

13.13-16/95

初中代数疑难解析



中学课程

辅导丛书

$x =$
 $y =$
 $z =$

中学课

初中代数疑难解析

朱长龄 项昭义 编著
冯俊民 张顺芳

河南人民出版社

初中代数疑难解析

朱长龄 项昭义 编著
冯俊民 张顺芳

责任编辑 温 光

河南人民出版社出版
河南第二新华印刷厂印刷
河南省新华书店发行

787×1092毫米32开本 11.875印张 230千字

1982年6月第1版 1982年6月第1次印刷

印数：1—331,000册

统一书号：7105·251 定价0.88元

出版说明

《中学课程辅导丛书》是我们中南五省（区）人民出版社继《中小学各科教学法丛书》协作出版之后，又一次协作出版供中学生学习用的丛书。丛书包括初、高中各科疑难解析共二十三种。初中部分有：语文、代数、几何、英语、物理、化学、地理、历史、生物、政治，计九种。高中部分有：语文、代数、立体几何、解析几何、微积分、概率、三角、物理、化学、地理、历史、生物、政治、英语，计十四种。这套丛书计划在1982年三月以前出版初中五种，1983年二月底以前陆续出齐。

《中学课程辅导丛书》紧扣中学各科教学大纲和通用教材，按照中学生的一般水平，围绕重点，解决疑难，培养兴趣，发展智力，以期加强基础知识，提高学习质量。

参加这套丛书编写的，都是执教多年，对本学科养之有素的教师和专门家。编辑方法，一般以教材为序，一个疑难点写一篇文章。有的用问答形式，有的用论证形式，各篇虽有些联系，但都可以独立成篇，篇幅长短不一，本着要言不烦的原则，当长则长，宜短则短，力求文字生动活泼，内容明白易懂，并富有启发性。

以上数端，只是我们编辑、作者的愿望，出书以后，成

败利钝，还有待于在学习中检验。我们热切希望听到专家、老师和同学们的意见，以便再版时增删正误。

河南人民出版社

湖南人民出版社

广东人民出版社

广西人民出版社

湖北人民出版社

引 言

学习数学，只有对数学研究的对象和特点有所认识，才能激发学习数学的兴趣，才会有正确的学习方法。

初等数学中的算术、代数、几何、三角，无非是研究事物的数量关系和物体的空间形式；就是高等数学，也还是研究数和形这两件事。恩格斯曾给数学下过一个简单明了的定义：“纯数学是以现实世界的空间形式和数量的关系——这是非常现实的资料——为对象的。”

中学阶段所学的代数，是属于初等代数范畴。

代数的中文译名，最早叫阿尔热巴拉，是拉丁文Algebra的译音。1845年俄国政府赠给我国的图书中有阿尔喀布拉数学书一本，阿尔喀布拉是俄语 алгебра 的译音，还未译出代数这个词。以代数作为数学分科的名词，最早见于1853年英国人伟烈亚力所著的《数学启蒙》一书。1859年出版的《代数学》十三卷，则是我国第一部以代数为名的著作。

代数的基础是以字母代替具体数字，在一般形态上研究算术运算；代数学的真髓是多项式的理论和代数方程论。传统的中学代数课本，包括数的理论的发展、代数式的理论、方程的理论、函数论初步、坐标知识及应用、简单级数求和、极限概念及近似计算初步等方面的内容，在现行的初中代数

课本中，还包括一些平面三角、解析几何、统计的初步知识。

初等代数是很重要的一门基础课，代数知识不但是数学大厦的基石，也是其他自然科学甚至是社会科学的有用工具，同学们一定要把代数这门课学好。

目 录

引言

- 一、“集合”——近代数学的一个重要概念 (1)
- 二、“数”和“量”的区别和联系 (4)
- 三、有理数有哪些重要的性质 (6)
- 四、学习数轴有什么意义 (8)
- 五、绝对值的定义和性质 (9)
- 六、非负数的意义是什么 (12)
- 七、加与减、乘与除——矛盾的对立和统一 (15)
- 八、集合对应的图示意义 (17)
- 九、怎样表示被除式、除式、商式和余式的关系 (23)
- 十、方程式和恒等式有什么区别 (27)
- 十一、什么是方程的同解变换 (30)
- 十二、一个方程有解或无解的确切含义是什么 (32)
- 十三、含有绝对值的方程的解法 (34)
- 十四、应用题的代数解法与算术解法有何异同 (38)
- 十五、为什么要学习字母系数方程 (41)
- 十六、初中代数中应用题有哪些主要类型 (44)
- 十七、为什么要学习不等式 (57)

十八、不等式的一些基本性质	(60)
十九、不等式有哪些同解性质	(63)
二十、不等式的解与不等式的解的集合有什么不同	(66)
二十一、什么叫绝对不等式与条件不等式	(68)
二十二、一元一次方程和一元一次不等式有何异同	(70)
二十三、怎样表示不等式的解的集合	(72)
二十四、绝对值不等式的解法	(74)
二十五、如何解含有字母系数的不等式	(80)
二十六、我国对于解方程组的贡献	(83)
二十七、方程组同解变形定理有哪几个	(85)
二十八、有趣的杨辉三角形	(91)
二十九、如何学好乘法公式	(97)
三十、因式分解有何妙用	(100)
三十一、怎样灵活运用“十字相乘法”	(108)
三十二、什么是待定系数法	(110)
三十三、什么叫综合除法	(116)
三十四、什么叫对称式、轮换式	(124)
三十五、在因式分解中如何利用换元法	(128)
三十六、因式分解的思考方法	(131)
三十七、偶数与奇数的一般表示方法是什么	(135)
三十八、证明代数恒等式的思路	(137)
三十九、怎样证明条件等式	(141)

四十、什么叫部分分式？如何把一个分式分解为部

分分式的和 (146)

四十一、为什么解分式方程时必须验根 (152)

四十二、无理数就是无限小数吗 (155)

四十三、 π 有精确值吗 (159)

四十四、怎样在数轴上作出 $\sqrt{2}$ 、 $\sqrt{3}$ 、... 的点 (161)

四十五、在实数的集合中，有理数与无理数的个数

哪个多 (164)

四十六、平方根与算术平方根有什么异同 (165)

四十七、 $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^m}^{\frac{1}{n}}$ 成立的条件是什么 (167)

四十八、完全平方数的特点 (168)

四十九、在作根式运算时，为什么要把分母有理化... (170)

五十、在什么情况下要进行分子有理化 (172)

五十一、怎样化简 $\sqrt{a \pm \sqrt{b}}$ (174)

五十二、常用的有理化因式有哪些 (179)

五十三、如何理解被开方数的指数 (181)

五十四、为什么要把指数概念加以推广 (182)

五十五、正整指数幂的运算法则对全体有理数指数幂

还成立吗 (185)

五十六、为什么要学习对数 (193)

五十七、对数定义中为什么规定底数大于零而不等

于 1 (195)

五十八、怎样灵活运用对数恒等式 $a^{\log_a N} = N$ (196)

五十九、常用对数的性质及其应用 (198)

六十、二次三项式的配方法有什么重要性	(207)
六十一、一元二次方程的根的判别式有什么作用 ...	(215)
六十二、一元二次方程根与系数的关系有什么应用	(222)
六十三、一元的高次方程有一般解法吗	(232)
六十四、根式方程的解法举例	(234)
六十五、二元二次方程组的特殊类型及其解法	(238)
六十六、解方程组时,在什么条件下两方程可以相 除	(241)
六十七、函数记号中 f 的意义是什么	(244)
六十八、在函数问题中,如何确定自变量的取值范 围	(247)
六十九、函数表示法小议	(255)
七十、如何根据已知条件建立两个变量间的函数关 系	(257)
七十一、怎样求二次函数的极值	(263)
七十二、解极值应用题的步骤是什么	(268)
七十三、怎样解分式不等式	(278)
七十四、一元二次不等式有哪几种主要解法	(284)
七十五、根式不等式的解法	(289)
七十六、关于因数和倍数	(291)
七十七、最大公约数和最小公倍数	(293)
七十八、0 和 1 有什么特点	(300)
七十九、平面三角学小史	(304)

八十、同角三角函数间的关系	(305)
八十一、正弦定理的证明和应用	(311)
八十二、余弦定理的证明和应用	(322)
八十三、定比分点公式的应用	(337)
八十四、直线的斜率	(343)
八十五、怎样选取坐标系	(347)
八十六、解析法证题举例	(350)
八十七、圆的方程	(357)
八十八、求过圆外一点的圆的切线方程	(360)

一、“集合”——近代数学的一个概念

全国中小学数学通用教材已将集合论的内容渗透进去。运用“集合”的概念研究某些数学问题，既明了又方便，而且还能解决许多用一般数学方法难于解决的问题。“集合”是近代数学的一个重要概念。

1. 什么是“集合”？

“集合”是“集合论”中的奠基概念，我们只能用描述的方法说明它的含意。

请看下面的例子：

- ① 1, 2, 3, 4;
- ② 所有的正方形;
- ③ 某学校的学生;
- ④ 大于3而小于15的偶数。

分析这些例子，可以看出它们分别是由一些数、一些图形、一些人组成的整体。象这样，我们把具有某种属性的一些对象所组成的整体称做“集合”，而集合里的每一个对象，叫集合的元素。例如①是由1, 2, 3, 4四个自然数组成的集合，自然数1, 2, 3, 4都是这个集合的元素。

2. 要全面理解“集合”这个概念的含意，请注意以下三个问题：

(1) 集合里的元素必须具有某种共同的属性。

不是随便一些东西拼凑在一起就能构成一个集合的。如“风、马、牛、白菜……”就不是一个集合，因为对象之间没有共同的属性；而“某校的学生”是一个集合。尽管学生男女有别，高低各异，胖瘦不同，但他（她）们都是学生，且共读于同一学校，这都是他们共同的属性；再如，商店里的“水瓶、凉鞋、雨伞”可构成集合，因为它们都具有“商品”这个共同的属性。

(2) 集合里元素的从属性要明确。

给定一个集合 A ，对于任何一个元素 a ，必须能判明 a 是属于 A （记作 $a \in A$ ）或 a 不属于 A （记作 $a \notin A$ 或 $a \in \bar{A}$ ），两者必居其一。否则集合便没有确定的概念。如“全体胖子”，

“所有相当大的正整数”都不能构成集合，因为元素的属性不明确，谁也说不清多胖的人算胖子，多大的正整数算相当大的正整数。所以，这类问题不属于“集合论”研究的对象。

(3) 集合里的元素必须能判别彼此。

集合里元素都是相异的。“集合论”的创始人——德国著名数学家康托尔 (G.cantor) 对集合的描述说得很清楚：

“集或集合是我们的直观或思维中被看作一个整体的确定的相异的对象的总体。”所以我们对集合有个约定：集合里如有相同的元素，不管有几个，只能算作一个元素；集合中的元素可以任意排列，集合不变。例如：

$$\{a, b, a, c, b\} = \{a, b, c\} = \{b, c, a\}$$

3. 集合的表示法：

表示集合的方法常用的有列举法、描述法、图示法。

(1) 列举法:

把集合的元素一一列举出来写在大括号内, 用来表示集合, 这种方法叫做列举法。例如由数8, 9, 11, 13组成的集合可表示为

$$\{8, 9, 11, 13\}$$

注意 a 和 $\{a\}$ 是不同的: a 表示数 a , 而 $\{a\}$ 表示只含有一个元素 a 的集合。集合里可以不含元素, 这样的集合叫做空集, 用希腊字母 ϕ 表示。要注意 o 和空集是不同的。

(2) 描述法:

把描述集合中元素的共同属性或表示集合中元素的规律写在大括号内, 用来表示集合, 这种方法叫做描述法。例如由水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星组成的集合, 可表示为 $\{\text{太阳系的九大行星}\}$; 由不等式 $x-2 > 3$ 的所有解组成的集合, 可表示为 $\{x: x-2 > 3\}$ 或 $\{x | x-2 > 3\}$ 。

关于集合的图示法, 初中代数课本上有很多例子, 这里不再重复。

研究集合问题时, 为了方便起见, 常用大写拉丁字母表示集合, 用小写拉丁字母表示集合的元素。一般我们用 N 表示自然数集合, 用 J 表示整数集合, 用 R 表示实数集合。

二、“数”和“量”的区别和联系

恩格斯曾给数学下过一个简单的定义：“数学是数量的科学，它从数量这个概念出发。”学习数学就必须从本质上懂得“数量”的意义。

其实“数”和“量”是两个不同的概念，但是它们却是统一而密不可分的。

1. “量”的意义：

我们所接触到的事物，都有其区别于其它事物的不同的特性。例如，黑板都具有一定的面积和厚度，楼房都具有一定的高度和层数等等。决不存在没有面积的黑板、没有高度的房屋。面积、厚度、高度、层数等就是“量”，有了这些“量”，我们才能具体地感觉和认识事物，才能区分各种事物。又如，我们从来没有接触到抽象的水，接触到的只是具有一定温度的水，温度也是一个“量”。量的改变往往会引起事物性质的改变。还拿水来说吧，众所周知无论是冷水、温水或热水，其本质仍然是水，但当温度超过摄氏100度时，水就不再是水，而变成汽了。这就是哲学上常说的“从量变到质变”的过程。

因此，所谓“量”就是事物所具有的能区别程度异同的性质。

除了上面提到的一些量以外，我们还能举出很多量的例

子。如：个数、大小、体积、时间、压力、重量等等。

2. “数”的概念：

什么是“数”呢？恩格斯指出：“数是……最纯粹的量的规定”^{*} 这就是说，凡是量都可以用一定的单位去度量，度量的结果就得到数。这样，数就规定了每一种量的各种不同的程度。简单说，“数”就是表示量的程度的符号。

例如，我们说某个人的高度是 h 米，重量是 G 公斤， h 米、 G 公斤是量，而 h 和 G 是表示人的高低程度和轻重程度的两个数。究竟这个人是高个子还是矮个子，是胖子还是瘦子呢？如果用尺子量一下，用磅秤一下，得知这个人身高 1.52 米，体重 110 公斤，那么即使我们没见过这个人，但也能估计出这个人是个矮胖子。“1.52”和“110”就是分别表示高度和重量的两个数。

应当注意，量的大小和表示这个量的数值的大小不可混为一谈。如上例，如果用厘米和市斤作单位，这两个数就变成 152 和 220 了，但这个人的身高和体重并没有变。

由此可见，人们为了研究世界上多种多样错综复杂的量，需要把各种量所具有的共同特征抽象出来，这样就产生了数的概念，因此可以说，数和量的关系就是抽象与具体的关系。抽象的东西不是凭空产生，而是从现实的东西中产生的。世界上并不存在抽象的 7，你想象不出 7 是什么东西，只能从 7 个手指、7 支铅笔、7 小时、第 7 号等不同的量和序列中认识 7。若把这些手指、铅笔、时间等共同具有的

^{*} 引自恩格斯《自然辩证法》P217