不变量;τ_8 则是与应力球张量无关的不变量,反映了三个主应力的综合效应,与应力偏张量第二不变量 J'_2 有关。将式(1-14)中的 J_1 和式(1-15)中的 J'_2 分别用任意坐标系的应力分量代入,即可得到任意坐标系中八面体应力的表达式

$$\sigma_8 = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \tag{1-16}$$

$$\tau_8 = \pm\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6({\tau_{xy}}^2 + {\tau_{yz}}^2 + {\tau_{zx}}^2)} \tag{1-17}$$

2.等效应力

取八面体剪应力绝对值的$\frac{3}{\sqrt{2}}$倍所得之参量称为等效应力,也称广义应力或应力强度,用 $\bar{\sigma}$ 表示。对主轴坐标系

$$\bar{\sigma} = \frac{3}{\sqrt{2}}|\tau_8| = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{3J'_2} \tag{1-18}$$

对任意坐标系

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6({\tau_{xy}}^2 + {\tau_{yz}}^2 + {\tau_{zx}}^2)} \tag{1-19}$$

用偏应力张量可表示为

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{({\sigma'_x}^2 + {\sigma'_y}^2 + {\sigma'_z}^2 + 2({\tau'_{xy}}^2 + {\tau'_{yz}}^2 + {\tau'_{zx}}^2)} = \left(\frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{1-20}$$

等效应力的特点:

- 等效应力是一个不变量;
- 等效应力在数值上等于单向均匀拉伸或均匀压缩时的拉伸或压缩应力 σ_1,即 $\bar{\sigma} = \sigma_1$;
- 等效应力并不代表某一实际平面上的应力,因而不能在某一特定的平面上表示出来;
- 等效应力可以理解为某点应力状态中应力偏张量的综合作用。

1.3.6 应力平衡微分方程

直角坐标系中质点的应力平衡微分方程式为

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}+X_i=\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_i}+X_j=0 \tag{1-21}$$

其展开式为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2}+\frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_3}+X_1=0\\ \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_1}+\frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_3}+X_2=0\\ \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_1}+\frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_2}+\frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3}+X_3=0\end{aligned}\right\} \tag{1-22}$$

式中 X_i 为单位体积的体积力沿坐标轴的分量。若忽略体积力，则 $X_i=0$，平衡方程可简记为

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i}=0 \tag{1-23}$$

1.4 应变分析

应变是表示物体变形大小的一个物理量，应变张量也是二阶对称张量，与应力张量有许多相似的性质。

1.4.1 对数应变

假设物体内两质点相距为 l_0，经变形后距离为 l_n，则相对线应变为

$$e=\frac{l_n-l_0}{l_0} \tag{1-24}$$

这种相对线应变一般用于小应变情况，称为工程应变(或叫假象应变、相对应变)。工程应变在弹性范围内仍近似于实际应变，但在塑性变形中误差就大了，就不足以反映实际的应变情况。因为 $e=\frac{l_n-l_0}{l_0}$中的基本长度 l_0 是一个固定不变的值，而在实际变形过程中，长度 l_0 需经过无穷多个中间状态才逐渐变成 l_n，即 $l_0,l_1,l_2,l_3,\cdots,l_{n-1},l_n$，其中相邻两长度均相差极微小，由于 $l\sim l_n$ 的总的变形程度可以近似地看做是各个阶段相对应变之和，即

$$\frac{l_1-l_0}{l_0}+\frac{l_2-l_1}{l_1}+\frac{l_3-l_2}{l_2}+\cdots+\frac{l_n-l_{n-1}}{l_{n-1}}$$

或用微分概念，设 $\mathrm{d}l$ 是每一变形阶段的长度增量，则物体的总的变形程度为

$$\varepsilon=\int_{l_0}^{l_n}\frac{\mathrm{d}l}{l}=\ln\left(\frac{l_n}{l_0}\right) \tag{1-25}$$

ε 反映了物体变形的实际情况，故称为自然应变或对数应变(或称实际应变)，在塑性变形中，只有采用对数应变才能得出合理的结果，这是因为：