大学物理实验

段向阳　刘必成　主编

中国铁道出版社

大学物理实验

段向阳　刘必成　主编

中　国　铁　道　出　版　社
1 9 9 8 年 · 北京

(京)新登字 063 号

内 容 简 介

本书介绍了测量结果的不确定度的评价方法、常用实验仪器以及力学、热学、电磁学、光学实验，还介绍了近代与综合性实验、设计性实验等。每个实验内容后都留有部分思考题，供学生在实验的各个阶段思考和分析，以巩固所学的知识。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理实验/段向阳，刘必成主编．—北京：中国铁道出版社，1997.10
ISBN 7-113-02829-2

Ⅰ．大…　Ⅱ．①段…②刘…　Ⅲ．物理-实验　Ⅳ．04-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(97)第 25862 号

大学物理实验
段向阳　刘必成　主编
中国铁道出版社出版发行
(100054，北京市宣武区右安门西街 8 号)
责任编辑　方　军　封面设计　陈东山
北京市燕山联营印刷厂印
1998 年 2 月第 1 版　第 1 次印刷
开本：787×1092　1/16　印张：11.75　字数：292 千字
印数：1—5000 册

ISBN 7-113-02829-2/O·52　定价：15.20 元

前　　言

本书是根据全国工科大学物理实验课程指导组1995年制定的《高等工科学校物理实验课程教学的基本要求》，结合一般工科院校专业的特点和实验仪器设备的情况，由华东交通大学和长沙铁道学院两校联合编写而成。

本书在编写中我们力求突出如下特点：

1. 在第一章测量与误差中，由浅入深地介绍了测量结果的不确定度的评价方法。

2. 将常用实验仪器单独编为一章进行介绍，它将帮助学生提高查阅资料及阅读技术说明书的能力。

3. 按力学与热学实验、电磁学实验、光学实验、近代与综合性实验、设计性实验等五大类别编排实验。

4. 每个实验内容后都留有部分思考题，供学生在实验中各个阶段思考和分析，以巩固所学的知识及内容。

本书由华东交通大学段向阳和长沙铁道学院刘必成主编，负责全书统稿。参加编写工作的教师有：

王志明编写第七章（实验二十三～三十）；刘祁编写第一章、第二章；刘福之编写第三章；朱宋辉编写第四章（实验一～五）；任才贵编写第六章（实验十七、十九、二十、二十一）；陈早生编写第八章；段向阳编写绪论及第五章、第六章部分实验（实验七～实验十六、实验十八、实验二十二）、附录。

应当指出，实验教学是一件集体的事业，无论是教材的建设，还是实验的开出都是实验教师和实验技术人员集体劳动的成果。在编写本书的过程中，我们参阅了两校以前使用过的教材以及许多兄弟院校的教材和资料，其书目在参考文献中已列出，在此我们谨致深切的谢意。

由于我们水平有限，书中难免存在错误和缺点，诚恳希望读者批评指正。

编者

1997年8月

目　　录

绪　论

物理学是一门自然科学。物理学的研究方法包括实验和理论两个方面，它们既紧密相连，又互为独立，各自具有自己的特点。物理实验集理论、方法、技能和数据处理为一整体，成为一门独立的学科。

物理实验是高等院校对理工科学生进行科学实验基本训练的一门独立的必修基础课程，也是大学生进入大学后受到的系统实验方法和实验技能训练的开始。因此，学好物理实验对高等理工科院校的学生来讲是十分重要的。那种重视理论轻视实验的观点是错误的，是不适用于科学发展的需要，必须加以纠正。

一、物理实验课的目的和任务

1. 通过对物理实验现象的观察、分析以及对某些物理量的测量，学习物理实验知识，加深对物理学原理的理解。

2. 培养学生从事科学实验的初步能力，其中包括：通过阅读教材或资料，作好实验前的准备工作；能借助教材或仪器说明书正确使用仪器；能运用物理学理论对实验现象进行初步分析和判断；正确记录和处理数据，分析实验结果并撰写实验报告；能够完成简单而具有设计性内容的实验。

3. 培养学生严肃认真、细致踏实、一丝不苟、实事求是的科学态度和克服困难、坚韧不拔的工作作风。培养良好的实验习惯，遵守纪律，爱护国家财产的美德。

二、物理实验课的教学程序及有关规定

物理实验是一门独立的课程，在教师的指导下由学生独立完成。在整个实验教学过程中，学生必须主动、自觉、独立地获得知识和技能。因而实验决非只是为了得到几个数据，而是要通过实验去探索研究问题，将书本知识转化为实际操作技能。为此，我们将物理实验课分为三个阶段：预习、实验、总结三个阶段。

1. 预习阶段

预习讲义，为实验做好准备工作。

实验课前要仔细阅读教材或有关的资料，了解实验的目的、实验的原理以及实验的方法和实验条件。对实验中要使用的仪器和装置应阅读教材中有关仪器的介绍，了解其使用方法和注意事项。

为了督促同学们预习，也为教师评定成绩有根据，因此要求每位同学预习后写出预习报告。预习报告的内容包括：实验名称、实验目的、实验原理、实验内容（或实验步骤）以及实验原始数据记录表格。因此，课前预习的好坏是实验中能否取得主动的关键。所以，实验室规定：无预习报告者不得做实验。

2. 实验阶段

独立操作，既动脑，又动手。

学生进入实验室后应遵守实验室的规章制度。在教师讲解以前，先检查所有的实验仪器是否齐全（但不允许动用仪器）。每次实验开始前，指导教师一般会交待一些有关的注意事项，学生可以结合自己的预习逐一领会，特别要注意实验中的操作要领以及容易引起失误的地方。

进行实验时，首先是布置、安装（或接线）和调试仪器。仪器布置是否合理，直接影响到操作、读数是否方便。对仪器装置进行调整是一项细致、耐心的工作，切忌急躁。

调试准备工作就绪后，便可开始进行测量。测量中所得到的原始数据应记录在自己准备好的记录表格中，要特别注意数据的有效数字和单位。在通常情况下，要求学生用钢笔或圆珠笔记录实验数据。如确系记错了，也不要涂改，应在错误处轻轻地划上一道，在旁边写上正确值（如果错误较多，必须重新记录），这样做使正误数据都能清晰可辨，供分析误差时参考。

实验完成后，暂时不要破坏测试条件，将记录数据请教师审阅签字，如发现错误数据要重新进行测量，不可拼凑结果，抄袭或涂改原始数据，对于弄虚作假的现象，一经发现实验成绩按零分计。

学生要严格遵守实验规则，爱护仪器，实验过程中发生事故应及时报告指导教师处理。如不遵守实验规则造成仪器损坏，应酌情赔偿。实验完成后应将仪器整理好，经教师检查鉴定并签字后，方可离开实验室。

3. 总结阶段

书写实验报告。

实验报告是实验成果的文字报导，是一种技术性文件，因此应书写工整、文理通顺、简单扼要、图表正确、数据完备、结论明确。书写实验报告是逐步培养学生分析、总结问题能力的一个重要方面。

实验报告的内容应包括（预习报告的内容除外）：实验数据处理、实验结果、分析讨论。

由教师签字的原始数据表格是实验报告的附件之一，应附于实验报告内（最好贴上，以免丢失）。另外预习报告也是实验报告的一部分，应同实验报告一并上交。

实验动手能力要靠平时一点一滴的积累，在学习中要自觉面向困难，不断地总结经验，提高自己的素质。这样做不但能够学好本课程，而且还会对你今后的学习和工作带来深远的影响。

第一章　测量与误差

本章介绍对测量与误差的分析；测量误差和不确定度的估算以及测量结果的表示和评定。以上内容只限于误差理论的基本知识和基本结论。其详细的探讨和证明留待在数理统计课中学习。

第一节　测量与误差的概念

物理实验是以测量为基础的学科。研究物理现象、验证物理原理、了解物质的性质等，都要进行测量。

测量分直接测量和间接测量。直接测量是将被测量与作为标准量的同类量进行比较的过程。物理实验中可以直接测量的量有长度、时间、质量、电流强度、电压等。直接测量中的被测量称为直接测量量。如果待测量须利用几个直接测量量与待测量之间的函数关系计算得到，称这种测量为间接测量。在物理实验中，多数是进行间接测量。间接测量中的被测量，称为间接测量量。

一般情况下，对某一待测量须进行多次重复测量。如果同一操作者，在同样的环境条件下，使用同样的仪器，采用同一实验方法，对同一待测量进行多次测量，每次测量的可靠程度相同，那么没有任何理由认为某次测量值比另一次更精确。这种测量，即在测量条件相同情况下进行的一系列测量称为等精度测量。以下讨论的多次测量都是指等精度测量。

一切测量量一般不可能与客观存在的真实值即真值相等，它们总是存有差异，这种差异称为误差。设测量量为 x，对应的真值为 x_0，其误差为：

$$\Delta x = x - x_0 \tag{1-1-1}$$

误差 Δx 称为绝对误差。

实验中还引入相对误差，用符号“E”表示：

$$E = \frac{\Delta x}{x_0} \times 100\% \tag{1-1-2}$$

对于大多数物理实验而言，它们的真值是不知道的。严格地说，无法用以上两个公式计算误差。通常，在等精度测量中，多次测量量的算术平均值 $\bar{x}$，即

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i / k \tag{1-1-3}$$

$\bar{x}$称为最佳值或近真值，用以代替真值 x_0。式中 k 为测量次数。测量值 x_i 与近真值之差常称为偏差 Δx_i，即

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x} \tag{1-1-4}$$

Δx_i 表示在多次测量中，第 i 次测量值 x_i 与近真值 $\bar{x}$的偏差，这不是误差。在误差分析中，要经常计算这种偏差。

第二节　误差的分析

通常将误差按产生的原因和特点分为两类，即系统误差与偶然误差。

一、系统误差

由于测量条件，即进行测量的人、测量理论、仪器装置、实验方法、环境条件（温度、湿度、压强）等各方面引起的误差称为系统误差。这种误差总是具有一确定值。

例如，螺旋测微器有0.045mm的零点偏差。用它测量的数据总比真值相差0.045mm（假设没有其他误差）。0.045mm的定值误差，属于系统误差。在实验中，应该通过校准和正确操作仪器、改进实验装置、完善实验方法、尽量稳定实验环境来减小系统误差。

二、偶然误差

由于测量过程中，环境条件、进行测量的人的精神状态以及待测量本身都存在微小的、偶然性的波动。正是由于这些微小的、偶然性的波动因素，即使在足够多次等精度测量中，各次测量值几乎都不完全相同，而且测量值是分散的。由此引起的误差称为偶然误差。

例如，用眼观察光屏，以像的清晰程度来测量凸透镜与屏之间的像距。显然，各次测量结果不相同。这是由于人眼对像清晰程度辨认能力的波动结果。由此所引起的误差属于偶然误差。

三、系统误差与偶然误差的数学规律

从数学的观点来看，自然界存在两种类型的规律：确定性规律与统计规律。这两种规律分别与上两类现象对应。

确定性规律的特点是：在一定条件下，某种结果一定会出现。

例如，在弹性限度内，弹簧的伸长量一定与拉力成正比；螺旋测微器有零点偏差，测量结果与真值总是有确定误差。显然这类现象的结果是可以预定的。系统误差服从确定性规律的。

统计规律的特点是：在一定条件下，某种结果可能出现，也可能不出现，具有偶然性。但某种结果出现的概率是确定的。

在等精度测量中，各种测量值都有可能出现，具有偶然性。但各种测量值出现在某个值的附近，形成一个分布。正方向的偏差和负方向的偏差次数大体相同。在没有错误的情况下，很大的偏差不会出现。这一规律，在测量次数越多时，表现得越明显。这种分布称为正态分布，是一种最典型的分布规律。由数理统计理论证明，虽然各种测量值的出现是偶然的，但测量结果大于或小于某个值的概率是确定的，即测量结果出现在某个值的一定范围内的概率是确定的。测量结果与某个值的差，就是偶然误差，偶然误差遵循统计规律。

为了描述各种统计规律，数理统计理论已总结出许多种分布（即分布函数）。本书只讨论与正态分布和均匀分布有关的问题。

四、精密度　准确度　精确度

精密度：表示测量数据集中的程度。测量的精密度高，说明测量数据集中，偶然误差小。

准确度：表示测量值与真值符合的程度。测量的准确度高，说明最佳值与真值偏离小，系统误差小。

精确度：是对测量的精密度与准确度的综合评定。测量的精确度高，说明测量数据不仅比较集中，而且接近真值，即系统误差与偶然误差都较小。

如图 1-2-1 所示为打靶时弹作点的分布。

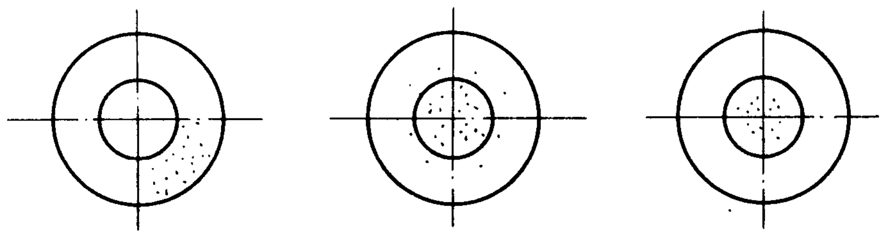

图 1-2-1

图 (a)：精密度高，准确度低。偶然误差小，系统误差大。

图 (b)：精密度低，准确度高。偶然误差大，系统误差小。

图 (c)：精确度高。偶然误差和系统误差都较小。

由此可见，偶然误差和系统误差一般不会单独存在。常常是兼而有之。各占的分量与具体实验有关。两种误差之间并没有严格的界限。在实际测量中，有许多误差有时无法准确判断其从属类型。同时，随着测量技术水平的提高，人们对环境条件中偶然变动规律的认识及控制能力也将提高，于是偶然误差的一部分将转变为系统误差。总之，在实验中多注意分析各种误差出现的可能性，尽量设法减小误差。

第三节　偶然误差的估算

偶然误差的估算分为直接测量量的误差与间接测量量的误差的估算。

一、直接测量量的误差估算

直接测量又分单次测量和多次测量。

在单次测量中，单次测量量 x，其误差由所用仪器的误差决定。用符号“Δ_x”表示仪器误差。则测量量 x 的测量结果应表示为：

$$x=(x\pm\Delta_x)(\text{单位}) \tag{1-3-1}$$

在等精度的多次测量中，偶然误差遵循统计规律。测量量服从正态分布，测量的最佳值可用式 (1-1-3) 计算，即

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{k}x_i/k \tag{1-3-2}$$

根据数理统计理论，计算多次测量的标准偏差公式为：

$$S=\sqrt{\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{k-1}\sum_{i=1}^{k}\Delta x_i^2}\quad(\text{贝塞尔公式}) \tag{1-3-3}$$

$$S_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{1}{k(k-1)}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2}=\sqrt{\frac{1}{k(k-1)}\sum_{i=1}^{k}\Delta x_i^2} \tag{1-3-4}$$

式（1-3-3）表示对于某一测量值的标准偏差；式（1-3-4）表示对于最佳值（平均值）的标准偏差。上述两式是利用“方均根”法对测量值进行数理统计得到的，称为实验结果的标准差。它可以表示测量的偶然误差，也可以表示一列测量值的精确度。当标准差较小时，表明这一列测量值大多数都集中在它的平均值附近，当标准差较大时，表明这一列测量值，有较多的值距平均值较远，比较分散。

比较式（1-3-3）和式（1-3-4）有：

$$S_{\bar{x}}=\frac{1}{\sqrt{k}}S \tag{1-3-5}$$

由此可见，算术平均值的标准差要比任何一次测量值的标准差小 $1/\sqrt{k}$ 倍，这表明多次测量减小了偶然误差。即测量次数增加，最佳值的标准差 $S_{\bar{x}}$ 随测量次数 k 增加而按 $1/\sqrt{k}$ 的比例减小。当测量次数 $k\to\infty$ 时，$S_{\bar{x}}\to 0$，如图 1-3-1 所示。这说明在实际测量中次数过多，并无益处。根据偶然误差的统计规律，当次数 $k>10$ 次以后，$S_{\bar{x}}$ 的变化过程相当缓慢。因此在一般测量中，k 应大于 5 次，物理实验一般选取 $k=5\sim10$ 次，而科研最好选取 $k=10\sim20$ 次比较合理。

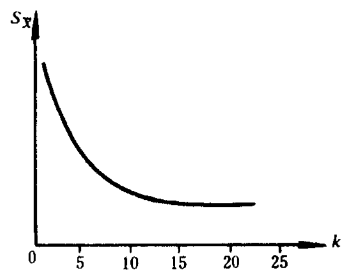

图 1-3-1

多次测量的结果表示为：

$$x_i=(x_i\pm S)\ （单位） \tag{1-3-6}$$

$$x=(\bar{x}\pm S_{\bar{x}})\ （单位） \tag{1-3-7}$$

二、粗大误差的剔除

由于粗心大意或不按规则操作，或实验条件发生突变引起较大的误差。称其为粗大误差或过失误差。这种误差一般出现在个别测量值中。含有粗大误差的测量值，对测量结果会产生较明显的歪曲。应将其剔除，以提高测量的可靠性。

判断某组实验数据中是否有粗大误差数据的准则有多种，最简单的是拉依达准则。它的具体内容是：

在多次测量中，若发现第 j 个偏差：

$$|\Delta x_j|>3S$$

则说明：第 j 个测量数据 x_j 含有粗大误差，应将其剔除。对余下的 $k-1$ 个数据又重新计算 S，并继续进行审查，直至最大偏差 $\Delta x_{\max}$：

$$|\Delta x_{\max}|\leqslant 3S$$

为止。应注意：S 随着剔除过程的进行，其值在不断变化。以上准则只适用于 $k\geqslant10$ 的情况。

在等精度测量中，偶然误差遵循统计规律，标准偏差 S 和 $S_{\bar{x}}$ 是按正态分布规律计算的。正态分布的特点反映了等精度测量的特点，即多次测量的数据在某一确定值（最佳值）附近对称分布。如图 1-3-2 所示，用 $f(x)$ 表示各次测量值出现的概率。按标准误差计算的结果表示，测量值出现在：$(\bar{x}-S_{\bar{x}})\sim(\bar{x}+S_{\bar{x}})$ 范

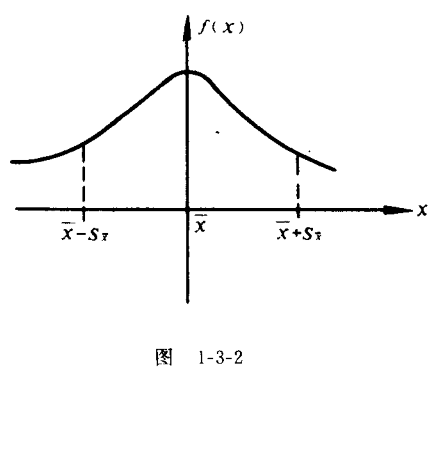

图 1-3-2

围内的概率是 68.3%。

【例 1】 用米尺测量一物长度 10 次。测量数据为：3.48、3.41、3.45、3.43、3.47、3.42、3.43、3.44、3.45、3.46，单位是 cm。试估算测量误差，并表示所得测量结果。

【解】 首先计算长度 l 的最佳值：

$$\bar{l}=\sum_{i=1}^{k} l_i/k=\frac{3.48+3.41+\cdots+3.46}{10}=3.44\text{cm}$$

再求标准差：

$$\begin{aligned}S&=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\Delta l_i^2}{k-1}}\\&=\sqrt{\frac{(3.44-3.48)^2+(3.44-3.41)^2+\cdots+(3.44-3.46)^2}{10-1}}\\&=0.025\\&=0.03\text{cm}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{\bar{l}}&=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}\Delta l_i^2}{k(k-1)}}\\&=\sqrt{\frac{(3.44-3.48)^2+(3.44-3.41)^2+\cdots+(3.44-3.46)^2}{10(10-1)}}\\&=0.008\\&=0.01\text{cm}\end{aligned}$$

考虑到有效数字的运算规律，S 与 $S_{\bar{l}}$的末位应在百分位，而且只用一位有效数字表示（参见第二章第一节）。

测量结果为：

对于每一次：$l_i=(l_i\pm S)=(l_i\pm 0.03)\text{cm}$

对于平均值：$l=(\bar{l}\pm S_{\bar{l}})=(3.44\pm 0.01)\text{cm}$

这说明，测量值处于（3.43～3.45）cm 的范围内的概率为 68.3%（注意：$\bar{l}$ 与 $S_{\bar{l}}$的末位数应对齐，都在百分位）。

三、间接测量量的误差估算

间接测量量 y 是由 n 个直接测量量 x_i 的测量结果决定。它们之间有一定的函数关系，即

$$y=f(x_1,x_2,\cdots,x_k)$$

用微分学可证明，间接测量量的最佳值是

$$\bar{y}=f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_k) \tag{1-3-8}$$

上式表明，只须将每个直接测量量的最佳值 $\bar{x}_i$ 代入函数式，即可算出间接测量量的最佳值。

各直接测量量的误差必然影响间接测量量的误差，称其为误差传递。用微分学，概率论及数理统计理论可导出间接测量量的标准差 σ_y 和相对误差 E_y 的计算公式。在此，只引用，不进行严密论证。

由函数 y 的全微分式：

$$\mathrm{d}y=\frac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial f}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots\frac{\partial f}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i+\cdots\frac{\partial f}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k$$

可找到误差传递系数$\frac{\partial f}{\partial x_i}$，间接测量量的标准差$\sigma_y$的计算公式为：

$$\sigma_y=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\sigma_1\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\sigma_2\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_i\right)^2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\sigma_k\right)^2}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\sigma_i\right)^2} \tag{1-3-9}$$

式中σ_i表示第i个直接测量量的标准差。如果是单次测量量，σ_i即为仪器误差；若是多次测量量，σ_i为平均值的标准差。

如果在函数式中，各直接测量量之间仅为乘除关系，可首先将函数y取对数，使乘除关系变为和差关系，然后由对数函数$\ln y$的全微分式中，找出$\ln y$的误差传递系数$\frac{\partial(\ln y)}{\partial x_i}$可得到间接测量量的相对误差$E_y$的计算公式，即对函数$y=f(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_k)$取对数：

$$\ln y=\ln f(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_k)$$

对$\ln y$全微分

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=\frac{\partial(\ln f)}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial(\ln f)}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial(\ln f)}{\partial x_i}\mathrm{d}x_i+\cdots+\frac{\partial(\ln f)}{\partial x_k}\mathrm{d}x_k$$

求得$\ln y$的误差传递系数$\frac{\partial(\ln y)}{\partial x_i}$，间接测量量的相对误差

$$E_y=\frac{\sigma_y}{\bar{y}}=\sqrt{\left[\frac{\partial(\ln y)}{\partial x_1}\sigma_1\right]^2+\cdots+\left[\frac{\partial(\ln y)}{\partial x_i}\sigma_i\right]^2+\cdots+\left[\frac{\partial(\ln y)}{\partial x_k}\sigma_k\right]^2}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{\partial(\ln y)}{\partial x_i}\sigma_i\right]^2} \tag{1-3-10}$$

间接测量量y的绝对误差

$$\sigma_y=E_y\cdot\bar{y} \tag{1-3-11}$$

将乘除关系转换为和差关系，并估算间接测量量的误差显得比较简便。

四、仪器误差

仪器不可能绝对准确。一般在说明书中，都以某种方式注明仪器误差。它是指在正确使用下，仪器示值与真值之间可能产生的最大误差。在正确使用中，对任一具体示值，仪器的示值误差应小于仪器误差。单次测量量的误差通常由仪器误差决定。

以下，讨论几类常用仪器的误差估算法。

（1）有最小分度值a，或精度δ的量具，其仪器误差为最小分度值或精度的一半。即

$$\Delta_x=\begin{cases}a/2\\ \delta/2\end{cases} \tag{1-3-12}$$

如最小分度为0.01mm的螺旋测微器，它的仪器误差$\Delta_x=0.005$mm；精度为0.02mm的游标卡尺，它的仪器误差$\Delta_x=0.01$mm。

（2）电器仪器的误差，由所用仪器的量程A_m及仪表的级别“K”决定。计算式为

$$\Delta_x=A_m\times K/100 \tag{1-3-13}$$

如使用毫安表10mA的量程，它的级别是0.5，其仪器误差$\Delta_x=0.05$mA。显然，选用的量程越大，仪器误差越大。一般估计电路上待测量的最小值不小于所用量程的三分之二，这样比较合理。

（3）数字显示仪表的误差，通常等于数字表盘上最低位的一个单位。因为数字式仪表是

依赖计数脉冲信号的个数实现计量的。下一个脉冲没有到来之前，显示数字不变。接到下一个脉冲后，才使最低位数字增加一个单位。可见数字显示仪表的分辨能力不可能比最低位的一个单位更小。如毫秒计数器，最低位的一个单位是 1ms。其仪器误差 $\Delta_x=0.001s$。

五、用误差表示测量结果

对每一个实验，其测量结果的表示是根据测量误差对测量结果进行分析，讨论作出的结论。因此，用误差表示测量结果应写成如下形式：

$$y=(\bar{y}\pm\sigma_y)\quad (\text{单位}) \tag{1-3-14}$$

$$E_y=\frac{\sigma_y}{\bar{y}}\times 100\% \tag{1-3-15}$$

如有真值，或公认值存在，还需估算对真值或公认值的相对误差

$$E_y=\frac{|\bar{y}-y_{\text{真}}|}{y_{\text{真}}}\times 100\% \tag{1-3-16}$$

误差 σ_y 与 E_y 一般用一位有效数字表示。最佳值 $\bar{y}$的末位应该与误差 σ_y 的末位对齐。

【例 2】 间接测量量 $y=A+2B+C+5D$。由实验测得直接测量量 A、B、C、D 的测量结果为：

$$A=(38.206\pm0.001)\text{cm}$$
$$B=(13.2487\pm0.0002)\text{cm}$$
$$C=(161.25\pm0.01)\text{cm}$$
$$D=(1.3343\pm0.0002)\text{cm}$$

试计算间接测量量 y 的测量结果。

【解】 首先求出误差传递系数，由

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}A+2\mathrm{d}B+\mathrm{d}C+5\mathrm{d}D$$

则：

$$\frac{\partial y}{\partial A}=1;\ \frac{\partial y}{\partial B}=2;\ \frac{\partial y}{\partial C}=1;\ \frac{\partial y}{\partial D}=5;$$

由误差传递，计算间接测量量 y 的绝对误差：

$$\begin{aligned}\sigma_y&=\sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial A}\sigma_A\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial B}\sigma_B\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial C}\sigma_C\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial D}\sigma_D\right)^2}\\&=\sqrt{\sigma_A{}^2+4\sigma_B{}^2+\sigma_C{}^2+25\sigma_D{}^2}\\&=0.01\text{cm}\end{aligned}$$

然后计算 y 的最佳值

$$\begin{aligned}\bar{y}&=\bar{A}+2\,\bar{B}+\bar{C}+5\,\bar{D}\\&=232.67\text{cm}\end{aligned}$$

及相对误差

$$\begin{aligned}E_y&=\frac{\sigma_y}{\bar{y}}\times100\%\\&=0.0043\%=0.005\%\end{aligned}$$

测量结果为

$$y=(232.67\pm0.01)\text{cm}$$

E_y 与 σ_y 都只用一位有效数字，测量结果中最佳值的末位在百分位，误差 σ_y 的末位也在百分位，称此为数位对齐。

【例 3】 用流体静力学称衡法测固体密度 ρ，计算式为 $\rho=\frac{m}{m-m_1}\rho_0$。式中 m 为空气中称的质量，m_1 为在水中称的表观质量 m_1，ρ_0 为当时温度下水的密度。在实验中，直接测量量 m、m_1、ρ_0 都是单次测量量，测得的数据分别为 58.94g、19.00g、0.9965g/cm³（27℃时）。天平的感量为 0.05g（天平横梁上最小分度值）。水密度误差为 0.0003g/cm³。试估算间接测量量 ρ 的误差，并表示其测量结果。

【解】 单次测量量的测量结果：

$$m=(58.94\pm0.01)\mathrm{g}$$

$$m_1=(19.00\pm0.01)\mathrm{g}$$

$$\rho_0=(0.9965\pm0.0003)\mathrm{g/cm^3}$$

天平横梁可估读到 1/5 格，故天平的仪器误差 $\Delta_x=0.05/5=0.01\mathrm{g}$。由单次测量量的绝对误差 $\sigma=\Delta_x$，则 $\sigma_m=\sigma_{m_1}=\Delta_x=0.01\mathrm{g}$，$\sigma_{\rho_0}=0.0003\mathrm{g/cm^3}$

首先计算密度 ρ

$$\rho=\frac{m}{m-m_1}\rho_0=\frac{58.94}{58.94-19.00}\times0.9965$$

$$=1.4706\mathrm{g/cm^3}$$

按有效数字运算规则 ρ 只取 4 位有效数字，因首数是“1”，多取了 1 位。

然后，对 ρ 取对数，再全微分，求得 $\ln\rho$ 的误差传递系数：

$$\ln\rho=\ln m-\ln(m-m_1)+\ln\rho_0$$

$$\frac{d\rho}{\rho}=\frac{\mathrm{d}m}{m}-\frac{dm-dm_1}{m-m_1}+\frac{d\rho_0}{\rho_0}$$

$$=\frac{-m_1}{m(m-m_1)}\mathrm{d}m+\frac{1}{m-m_1}\mathrm{d}m_1+\frac{1}{\rho_0}\mathrm{d}\rho_0$$

则：

$$\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial m}=\frac{-m_1}{m(m-m_1)};\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial m_1}=\frac{1}{m-m_1};\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial\rho_0}=\frac{1}{\rho_0}$$

由函数 $\ln\rho$ 的误差传递系数，可先求得密度 ρ 的相对误差 E_ρ，再计算绝对误差 σ_ρ：

$$E_\rho=\frac{\sigma_\rho}{\rho}=\sqrt{\left(\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial m}\sigma_m\right)^2+\left(\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial m_1}\sigma_{m1}\right)^2+\left(\frac{\partial(\ln\rho)}{\partial\rho_0}\sigma_{\rho_0}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{-m_1}{m(m-m_1)}\sigma_m\right)^2+\left(\frac{1}{m-m_1}\sigma_{m1}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho_0}\sigma_{\rho_0}\right)^2}$$

$$=0.0113\%=0.012\%$$

$$\sigma_\rho=E_\rho\cdot\rho=1.656\times10^{-4}=0.0002\mathrm{g/cm^3}$$

测量结果

$$\rho=(1.4706\pm0.0002)\mathrm{g/cm^3}$$

相对误差 E_ρ 的有效数字的首位是“1”，第二位数又比“5”小，则相对误差 E_ρ 在此用两位有效数字表示（参见第二章第一节）。

第四节 测量结果的不确定度评价

在测量结果中指明不确定度，目的在于说明测量结果的可信赖程度。测量结果的不确定度也称为实验不确定度，有时简称不确定度。它是对测量质量的一种描述，如果缺少这个描述，测量结果就不完善。因此，用不确定度的大小评定测量结果的好坏应大力提倡。

不确定度是表明真值出现的范围。最佳值与真值之差（即误差）可能落在其中。不确定度越小，标志着误差的可能值越小，测量的可信赖程度越高。反之亦然。

1989 年，国际计量局同意并公布了"实验不确定度的表示"，力求统一评定测量结果可信赖程度的方法。这使误差理论又向前迈进了一步。本书只介绍简单情况下的不确定度的估算方法。

一、合成不确定度的两类分量

在实验中，不确定度是由各种误差引起的。合成不确定度表示各种误差影响的总效果。也称其为总不确定度。它可以有多个分量（每一分量与一项误差对应）。按估算的方法，将这些分量划分为 A、B 两类不确定度。A 类不确定由一些分量组成，各分量用符号"s_i"表示；B 类不确定度由另一些分量组成，各分量用符号"u_i"表示。先求出各分量 s_i 和 u_i，然后用"方和根"法计算 A、B 两类不确定度。用符号"Δ_A"表示 A 类不确定度；用符号"Δ_B"表示 B 类不确定度。则

$$\Delta_A=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}s_i^2} \tag{1-4-1}$$

$$\Delta_B=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2} \tag{1-4-2}$$

式中 m 和 n 分别表示 A、B 两类不确定度各自分量的个数。

二、合成不确定度

合成不确定度由 A、B 两类不确定度组成，同样按"方和根"法计算合成不确定度。用符号"σ"表示合成不确定度，即总不确定度

$$\sigma=\sqrt{\Delta_A^2+\Delta_B^2} \tag{1-4-3}$$

由式（1-4-1）和式（1-4-2）代入式（1-4-3），得：

$$\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}s_i^2+\sum_{i=1}^{n}u_i^2}$$

式中各 s_i 及 u_i 都是独立变化的。

三、直接测量量的不确定度的估算

1．与读数分散对应的不确定度分量 s

在等精度测量中，由于偶然误差，多次测量值一般不相同，称为读数分散。与读数分散对应的不确定度分量 s，可用正态分布计算标准误差的方法计算。即

$$s=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2}{k-1}} \tag{1-4-4}$$

$$s_{\bar{x}}=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^2}{k(k-1)}} \tag{1-4-5}$$

式中 k 表示测量次数。这种不确定度是用统计方法直接估算的，属于 A 类不确定度。

2．与仪器不准对应的不确定度分量 u