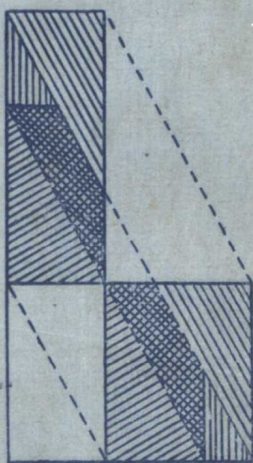


恩·阿·格拉哥列夫著

初等幾何学

平面部分



人民教育出版社

初等幾何學

平面部分

恩·阿·格拉哥列夫著

奚今吾 管承仲譯

人民教育出版社

本書是根據俄羅斯蘇維埃聯邦社會主義共和國教育部教育出版社出版的恩·阿·格拉哥列夫所著‘初等幾何學’（六——八年級）1954年莫斯科第三版譯出的。這本書只包括平面幾何學部分。

本書在適當的段落後附有習題，在每章後又附有復習題供讀者參考。書裏的敘述生動具體，從實例出發來說明抽象的概念。

在開始講過一些角的定義以後，就介紹平行線的定理。關於軸對稱和中心對稱的問題，講解得很完整並且貫串在各章節和很多習題裏面。關於線段的度量和無公度線段的問題以及面積的度量的問題都是按照現代的科學觀點來解釋的。至於相似形是把它當作只改變圖形的大小而不改變它的形狀的某種幾何變換來說明的。本書還介紹了怎樣測定直線，怎樣檢驗直尺和平面，把所學的知識和實際的工作緊密聯繫起來。伯拉基斯在‘中學數學教學法’中曾經給它以很高的評價，認為‘這本書有一系列的無可懷疑的優點’。

本書可供我國中學數學教師和自學者的參考。

*

Н. А. Глаголев

Элементарная

Геометрия

планиметрия

учебник * 1954

本書根據俄羅斯蘇維埃聯邦社會主義共和國教育部教育出版社

1954年莫斯科俄文版譯出

*

初等幾何學

平面部分

〔蘇聯〕恩·阿·格拉哥列夫著

奚今吾 管承仲譯

北京市書刊出版業營業許可證出字第20號

人民教育出版社出版

北京景山新街

新華書店發行 北京市印刷一廠印刷

書號：850 2241 字數：220千

開本：850×1168 1/32 印張：9 1/4

1955年7月第一次

1955年11月第一次印刷

1-11,000 冊

定價（8）八角九分

目 錄

第一版的序	6
第二版的序	8
緒論	9
第一章 直線	15
I 直線,射線,線段	15
II 直線間的夾角	20
III 相交直線和平行直線	37
IV 關於軸對稱的幾何圖形	47
V 定理的概念的擴張	55
第二章 三角形	59
I 三角形的一般性質	59
II 三角形的邊與角間的關係	65
III 三角形的全等	68
IV 幾何作圖題	75
V 三角形的作圖題	79
VI 以全等三角形為基礎的若干定理	85
VII 關於點和線段的射影	90
VIII 點的幾何的軌跡	92
IX 軌跡法	98
X 關於中心對稱的幾何圖形	100
XI 第二章的練習題	105
第三章 四邊形和多邊形	107

I 四邊形的一般性質	107
II 梯形	110
III 平行四邊形	113
IV 平行四邊形的特殊類型	115
V 平行移動法	117
VI 多邊形	122
VII 第三章的練習題	124
第四章 圓	128
I 圓的一般性質	128
II 弦的長度決定於它們和圓心的距離	132
III 圓和直線的相互的位置	133
IV 和圓相交的直線所組成的角	135
V 兩個圓的相互的位置	140
VI 圓的作圖題	143
VII 圓的內接和外切多邊形	151
VIII 對稱法	159
IX 第四章的練習題	161
第五章 線段的度量	164
I 關於線段的度量的一般原理	164
II 成比例的線段	172
III 若干平行線和兩條直線相交的性質	175
IV 成比例的線段的作圖	179
V 三角形的角的平分線的性質	184
VI 第五章的練習題	187

第六章 圖形的相似變換·····	190
I 相似變換的一般方法·····	190
II 三角形的相似·····	197
III 多边形的相似·····	203
IV 圓的相似·····	207
V 任意圖形的相似變換·····	211
VI 相似法·····	214
VII 第六章的練習題·····	218
第七章 圖形的各元素間的數量關係 ·····	220
I 銳角的三角函數·····	220
II 三角形各元素間的數量關係·····	226
III 圓中成比例的綫段·····	237
IV 點關於圓的幕·····	242
V 計算圓內接正多边形的各邊·····	245
I 計算圓的周長·····	249
II 解作圖題的代數法·····	257
III 第七章的練習題·····	264
第八章 面積的度量 ·····	268
I 多边形的面積的比較·····	268
II 多边形的面積的度量·····	274
III 變換多边形而不改變它們的面積·····	283
IV 圓和它的各部分的面積·····	289
V 第八章的練習題·····	291

第一版的序

和以前編寫的幾何課本不同，這本書具有下面的幾個特點。

在課程的基本問題的科學闡述方面，這本書比較以前的課本有了改變。例如，軸對稱和中心對稱的問題的敘述比以前的課本完整得多。這些問題在各章中都有專節敘述，都分別附有練習，在以後證明定理的時候還加以應用。

關於線段的度量的問題和無公度的量的問題，都採用了新的敘述方式，並且刪去了求兩條線段的公度的歐几里得算法，因為這種算法是陳舊的，在現今既沒有理論的意義，又沒有實踐的意義。根據同樣的理由，比例的幾何理論也刪去了。關於線段的長度的度量的問題，和一切有關度量的問題一樣，都按照現代的科學觀點放到幾何的量的度量中來解釋。相似形是作為，只改變圖形的大小，而不改變它的形狀的某種幾何變換來說明的。這樣的說明既符合於相似形的概念的真實內容，並且比較從歐几里得時代起流傳下來的相似形的定義——圖形的各元素間的某種形狀上的關係——更合於時代。

面積的度量的問題也是用新的方式來解釋的。有關面積度量的一切理論都建築在現代科學的基礎上，即按照希爾伯特和舒耳所建立的體系。

在教學法方面採取了下面的方針：大大地加強幾何作圖的作用，從課程一開始就進行作圖，並且從頭到尾一切課題的講解都伴隨着作圖。到關於三角形全等的這一章為止，都使用三種儀器——圓規，直尺和三角板來完成作圖。同時所作圖形的正確性的證明都用小號字來敘述，因為在最初的時候，這種證明會引起學生的困

難，而如果對於學生的一般的智力提高沒有損害的話，這種證明也可以省略，因為作圖的本身是簡單的。關於三角形全等的定理提供了不必再用三角板作圖的可能性，所以從課程的這一部分起，所有的作圖只須使用圓規和直尺來完成。

其次，個別章節說明的次序也有一些變動。

例如，把平行綫的理論放在三角形的性質以前來講述，就像以前的某些課本（格爾赫，A. H. 格拉哥列夫等等）中所作過的那樣。這就使得敘述更加嚴整，而對於三角形的一系列定理（例如，外角的定理，三角形全等的某些定理等等）就不需要再分別加以證明。

本書有 700 多個習題（課文中所解的除外）。為了在課程的學習中能夠充分運用它們，這些題目不僅放在每一章的末尾，並且在大多數的章裏，還把它們分散在這些章的各部分裏面。

習題的內容可以分成四類：1) 證明題，2) 軌跡題，3) 作圖題，4) 計算題。

和以前的課本比較起來，第一類和第三類的習題增加得特別多，因為這兩類習題對於發展學生的幾何思維是最好的。照我的想法，有了這樣大量的習題，就有可能按照新課本開始教學工作，而不必等待新課本的單行的習題集出版。在總數為 700 多個的習題當中，大約有 70 個是作者借用下面各書的：

1. A. Salomon 幾何學課本。
2. Emile Borel 幾何學。
3. E. Heis und F. Eschweiler 幾何學課本。
4. A. H. Глаголов 初等幾何學。

這些習題都標有 [1], [2], [3], [4] 等符號，以表示它們的來源。如果一個題在幾本書中都有，就只標明它的最早的那個來

源。其餘的習題或是作者自己擬定的，或是大家所知道的，或是大家所知道的習題的簡單變形，因此就沒有必要指出它們的來源了。

И. 格拉哥列夫

第二版的序

這本書的第二版是作者死後(死於 1945 年)刊行的，它和第一版基本上沒有多少區別。

第一版的本文經過了仔細的審查，修正了其中明顯的錯誤，有些部分在編輯的時候也作了改動。凡是在我們看來，闡述得過於簡略的地方都作了補充。有些圖並且換用了新的。

Л. 別列標爾金

出版者的話

這一版(第三版)是依第二版印行的，並沒有改變。

緒 論

1. 幾何学的对象

在观察我們周圍的物体時，我們可以看出它們的外形和性質有很大的不同。

各种物体互相區別，是根據外形，重量和組成它們的物質的性質等等的。但是儘管这些方面是多种多樣的，我們还是可以看出所有物体都無例外地具有這樣一種性質：每一個物体都有自己的形狀和自己的大小。在製造各种物体的時候，必須使它們的形狀和大小符合於它們的用途。

砲彈應具有的形狀是使它能達到需要的射程；船身應具有的形狀是使它能在水面上保持平穩的狀態和容易衝破海上波浪的阻力。

其次，我們可以看出每一個物体在其他物体中間佔有一定的位置。

善於決定物体相互間的距離，以適當的方法使它們保持需要的距離，这在實際生活中是很重要的。例如，在工廠中，要緊的是正確地安放机床。在戰場上，要緊的是正確地佈置碉堡和觀測點，善於斷定敌人火力點的所在地以及達到他們掩蔽部的距離等等。

研究物体的形狀和大小以及它們的相互位置，这是人類知識的一個專門的領域。

研究物体的形狀，大小和相互位置的科學叫做幾何學。

2. 幾何学的起源

原始時代的人在進化的最初階段早已需要辨別他們周圍的物体的形狀並且注意它們分佈的位置。例如，他們記熟了打獵的地

方，住宿的地方和一些村莊所在的地方。他們漸漸地學會了判斷各個物體之間的距離和各個地段的面積等等。

隨着人的社會生活的發展，就越來越需要研究物體的形狀和大小以及它們的相互位置，因此也就需要具有更多的知識。在古代的埃及，每到春季，巨大的尼羅河一泛濫就沖壞各個土地地段的界限。因而每年都要修復這些界限，而這是和巨大的實地測量工作分不開的。為了完成這些工作，必須掌握適當的法則來計算綫的長度，面積，土地地段以及繪製土地的平面圖等等。這些法則都由埃及人研究出來並且記載下來了。

希臘人由於和埃及人通商而學得了這些法則。希臘人把這些法則加以補充，並且逐漸把它們發展成為一門完整的科學，這就叫做幾何學，這個名稱的希臘文原意是測量土地的技術。

希臘的科學家歐几里得生於紀元前三世紀，他特別詳細地研究了這門科學，把它和算術一起闡述在一部十一冊的書裏，他把這部書叫做‘幾何原本’。近代人就是根據這部書來研究幾何學的。直到現在，我們還把‘幾何原本’當作藍本來編寫幾何學的課本。

3. 幾何學的基本概念

a) 幾何體

當我們只研究一個物體的形狀和大小的時候，我們就把這個物體叫做‘幾何體’，這個詞的含義是着重指出這個物體的物理性質不在研究範圍以內。如果兩個物體的形狀相同，大小也相同，而只是用不同的材料製成的，那末儘管他們的物理性質不同，它們還是代表同樣的幾何體。

例如，一個不大的橡皮球和一個同樣大小的肥皂泡，儘管它們的物理性質完全不同，它們還是代表同樣的幾何體。

當一個物體在改變它對於其他物體的位置的時候，例如，把它從一種環境移到另一種環境裏，那末由於環境的影響，這個物體的物理性質，甚至它的大小至少也會發生極微小的變化。然而幾何體是看作與物體的物理性質無關的。因此它具有下面的性質：幾何體可以自由移動並且可以在其他幾何體之間自由變換位置，這時它的大小，它的形狀以及它本身各部分的相互位置都不改變。

b) 面

任何物體都是用它的面來和與它相鄰的其他物體分開的，例如，物體用它的面來和與它相鄰的那一部分空氣的微粒分開。

我們可以離開物體的本身而單獨想像它的面。這樣的面實際上並不能獨立存在，而只能存在於我們的想像裏面。在自然界中只能找到和這樣的面大致相當的形象，例如，極薄的紙張或肥皂泡的薄膜。我們把幾何的面看作沒有任何厚度。

c) 綫

物體的面有時相遇，也就是通常所說的相交。例如，煙囪的面和屋頂的面相交，正方體的側面和它的底面相交等等。面與面這樣相交的時候就產生綫。

我們往往可以離開幾何的面而單獨想像綫，把它看作沒有任何寬度的極細的綫。

幾何的綫在自然界中並不存在，而只能存在於我們的想像裏面。

d) 點

兩條綫也可能相遇，也就是相交。當綫與綫相交的時候就產生點，例如，正方體的兩條棱就在它的頂點相交。正方體的各個頂點都是點。

我們也往往可以離開綫而單獨想像點，把它看成極小的微粒

或用細針在紙上刺破的小孔。點沒有任何大小。幾何的點在自然界中是不存在的。

4. 由運動產生的綫和面

如果一個點任意移動，它就會在這種運動中畫成一條綫。例如，使鉛筆尖端在紙上移動，那末尖端在紙上經過的地方就留下了痕跡。這個痕跡使我們獲得綫的概念，這條綫是由於鉛筆尖端的運動而產生的。同樣，火花很快地飛動的時候也會產生發光的綫。例如，觀察下述的現象就很有趣：夜裏的風使燃燒着的營火堆飛起無數的火花，這些火花就產生一串串的光亮的綫。當敵人的飛機在夜裏掃射的時候，我們通常要放出照明彈去，好讓高射砲能夠瞄準目標，這些照明彈的飛射就產生各種顏色的光亮的綫。

如果一條綫從一個位置移動到另一個位置，它就會在這樣的運動中畫成一個面。我們觀察自行車輪子的輻條的轉動，就可以看到由於綫的運動而產生的面。當輪子很快地轉動的時候，這些輻條就好像併成了一個圓盤。

5. 最簡單的綫和面

a) 直綫

直綫是最簡單的綫。在兩個支點之間拉緊了的細綫或從一個小孔射出來的光綫，都能使我們得到直綫的概念。直綫有下面的基本性質：經過任意兩點可以引一條直綫並且只能引一條直綫。

在實踐中常常要應用到直綫的這種性質。例如，要在某個地方標出直綫，就可以把一根木製的標桿插在地上，並且在離這根標桿若干距離的另一個地方插上第二根標桿；這兩根標桿就能在那個地方確定它們之間的直綫。要延長這條直綫，可以插上第三根

標桿，使第二根和第三根之間保持一段距離；如果把眼睛靠近第三根標桿的端點來看前兩根標桿的端點，這根標桿恰好擋住對前兩根標桿的視線，那末這三根標桿就在一條直線上。同樣還可以插上第四根，第五根標桿等等。鋸工把木料鋸成木板的時候也是利用直線的這種性質。他在木料兩端的兩點之間拉緊一條綫，就可以沿着這條直綫來把木料鋸開。

b) 平面

平面是最簡單的面。在容器中處於平靜狀態的液體的表面，或是鉋得很光的桌面，或是磨得很光的鏡面，都能使我們獲得平面的概念。但這種概念只是近似的。因為無論桌子鉋得如何平，桌面上的木質纖維總還有些極細微的粗糙不平的地方。要想像一個平面，我們必須設想這些粗糙不平的地方根本不存在而桌子的表面是絕對光滑的。平面有下面的性質：如果連結平面上的任何兩點成一條直綫，那末這條直綫上所有的點都在這個平面上。

當磨光石板的時候，我們就是利用平面的這種性質來檢查它磨得是否平滑。檢查的方法是這樣：取一個金屬方塊，它的稜經過精確校正確實是直綫的，把這樣的直綫的稜放到要檢查的石板平面上。如果這個平面磨得十分平滑，那末不管這稜放在平面上的方向怎樣和位置怎樣，稜上所有的點都會與平面緊緊地貼在一起。

6. 幾何圖形

若干數量的點，綫，面的組合，不管它們的相互位置怎樣，所成的圖形都叫做幾何圖形。

幾何圖形分平面的和空間的兩種。

所有的點都在同一個平面上的圖形，叫做平面幾何圖形。在一張光滑的紙上畫圖，不管畫成什麼樣子，我們都會獲得平面幾何圖形的概念。

如果所有的點不都在同一個平面上，這種圖形就叫做空間幾何圖形。任何一種幾何體都能使我們獲得空間幾何圖形的概念。

幾何學的前一部分只研究平面的圖形。這一部分叫做平面幾何學。

7. 研究幾何圖形的方法

通常研究物體時所用的直接測量和實驗的方法，對於研究幾何圖形的性質和相互位置，往往是不夠的。例如，一個物體的長度和高度不一定都可以由直接測量測出來。測量桌子的長度或房子的高度並不困難，但是測量生長着的樹或判斷飛着的飛機的高度就難得多了。

因此，我們在幾何學中所用的方法不能只是測量，而且還要推理。這就是說：找出所研究的物體有某一種性質以後，就要根據這種性質來進行正確的推理，以便發現這個物體的新的性質。

例如，我們已經找出直線有下面的性質：經過兩點可以引一條直線，並且只能引一條直線。從這個論斷就可以作出這樣的結論：兩條直線的交點不能多於一個。實際上，如果兩條直線相交於兩個點，那末經過這兩個點就可以引兩條直線，而不是只能引一條直線。這樣，我們就運用正確的推理方法而發現了直線的新的性質：兩條直線的交點不能多於一個。

類似這樣的正確推理方法，正是研究幾何圖形的性質的主要方法。

復習題

1. 幾何體是什麼？
2. 封閉的屋子的內部可以叫做幾何體麼？

3. 用脚踏雪，雪上就留下一個凹下的痕跡，這個痕跡可以叫做幾何什麼？
4. 經過一條已知的直線，可以作若干個幾何的面麼？
5. 可以把一點分成更小的部分麼？
6. 什麼叫做幾何圖形？

第一章 直線

I. 直線, 射線, 綫段

§1. 關於直線的公理

一個作為真實可靠而採用的命題叫做公理。公理這個詞希臘文是‘阿克許什’ (αξιος), 意思是‘值得的’。公理就是值得承認的真理。

表示直線性質的公理有下面兩個：

1. 經過任意兩個點可以引一條直線，並且只能引一條直線。
2. 如果一條直線的兩個點在一個平面上，那末這條直線所有的點都在這個平面上。

§2. 直線的表示法

我們通常把直線想像成向兩方無限伸長的。表示直線通常用放在它的任何兩點上的兩個大寫拉丁字母，例如直線 AB (圖1)，或者用一個小寫字母，例如直線 a (圖2)。我們用直尺來畫直線。



圖 1



圖 2

經過兩個已知點，例如 A 和 B ，畫直線，我們把直尺的一邊緊

緊地靠近這兩個已知點，並且用鉛筆的尖端沿着直尺的邊畫一條直綫。如果要檢查直尺是否正確，那末仍用它的這一边，但是從另一側靠近原來的兩個點，沿着直尺的邊重新畫一條直綫。

如果這次畫的綫和以前所畫的是同一條直綫，這就是說，直尺是正確的。

§3. 射綫

所有的點都在一條直綫上某已知點一旁的那一部分直綫叫做射綫。這個已知點叫做這條射綫的端點。

§4. 綫段

兩端都有限制的直綫的一部分叫做這條直綫的綫段。表示綫段通常用放在它的兩端的兩個字母，例如綫段 AB (圖3)，或者用一個小寫字母，例如綫段 a (圖4)。



圖3



圖4

§5. 綫段的相等和不等

如果把兩條綫段疊合在一起，而它們的兩端都相重合，這兩條綫段就叫做相等的綫段。如果已知一條綫段，在每一條直綫上，從它的任何一點，向任何一方都可以截取一條綫段等於這條已知綫段。圓規就是截取綫段的工具。要在直綫 a 上從一點 C 起(圖5)截取綫段 CD 等於 AB ，首先我們把圓規的兩腳張開，使它的兩個尖端落在點 A 和點 B 上，然後，不改變圓規兩腳間的距離，把它的一個尖端移放在點 C 上，而另一個落在直綫 a 上，這第二個尖端