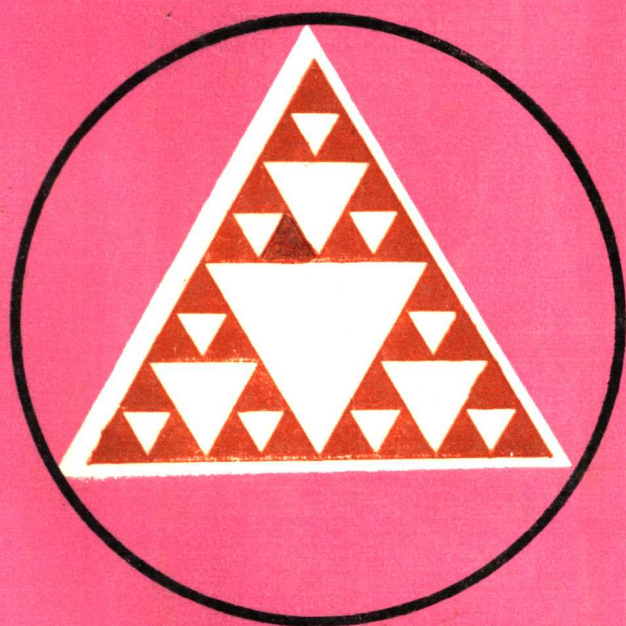


地球科学中的分形研究

〔美〕C.H.肖尔茨 B.B.曼德尔布罗特 等著

刘祖荫 皇甫岗 崔增林 周 尽 译

夏文义 等校



中国科学技术出版社

地球科学中的分形研究

[美] C.H. 肖尔茨 B.B. 曼德尔布罗特 等著

刘祖荫 皇甫岗 崔增林 周 尽 译

夏文义 等校

中国科学技术出版社

内 容 提 要

分形与分维研究是探索自然界复杂性这个当今世界科学发展潮流中方兴未艾的新理论和新方法之一。本文集译自《理论与应用地球物理学》杂志1989年第13卷第1/2期汇集的美国地球物理联合会于1987年12月在旧金山举行的秋季学术会议所召开的“地球物理学中的分形研究”专题讨论会上交流的论文,这是迄今为止最全面讨论分形研究的具有代表性的最新成果。其内容涉及大陆、海岸、海底深孔资料、地震、断层、断层泥、气象等地球科学中若干领域,包括地球物理学中的多重分形测量;地形地貌的分形几何学;地表水系及地下渗流几何特征的定量描述;分形在地震学中的应用以及与地壳运动、断层活动和古气候相关的分形分析等方面。文中讨论的一些理论和方法具有较高的学术价值及较强的适用性,有助于开创地球科学研究的新途径。

本文集可供地球物理、地理、地质、地震、气象诸领域从事地球科学、分形理论研究等方面的广大科学工作者及大专院校的有关师生阅读和参考。

Special Issue: Fractals in Geophysics

Pure and Applied Geophysics

Volume 131 Number 1/2, 1989

1939 Birkhäuser Verlag, Basel · Boston · Berlin

地球科学中的分形研究

〔美〕C.M.肖尔茨 B.B.曼德尔布罗特 等著

刘祖荫·皇甫岗 崔增林 周 尽 译

夏文义 等校

中国科学技术出版社出版(北京海淀区魏公村白石桥路32号)

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

北京印刷三厂联营厂印刷

开本: 787×1092毫米 1/16 印张: 13.5 字数: 345千字

1991年7月第1版 1991年7月第1次印刷

印数: 1—1000册 定价: 9.00元

ISBN 7-5046-0429-1/p·12

本文集在编辑出版过程中得到了国家地震局地球物理研究所研究员邹其嘉、编审宋守全等同志的关心和协助，特此致谢。

译者

目 录

序 言	C. H. Scholz和B. B. Mandelbrot (1)
论地球物理学家的多重分形测量	B. B. Mandelbrot (4)
全湍流中界面的分形几何学与耗散多重分形分布	K. R. Sreenivasan 等 (30)
折射地震学中的分形速度模型	D. J. Crossley 等 (43)
破裂花岗岩深成岩体的地形面几何量值变化	D. Norton 等 (55)
河道的分形弯曲度	R. S. Snow (69)
岩石内部天然破裂中流径的分形几何学与渗流探讨	D. D. Nolte等 (77)
海底地形的试验线性模型	A. Malinverno (96)
日本断层系的分维: 不同标度下岩石破裂几何形状的分形结构	T. Hirata (107)
地质学和地球物理学中的分形	D. L. Turcotte (117)
海底地形的分形重建	J. -C. Mareschal (136)
分维与幂函数谱之间的经验关系	C. G. Fox (145)
地形数据集具有分形特性吗?	L. E. Gilbert (163)
分形、断层泥及摩擦	C. G. Sammis等 (172)
标度地质学与地震反褶积	J. P. Todoeschuck等 (183)
非分形破裂: 苏伊士湾的基底破碎	G. Korvin (194)
长期古气候资料: 太平洋岩心V28-239氧同位素记录的 分形分析	R. H. Fluegeman, Jr. 等 (207)

序 言

许多地质体在很宽的标度范围参差不齐，所以，当以不同放大率或缩小率对它们进行观察时，其边界似乎是相同的。这样，物体本身可能以不同比例尺存在，而其外表看来仍十分相像。地质学家们长期以来凭直觉认识到这一基本事实——从而形成了一个不言而喻却是不可改变的原则，即任何地质体的照片必须附上一个比例尺参照物，在野外拍摄的地质照片中通常附上已知尺寸的某件普通物品，例如镜头盖、地质锤或人体。

地质体的这种基本的和普遍的标度不变性现在可以在分形几何学的格架内研究。对于从事实际工作的地质学家或地球物理学家来说，这确实代表了一种新的范例。因为它告诉人们把物体作为遵循确定标度法则的分形集合的一部分来观察，而这种标度法则比人们以往任何时候使用过的标度范围都要宽广得多，并提供充足理由预期这种法则是站得住脚的。作为这些法则的例子是，一个分形物体的每一种特征的尺寸分布是一个幂函数；一个分形界面或时间序列的记录都具有一种功率谱的形式，这也是幂函数，在这两种情况下的指数均与分维有关。

本文集汇集了地球物理学中的若干具体问题和分形几何学中的一些数学方法。我们可以证明这种广泛汇集是有益的，也是势在必行的，并将对理论的发展起到促进作用。然而，我们不想作出任何尝试去预测未来。

分形学和地球物理学的融汇是一件好事，因为它解决了一个古老的需求。B.B.Mandelbrot在其1982年出版的《自然分形几何学》一书中曾经说过：“山峰并不是圆锥形，海岸线不呈圆弧状，闪电的传播也不是直线的。”更一般地说，欧几里德形状与地球物理学中的形状相差得如此远，以至它连一级近似也做不出来。至于质量的分布，欧几里德描述的对象是不均匀的分布或是具有空间渐变密度的其他分布。它们都与诸如矿石一类的地球物理量的极其破碎的分布相差甚远，因此，它们也做不出一级近似。假若欧几里德行不通，那么又该用什么方法呢？通常可供选用的仅有的几何学是“真的混沌”，即缺乏定量的自然法则，而受着定性自然历史的支配。这是一个使科学家很难预期其继续开拓的极端！此外，由于没有真实的定量模型被使用，这就产生了一种真正的危险。从事数学的科学家能够理解，但不幸的趋势是他们使用自认为是“拥有最好的”而不切实际的模型来尝试并推向前进。这也许是应用数学的某些例子获得正超脱自然的“纯”数学声誉的缘故。

在这样的环境里，分形几何学的主要价值在于它在极端有序和真正混沌之间提供了一种中间可能性。分形集合在B.B.Mandelbrot的1967年海岸线研究中首次被用到真实的几何形式里，这一工作无疑应该被看作与地球物理学有关的一次研究。分布的多重分形测量实例在B.B.Mandelbrot的1974年间歇湍流研究中首次被完整地用于几何学研究，他的这些贡献再次被收入本书中。

分形最显著的特征是看起来十分复杂的事物，事实上其大多数均可用仅含很少参数的简单公式予以描述。与真的混沌相比较，且不考虑他们都需要引入新技术和新思维的话，分形和多重分形应该被看成是完美无缺的。我们编辑出版这本专集的目的就在于在地球物理学中阐明这些新思想和新技术，以鼓励新的研究人员投入这项工作。

现在谈第二个基本问题，即好或是坏的问题，分形和多重分形是否可以被实际应用于地

球物理学中？纵然是众所周知的山或云的“赝品”并未涉及地球物理学中的物体，然而只要对这些实例稍加观察，便足以使每个地球物理学家联想起许多熟悉的形状。作为例证，让我们引用一篇优美并仍然时兴的评论性文章（遗憾的是该文章未署名）来对此作出解释。在1976年出版的《地球物理年鉴》中列出了有关这个题目的第一本书，该书的书名为“Les objets fractals”。

“作者在这项工作中追求两个主要目标，而且都得到了成功。其一是推翻了没有确切对应物的抽象数学概念这一神话……，读者惊讶地发现他每天碰见的那些物体的尺寸竟然都不是整数！在这个目标上一举成功使作者受到鼓舞，其后的工作又取得了巨大的成就。为了避免白日做梦般的空想，沉湎于这种尝试的那位地球物理学家吃了苦头。诚然，地壳在各种标度上（大至大陆而小至晶粒）形成了若干断层和裂缝，难道我们不能推测它们也是分形的吗？……。一条地震断层远看如此地简单，近看却又如此地复杂，而事实上不可思议的是，如果人们去深究填满断层的粒状物质的标度的话，它也应该是〔一种分形〕……。

“我们非常喜欢用这些概念来开始进行物理学的研究。作者唤起了读者的好奇心并点燃其想像之火，但是当研究工作进行到无法作出圆满的描述时，他却又把那些急待帮助的读者弃置一旁……这时，人们的唯一希望就是有一种恰到好处的工具使用，而不应该给“经典的”物理学家或自然学家带来数不清的问题”。

这最后一段话提醒我们第三个基本问题是需要认真去做的。无论是好与坏，清楚与否，我们能够说清分形与地球物理学的关联吗？自从1975年分形学“问世”以来，物理学的分形研究和分形物理学研究均已取得了长足的进步，已经获得解释的分形现象数量持续增多，但是要获得解释的新问题的数目还在不断地出现，其结果是我们对大多数问题仍未能作出详尽的解释。让我们简单地叙述两种在各个领域中对某些分形作出特有的全面处理方法，这两种方法已在B.B.Mandelbrot的书壳正面和背面的文字中作了说明：通过随机的方法和通过混沌动力学的方法。

分形在地球物理学中的一种作用可以在概率极限定理中与存在于与此有关的经典“普及类”中找到广泛的解释。如下的事实说明了这个道理：Wiener的无向量布朗运动过程 $W(t)$ 是经过线性重标度的随机过程的极限，该过程属于很宽的吸引范畴。因此，它本身就是重标度过程的固定点，换言之，它的图形是一个自仿射分形集合或一条曲线。这个论据表明一切与概率极限定理有关的几何形状均可预期为分形集合。

分形在地球物理学中的第二个作用还可以用决定论的混沌动力学进行广泛解释。力学研究范围通常面临着在跨量级之间进行困难的选择：其中具有特征性的问题在18世纪已获得解答并不断被写入教科书之中；剩下的问题我们还知之甚少，这类问题可称之为“似真混沌”（nearly true chaos），它们包括像湍流研究这样的题目。但是到了现今，我们对第三种令人注目的中间的可能性也开始有所认识，它就是H.Poincare在很久前就曾略有涉及的决定论混沌，这方面的研究在近年来已取得十分详尽的发展。决定论混沌和分形显然是各自独立发展起来的，但它们彼此相融合并不奇怪，现在频繁地相互影响而平行地发展起来，所以某些评论家把它们看成是同一件广泛研究工作中的不同组成部分。混沌动力学的研究中十分重视系统瞬间状态下的混沌，以及由此而产生的“奇怪吸引子”和“奇怪压因子”，但是对这些物体的研究将不可避免地使我们涉及分形集合和多重分形测量。

与分形和混沌之间的相互作用密切相关的一门学科就是地球物理学，它揉合了分形的统计学和动力学的特性。让我们暂时把下面的一个概念作为可信的观念予以接受：决定论混沌

导至了地球物理学中时空图象的复杂性。那么,我们的最终目标就是在奇怪吸引子的基础上不要搅乱这些决定论法则。奇怪吸引子就是分形集合,以此我们可观测到多重分形量度。在原理上我们能否知道这种未搅乱的情况呢?我们还真不知道。从给定的分形集合或多重分形测量中我们大致能提取多少信息呢?目前的回答还为数不多。显然,我们还有许多需要解答的问题。所以还是让我们停止这种哲理性的推究,而来叙述一下地球物理学中与分形有关的问题吧。

在最近5年左右的时间内,人们对地球科学各个不同领域内地质现象的分形性质进行的研究正在与日俱增。为了确认这种研究工作,1987年12月在旧金山举行的美国地球物理联合会秋季学术会议上举办了题为“地球物理学中的分形研究”专题学术讨论会。本文集汇集了在那次会上宣读的论文以及少量后来提交的论文。本文集不奢望提供广泛的综述,它仅仅是在这个迅猛发展的领域中选取一些正在进行的工作以飨读者。

多重分形具有极大的重要性,并在与日俱增。Mandelbrot对此进行了叙述,在叙述中他使用了自己从70年代初期以来一直致力开拓的方法。Sreenivasan等人则讨论了多重分形和湍流。

地质学家常常使用地图进行工作,而地形的分形性质是本文集中一些文章的主题。Maliqverno和Mareschal两人讨论了海底地形的分形性质,而Gilbert又将研究的领域扩展到大陆地形。Gilbert和Fox两人则指出在对地形剖面这样的自仿射分形进行直接分析时遇到的一些困难。

人们很早就知道地震具有幂函数尺度的分形分布的特征。在Hirata的文章里把这种尺度的分布扩展到那些发生地震的地质体断层。与此相反,Korvin提供了一个他声称不是分形的破裂系统的例子。Norton和Sorenson把地形的分形性质与其下伏破裂的分形性质联系起来进行研究,而Nolte等人描述了一个流体通过含有破裂分形网介质的模型。

Turcotte的论文融汇了分形地球物理物体及其有关的现象,其中包括了碎屑物质。这正是Sammis和Biegel更详尽研究的主题,这两位作者揭示出断层作用过程中的物质交流作用所产生的断层泥也具有分形分布的特征。迄今所汇总的这些例子,提供了分形现象的一个有趣的谱系:构造地形—地震—断层—断层面地形—断层泥。

Snow研究的现象稍有不同,他把分形分析应用于蛇曲河流的几何学研究中,而Fluege-man和Snow则用这种方法研究一种颇为独特的地质时间序列——取自深海岩心的资料。我们终于开始发展了一种可用于那些遵循分形规律的非均匀介质地球物理学资料的分析方法,例如在Todoschuck与Jensen和Crossley与Jensen的论文中都对地震波传播通过这种介质进行了分析。其他研究工作同样揭示出这种方法不失为一种反映地球非均匀性的更为现实的途径。

C.H.Scholz B.B.Mandelbrot

1989年2月

(刘祖荫译,夏文义校)

论地球物理学家的多重分形测量

Benoit B. Mandelbrot

摘要: 本文主要(但不是唯一)应用地质学知识对多重分形理论进行了阐述,既可供初学者学习,也可供阶段性从事分形研究的专家讨论。其目的在于提供了一种研究多重分形的方法,并对 Mandelbrot(1974)的原始方法加以扩展及整理。从分形集合到多重分形测量的推广涉及到主要由数(如分数维)表述的几何体向主要由函数表述的几何体之间的过渡。最好的方法是选择函数 $\rho(\alpha)$,使其在双对数坐标系中为一有限概率分布,参数 α 称为Hölder指数。至于Frisch-Parisi方法和Halsey方法中所用的函数 $f(\alpha)$,在E维欧几里德空间中有关 $\rho(\alpha)=f(\alpha)-E$ 。当 $f(\alpha)\geq 0$ 时, $f(\alpha)$ 为分维,但对于 $f(\alpha)<0$ 的情形, α 称之为“本征量”,甚至还存在 $\alpha<0$ 的情形,这时 α 被称作“虚数”。本文对这些异常现象的含义进行了探讨,并建议进行一些实验。通过高维多重分形对低维分割的研究是本文的主要内容,这里引入参量 D_q ,当 $q>1$ 时, D_q 为这些分割的临界维数。文中还绘制了“增强多重分形图”,包括 $f(\alpha)$,函数 $\tau(q)$ 和 D_q 。

关键词: 分形, 多重分形, 测量, Hölder, 极限定理。

一、问题的提出及动机: 多重分形在地球物理学及其它科学领域中不可缺少的原因

多重分形的思想注定对地球物理学产生日渐增强的影响,若本专集能产生影响的话,情况将更加如此。

简言之,从分形集合到多重分形测量的推广涉及到主要由数(如分数维)表述的几何体向主要由函数表述的几何体之间的过渡,该函数可为一已经重正化并经恰当地作图的概率分布。

换句话说,将分形集合推广为多重分形测量涉及到从有限数目的分维数向无限数目的“维”的过渡,另外(这也是本文的独到之处),这些“维”可以为负值。因此,我们的讨论将远远超出欧几里德空间中整数维的概念。

1.1 铜的例子

对于最简单的分形,无论是严格的还是近似的,自相似性是它的核心。与此相关的自相似分形或自相似多重分形的概念可用多种方式来阐述,但是,如用稀有矿物(如铜)的分布来进行说明,对地球物理学家来说也许更易理解。我们首先考虑高品位铜矿,然后逐渐考虑较低品位的铜矿。

高品位铜矿的分布当然是不均匀的,主要集中在世界上少数几个地区。如果进一步考察其中某一地区铜矿的分布,就会发现其分布仍然是不均匀的:主要集中在少数几个子区域中,如此等等。所以,从统计意义上来说,可以认为:在每一储铜区中,无论区域大小,其高

品位铜矿的相对分布是相同的。若此说成立,则让我们来看一个较大的区域,并将其分成若干个等面积“单元”组成的网格,当单元的尺度变小时,包含高品位铜矿的总面积就相应缩小。

在数学上很早就对遵循这一过程的结构给出了相应的解释,分形几何学还将其“驯化”为一个自然模型,例子可参见Mandelbrot (1982)《自然界的分形几何学》(FGN)。用分形几何的语言来讲,高品位铜可看作由低分维自相似分形集合“集中”或“支持”的一个实用例证。

我们接下来考察品位较低的铜矿,其在自然界分布更广的事实,可视为受到一个高维分形集合的支持。

总之,为了给出铜矿分布的完整描述,人们认识到虽必须用分形,但仅用单一分形集合的概念是不够的,还必须引入分形的概念。简单的描述包括给出相应于品位序列中每一级别的分维值,分维存在阈值,其变化范围为从0到一个极高的、且不易被突破的数值。

在对从集合到测量的自相似概念的推广中已结合了上段文章的广泛含义,因此已经引进了自相似多重分形测量的概念。将多重分形称为“测量”而不称为“集合”,这是一个极其重要的差别,这一点将在第3.1节中进行解释。我们关于多重分形的研究,主要起源于对湍流间歇现象的研究,且大多数是1968—1976年期间的工作,但该研究最早开始于1962年。作者所著FGN375—376页综述了多重分形问题,不过,该综述过于简略,目前已经过时。

1.2 有趣的老调重弹

在所有的非随机多重分形中,最简单的一种称为二项式,本文第5节将讨论这个问题。数学家们很早以前就弄清了这一结构,并用分形几何对其处理,使其成为一个自然模型。碰巧,一些要进行二项式多重分形测量的基本情形非常直观,在第1.1节提及的地学文献中,人们几乎已发现了它。实际上,地质学家De Wijs (1951)对这一问题已作了如下的描述(见376):

“考虑一吨位为 W ,平均品位为 M 的矿体,可以想象将其分为吨位相等($\frac{1}{2}W$)、但平均品位不同的两半。若高品位矿体的品位为 $(1+d)M$,则低品位矿体的品位必为 $(1-d)M$,这样才能满足两个半体的总品位仍为 M …;第二次分割的结果得到四个吨位相等($\frac{1}{4}W$)的部分,品位分别为 $(1+d)^2M$ 、 $(1+d)(1-d)M$ 、 $(1+d)(1-d)M$ 、 $(1-d)^2M$;第三次分割产生 $2^3=8$ 块,其中一块平均品位为 $(1+d)^3M$,3块为 $(1+d)^2(1-d)M$,3块为 $(1+d)(1-d)^2M$,另一块为 $(1-d)^3M$ 。可以设想将此过程连续进行下去,得到更小的块体,……。其中作为度量变化率的系数 d 足以替代无形量的集合[那些认为矿藏评估是艺术而非科学的人来说将对此心满意足],而且基于这一测量的统计推断可以将经验和直观方法的迷宫一笔勾销。”

当然,De Wijs并没有对他的初始模型的几何学方面进行过探索。他和后来著名的研究者(包括G. Matheron)都只字未提分形或多重分形,即分维的基本概念。但是,假设矿物密度与品位无关,令吨位等于体积,并使(经重新解释的)De Wijs的过程无限进行,则可得出如下结论:矿物“凝结”成二项式多重分形分布。

1.3 比金属分形分布概念范围更广的相对间歇性

为扩展多重分形的范围,这里引用本人所著《自然界的分形几何学》375页“相对间歇性”一节中的如下叙述:

“本文若干自然分形的案例研究否定了自然界中一些曾被认为是无可争议的知识,从这一意义上讲,文章从头至尾充满着涉及了(多重)分形的现象;

“在第八章，我们忽略了引起分形误差的噪声虽能在多个误差之间相互消弱，但并不完全消失；

“在第九章，我们忽略了星际物质存在的认识，毫无疑问，星际物质的分布至少象恒星的分布一样没有规律。事实上，较之恒星物质密度而言，星际物质密度不可定义的概念显得更为明显，也更为广泛地被接受。引用Devaucoleurs的话来说：‘虽然可见物质均明显地块结，并丛集在各标度之上，但似乎很难相信不可见的星际气体是均匀的、各向同性的……（其）分布一定与……星系的分布密切相关……’，

“第十章中，描述了湍流耗散现象的饼状薄片是现实中明显的超简化模型；

“第九章的结尾简述了矿物分布的分形概念，这里闭分形的含意是指在可供开采的铜矿区之间，没有铜矿聚积。事实上，虽然在大多数地区铜矿聚积量非常少，但不能认为它在所有的地方都不存在：

“在每一情形中，暂时不太感兴趣的（空间部分）均被人为空化，以便应用‘闭’分形集合，但这些区域最终会被填充。填充时可使用一种新的混合体，即宇宙中的质量分布，以便消除空缺部分。但是对（给定的两个）小的阈值 θ 和 λ 至少有 $1-\lambda$ 比例的物质聚积在最大体积为 θ 的那部分空间。”

1.4 在许多科学领域中最重要特征：许多测量不能直接观测，只能通过“分割”才能实现

对地球的探索并不能完全在三维空间中进行，最常见的方法是通过钻孔来获得实际三维系统中的一维剖面资料，而通常情况下，可供观察的只有平面分割情形。通过一维或者二维分割来研究三维空间的湍流问题时亦会受到同样的限制。在典型状况下，这些分割的位置与湍流总体没有关系，因此可以认为是随机选择的。

再考虑奇怪吸引子的问题，它们的全自然空间具有高维性，但一般通过平面上的“Poincare剖面”来进行研究，平面的位置与整个吸引子无关，可视为随机选取。通过研究具有代表性的案例，可以发现沿随机分割进行的测量具有如下的特性：它们在所研究的自然空间中并没有与之相应的测量，反之亦然。这就提出了如下的问题：从一个分割中能够推演出整个测量的哪些特征？哪些特征又不能如此而获得？这个问题相当重要，也正是我们早期工作（1968—1976）的研究动机，尤其是Mandelbrot（1974）的研究。

二、两种不同的概括

本文首先从入门材料入手介绍二项式测量（第五节），然后逐步进行概括。对分割的讨论将放在第八节，且得出的结果比我们预期的内容更多。

我们希望能够引起以下两类读者的兴趣：一类是对多重分形尚不完全熟悉的读者，一类是通过学习Frisch和Parisi（1985）的变量方法（此方法后来为Halsey等〔1986〕采用）而熟悉了多重分形的读者。

对于了解我们早期工作（Mandelbrot，1988）的读者，本文显得过于详细，例如第五节至第八节即是早期工作中的第3.4节和第3.5节。

我们的目的不是教会读者去进行实际操作，而是为那些多重分形的初学者提供该理论最通俗易懂的形式，同时为那些精通多重分形的读者提供一些他们熟悉的常规处理方面十分简单且又洞察入微的解释。

2.1 为多重分形初学者的概述

这些工作可归结如下：

自相似的概念可以很容易地从分形集合扩展到测量，正如第三节将要描述的一样，测量是确定弥散质量、或概率、或其它“要素”在其支持集合上某种规律的简单方法，其分布也可能扩展到欧几里德“支持”空间，如某一区间或平面，也可能被限制在某一分形支持空间，如Cantor集合。除其细节不同外，函数相同。

为了定量地描述扩展元素的自相似方法，把矩序列或累积生成函数的指数作为第一个标准特征，本文以 $\tau(q)$ 表示，图2是Mandelbrot (1974) 最早给出的 $-\tau(q)$ 图。

与第一特征相当的另一个特征是极限分布函数，其极限类似于普通概率分布函数。另外，重正化必须按照特殊而鲜为人知的方法进行，即人们并不熟悉的复合重正化方法。在这里，为学习概率论的学生熟知、且可导出中心极限定理的累加重正化毫无作用。由于重正化的要求，最好先进行两坐标的对数变换再进行极限分布函数的处理，即以双对数坐标作图。以 $\rho(\alpha)$ 表示生成函数，另一个选择量为 $f(\alpha)$ ，对于线测量， $f(\alpha) = \rho(\alpha) + 1$ ，在若干涉及确定极限分布的文献里，该选择量均占有一席之地。

$f(\alpha)$ 可通过Legendre变换或反变换由 $\tau(q)$ 求得，同理 $\tau(q)$ 亦可由 $f(\alpha)$ 求出，这正是物理学家们熟知的热力学中从Lagrange倍率法到Gibbs分布的特性之一。我们在后边给出了该公式完整的数学证明，并证明甚至 $f(\alpha)$ 为负值的情形时亦有非常广泛的适用范围。在这一证明中，参考了由于Harald Cramer引起的概率存在（但鲜为人知）极限定理、以及“大偏差”的影响。Legendre变换表明了一个直观事实，即 $f(\alpha)$ 可通过一族直线的盖凸包络线来求得。

在 $f(\alpha)$ 图中， $\tau(q)$ 是 $f(\alpha)$ 图斜率为 q 的切线在纵坐标轴上的截距，该切线在坐标轴角平分线上的截距值为 $D_q = \tau(q)/(q-1)$ ，以后把它称为临界维。

Mandelbrot (1974) 曾引入了两种不同的随机自相似多重分形，分别叫作守恒型（或微正则型）分形（参见第七节）和正则型分形（参见第八节）。正则型分形更为复杂，需要对高维空间中多重分形进行低维分割的研究（参见1.4节），特别需要弄清对数正态分布的特殊情形，这在湍流多重分形的应用中经常提到。请注意，Frisch和Parisi (1985) 明确地指出，虽然他们的方法源于Mandelbrot (1974) 的方法，但由于未考虑对数正态分布的情形，其结果的普遍性较差。

2.2 为熟悉多重分形公式的读者的概述（该公式源于Frisch和Parisi）

首先考虑如下的问题：由于“多重分形”不具物理意义，而仅仅是一个统计（测量理论）概念和工具，那么在有关多重分形的近期文献中，在何处才可找到有关概率论的内容？答案相应简单，且可在本文中找到。现总结如下：

我们熟悉的函数 $\tau(q)$ 是一个描述测量的标准概率统计工具，称为累积生成函数。

α 是人们熟知的标准概念，称为Hölder指数，将其称为“奇异强度”没有意义。Hentschel和Procaccia (1983) 把 α 称作维数，不过经验表明，如果仅在集合中保留维数这一术语（在其所有倍率的形式和正进行倍率的形式中），而并不用于测量之中，则可以避免许多混乱。

在那些熟悉多重分形公式的人们当中，普遍相信函数 $f(\alpha)$ 是一个由函数 $\tau(q)$ 经Legendre变换来定义的新概念，因此可以随意标注（如作为“奇异频谱”）。在实际应用中，如果在欧几里德空间中的一维区间内进行测量， $f(\alpha)$ 简单地等于 $\rho(\alpha) + 1$ ，其中 $\rho(\alpha)$ 是双对数坐标系中

的极限概率分布函数。但支持测量的集合可为一分形体,这就产生了第6.6节要描述的较为复杂的法则。

有几种方法可以估计 $\rho(\alpha)$ 和 $f(\alpha)$,一种方法就是由 $\tau(q)$ 的Legendre变换而得,但是 $\tau(q)$ 的估计涉及了许多不同的平滑运算。虽然它们并非无足轻重,但并不影响对结果的详细分析。

当 $q > 1$ 时, $D_q = \tau(q)/(q-1)$ 是“临界维”,由Mandelbrot (1974)以定理形式引入,认为在某一测量下沿维数 D 的某一分割,当 $q > q_{crit}(D)$ 时,有 $\langle \mu^q(dx) \rangle = \infty$, $q_{crit}(D)$ 的(反)函数即为 D_q 。

在某种程度上,多重分形的吸引力在于它具有一定的神秘色彩,然而,当对其处理过程有所了解之后,神秘感就会随之消失。但是,对 $\tau(q)$ 、 α 和 $f(\alpha)$ 的适当标注是否确为一个重要问题呢?为了回答这一问题,就象热动力学初级课程常常碰到的情形一样,我们有必要弄清通过Lagrange因子而获得 $\tau(q)$ 和 $f(\alpha)$ 之间Legendre变换的方法。在热动力学中,有多种根据实际情况来活用这些因子的标准方法,其中之一是Darwin-Fowler最速下降法。该方法作为基本内容已引入教科书中,但遗憾的是现在的物理学家们已不太熟悉这一方法了。因此,实际上Frisch-Parisi方法不再采用Lagrange因子,从而比Darwin-Fowler方法更进了一步。在初级课程中,没有一个热动力学老师会采用这种超前的做法,同样,多重分形老师也不会赞同这种做法。

凭我们的经验,以上的陈述有助于我们说明多重分形的Frisch-Parisi方法已产生了实质性的混乱,不再有人会有“奇异频谱”象什么或不象什么的含糊感觉,适当的基础知识将把这些混乱一扫而光。作为主要的例子,将 $f(\alpha)$ 作为分维的Frisch-Parisi解释会导致与负值 $f(\alpha)$ 有关的自相矛盾的情形,这种自相矛盾以惊人的奇闻形式出现,当然会随着该理论的发展得以解释而告终,这种自相矛盾的现象在我们所用的概率统计方法中尚未出现过。

Frisch和Parisi所得到的公式在许多文献中都有广泛的应用,但本文无意对其作任何综述。本文的目的在于从相同的条件下寻找另一种解决方法,并和已经得到广泛发展的方法建立起某种关系。

三、非分形一致性的空间变化特性

3.1 集合和测量之间的本质差别以及“单测量”概念

为了了解不同于原始形式的多重分形特性,有必要给出集合和测量概念之间差别的完整评价。

幸运的是,这里完全不需要关于集合和测量理论的知识。更精确地说,如要对我们将引用的某些定理作详细的证明,本理论中涉及的测量理论,其复杂程度远远超出本文讨论的范围。

基本概念常用最简单的形式给出圆满的解释,如本文中常用的区间 $[0,1]$ 。面积 $[0,1]^2$ 或体积 $[0,1]^3$ 。在 E 维欧几里德空间中,区间、面积或体积均为 $[0,1]^E$ 基本集合的特例。

集合的概念 如需以 $[0,1]^E$ 的形式定义集合 S ,则要求遵循如下的法则:对每一个点 P ,不论它满足 $P \in S$ 还是 $P \notin S$,都有 $P \in [0,1]^E$ 。这一法则由“指示函数(Indicator Function)” $I(P)$ 确定,其定义为:若 $P \in S$,则 $I(P)=1$;若 $P \notin S$,则 $I(P)=0$ 。

一致性或均匀性测量 众所周知,整个 $[0,1]^E$ 可视为一致性测量。集合和其一致性测量在数学上是等同的。下一步考虑经循环构造的分形集合(如图1所示),即Sierpinski填料。

最自然的测量（即一致性测量）是给每一三等分以相等的权重，这样，集合和其一致性测量等价。然而，一致性测量非常特殊，在许多情形下与实际不符，这在第一节中已经作过论述。

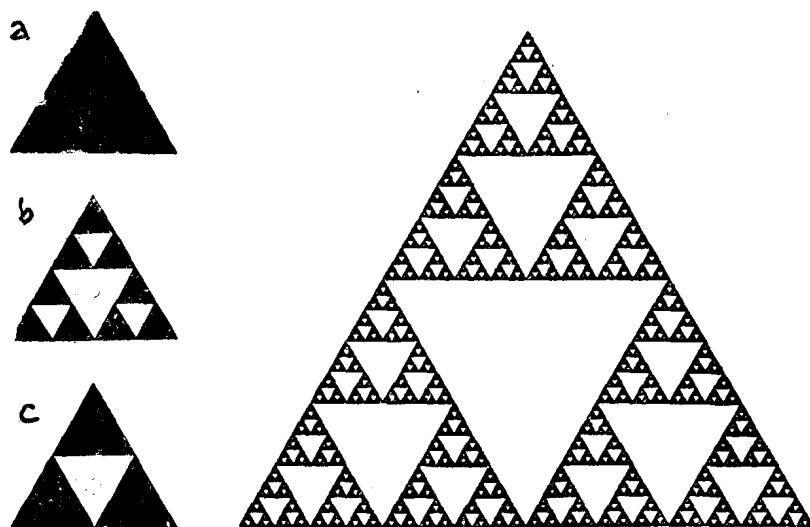


图1 Sierpinski填料的构成如下：初始图形如图1a的三角形所示。图1a-1b：将三角形等分为四个三角形，并去掉中间的三角形，则得到图1b；图1b-1c：将剩下的三角形都再等分为四个三角形，并去掉中间的三角形，则得到图1c；依次类推

集合极限的概念 多重分形有两个主要作用，每一作用都可由一复杂的点集开始。其第一作用可由地球上铜矿的分布来加以说明。因为对采矿工程师来讲，无妨将每一个铜原子看作一个点，那么地球上的所有铜原子就组成一个点集。第二个作用可由一随机过程的连续“样本值”来加以说明，而随机过程则由离散时间量或某一确定过程的连续“轨迹点”来确定，这样，所遇到的仍然是一个点序列或有序集。

然而，对于所有感兴趣的情形，这些集合都非常庞大，要完全确定它们将是件难以完成的工作，而且也毫无意义，这就使人自然地想到（特别对于第二个例子）：令时间无限而取过程的连续位置集合的极限。问题是：其极限是否也是一个集合？为了圆满地回答这一问题，下面考虑在 $[0,1]$ 域随机选取的点的集合。

首先，设对所有 x ，其概率分布为连续的，其密度函数为 $\mu'(x)$ ，故 $\mu'(x) > 0$ 。如果条件满足，那么，一个样本点不断增大的集合，其极限确实为一集合，并定义为整个区间 $[0,1]$ 。事实上，极限与密度函数 $\mu'(x)$ 无关，这意味着该极限比趋于此极限的有限集合包含更少的信息。答案很明显：在两种情形中我们至少要做的不仅要确定一个有限集合，而且还要确定该集合的密度。

第二种类似的情形：当随机点只取一定的允许值 x_g 时，每一 x_g 值都有一可知概率 μ_g 。在这种情形中，其极限为一（可数）集 $\{x_g\}$ ，但也必须确定被称之为该集合“支持”的概率 μ_g 。

如何来描述密度 $\mu'(x)$ 随 x 变化的随机过程呢？最主要的特征是 $\mu'(x)$ 本身，或其积分 $\mu(x) = \int_0^x \mu'(s) ds$ ，它称之为累积概率分布。另一个不太明显的特征是函数 $x(\mu)$ ：

$$x(\mu) = x \text{ 区间的总长度 } (\mu'(x) < \mu)$$

密度 $\mu'(x)$ 和概率 μ_x 。刚巧定义了两类经典“测量”，虽然多重分形也属测量的范畴，却属于第三类，它既无密度，也非离散，称之为“单一”的测量。我们最好先通过一个事例来讨论。

3.2 对单一测量概念的古老而精辟的阐述

人们常说“眼见为实”，我们来看看图2重现的对随机多重分形的最早完整说明，该图发表于我们早期关于这一论题的专题论文中 (Mandelbrot, 1972)。许多地质学家和地球物理学家也许不难找出图2的永无休止的、全新的解释。

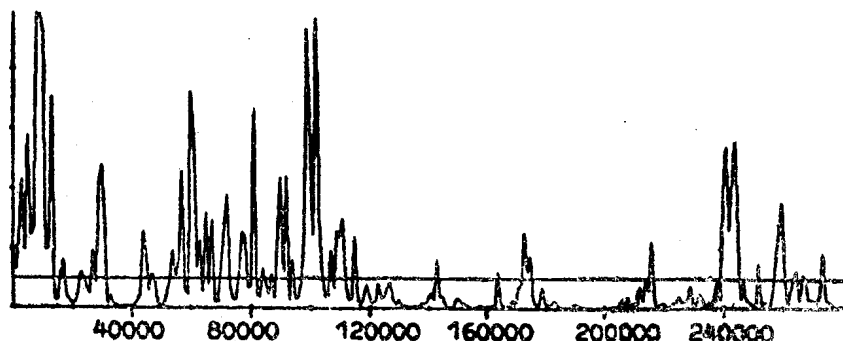


图2 多重分形测量的最早模拟，称为Mandelbrot (1972) 有限对数正态测量

横轴表示“时间” t ，并“离散”成具均匀宽度 Δt 的小盒子；纵轴表示这些盒子的“测量”序列。需要再次说明的是，如果将时间段 $[0, 1]$ 上测量的总积分定为1，那么在一个盒子中的测量就可视为击中该盒子的概率。更笼统地说，一个盒子的测量就是该盒子中所包含的任一种“元素”的多少。

区间 $[0, t]$ 上的测量 $\mu([0, t])$ 当然是 t 的增函数，这里所给出的是它的有限增量序列 $\mu([0, t+dt]) - \mu([0, t])$ ，增量值构成一条曲线，但该曲线看来名不符实，因为它并不表示真实的增函数图，就是通过变换也难以实现。

为了提供鲜明而熟悉的背景，这里给出具有连续密度 $\mu'(t)$ 的测量类比图。在这种情形中，以 $\mu(\Delta t)/\Delta t$ 代替 $\mu'(t)$ 作为函数图的近似值，而测量的主要特征则由随时间变化的近似密度 $\mu(\Delta t)/\Delta t$ 的分布来确定，当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，近似密度趋于真值 $\mu'(t)$ 。

然而，现在的情形大不相同，通过设计，测量大致具有自相似性，这一概念将在第3.4节中讨论，但这里要说明的是，当以非常小的标度 $\Delta_2 t \ll \Delta t$ 在 Δt 中测量时，就会看出与整个图2一样，测量显得没有规律。例如，将 Δt 分割为两半，那么在两半上的 $\mu(\Delta t)$ 通常并不相等。

可以得出如下结论： $\mu([0, \Delta t])$ 没有局部密度，同时也很非离散形，因此令 $\Delta t \rightarrow \infty$ ，图2中参差不齐的曲线就变得比原来更不规则。这样，并不能使之逐渐近似于某一函数。

设测量 $\mu([0, t])$ 为时间 t 的函数，连续但不可微，那么测量 $\mu(dt)$ 没有局部密度，称之为“奇异”测量（此为专业术语，源自Lebesgue）。对于奇异测量， $\mu([0, \Delta t])$ 值的渐近“分布”的概念没有意义，但幸运的是我们仍可使用其恰当的替代形式。

3.3 极限概率分布 $\rho(\alpha)$ 和相应的函数 $f(\alpha)$

对于降值 Δt 的 $\Delta_k t$ 序列，有与图2相当的曲线，首先，对每一 $\Delta_k t$ ，将 $\mu([0, \Delta_k t])$ 以Hölder指数 $\alpha_k = \log \mu([0, \Delta_k t]) / \log \Delta_k t$ 替换，进而求出 α_k 的概率密度，并将它以 $\rho_k(\alpha) = -\log$

(α_k 的概率密度)/ $\log \Delta_k t$ 替换。其中每一步都包括:取对数和除以因子 $-\log \Delta_k t$ 的重正化两方面的处理。重正化因子并不为人们熟悉,故显得有些特殊并具人为性。但是,这一点将在第7.2节中予以证明。在第7.2节,我们分析已知其测量为多重分形的连续样本,可以发现,当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $\rho_k(\alpha)$ 既不收敛于0,也不收敛于 ∞ ;相反,其它任何重正化因子都产生一简并极限。

以 $\rho(\alpha)$ 表示 $\rho_k(\alpha)$ 的极限,可以发现,除使 $\rho(\alpha)$ 达到最大值(即期望值 $\langle \alpha \rangle$)的 α 以外,对于所有的 α , $\rho(\alpha)$ 均为负值,但收敛于该极限的速度很慢。 $\rho_k(\alpha) \rightarrow \rho(\alpha)$ 的特性能够逆转,并常常被用来定义多重分形的概念。

正如Frisch和Parisi(1985)最早指出,有必要考虑 $f(\alpha) = \rho(\alpha) + 1$ 。事实上,Frisch和Parisi曾讨论过 $\rho(\alpha) \geq -1$ 的特殊情形,这时对所有的 α ,有 $f(\alpha) > 0$ 。他们指出:在这种特殊情形中, $f(\alpha)$ 可看作是某一适当集合的分维。在某些情形中,可以用 $f(\alpha)$ 代替 $\rho(\alpha)$,但这样在本质上隐去了多重分形的特性。

从作者早期的文献一直到Frisch和Parisi(1985)的论文预印本(于1983年散发)中,多重分形的发展仅仅限于其数学背景的澄清与拓展(例如Kahane and Peyriere, 1976),但没有新的应用(在Physical Review Letters中也未提及)。多重分形的进一步发展只是近期的事情,了解这一点的大多数读者大概都知道Frisch和Parisi以及Halsey等(1986)相同的方法。遗憾的是这些文献使用的代数关系过于复杂和人为化,应用范围非常有限,并且Halsey等的专门术语遮掩了基本结构的简单性质。因此,我们只引入Halsey等的概念,而按照我们初始的方法来引入该问题的新进展。

3.4 自相似测量及其它

对于正测量的情形,还需要几个规范的定义:集合 S 的测量记为 $\mu(S)$,对于那些不熟悉测量概念的读者,仍可将 μ 看作击中集合 S 的概率。由级联乘积过程而得的多重分形测量在本质上接近于精确的自相似分形集合。

如前所述,分形集合具有精确的自相似性。如果分形集合可分成若干子系,那么,每一子系都可通过称之为各向同性收缩或相似收缩($\mathcal{K}$)的变换而获得,自相似集合可完全由收缩体的集合来确定。例如,称为Sierpinski填料的基本分形,其每一三等分都可通过将总体按 $r=1/2$ 的比率来相似收缩而获得。在“三角形的预分形集合”中,可从任一角开始,按其本身的形状连续内插而不必考虑其“过去”的结构步骤。

假设,对填料的任一三等分定义(正)测量为 $\mu(P)$,然后对每一三等分的三等分进行内插。一般说来,当通过收缩变换 $\mathcal{K}$ 由分形体 P 得到分形体 P' 时,有 $P' = \mathcal{K}(P)$,则象条件概率一样,可以精确定义 P 中 P' 的条件测量,即测量 $\mu(P')$ 与条件测量 $\mu(P)$ 的 $\mu(P')/\mu(P)$ 比值。

测量自相似的概念是指不考虑“过去”步骤的连续内插过程,大致的含意是当各部分收缩时,其测量也按比例收缩。为了规范地表达这一概念,取第二收缩变换 $\mathcal{L}$,比较 $\mu(P')/\mu(P) = \mu\{\mathcal{K}(P)\}/\mu(P)$ 和 $\mu\{\mathcal{L}(P')\}/\mu\{\mathcal{L}(P)\}$:如果对任意 $\mathcal{K}$ 和 $\mathcal{L}$,该条件测量均相同,那么测量 μ 就称为严格自相似多重分形。

对给定一个或有限集合非重叠部分 $P_r = \mathcal{K}_r(P)$,如果 $\mu(P_r)/\mu(P)$ 的分布或联合分布仅与收缩变换 $\mathcal{K}_r$ 有关,那么随机测量就称为具有统计自相似性。

附注 在更普遍的数学分形集合中,各个部分通常是经非线性变换由整体中获得,在某种意义上近似于线性收缩的例子包括多项式图的Julia集合,相应的多重分形包括Julia集合中的调和测量。在其它多重分形测量的例子中,则考虑了基于圆中反演群体的有限集合(FGN,

第18章和第20章), 象Gutzwiller和Mandelbrot(1988)研究过的例子一样, 有限集合本身可以为一直线。最后, “富分形(fai fractal)” (分形研究的新术语, 参见FGN第15章) 和Mandelbrot集主要包括非线性变换, 迄今为止, 在定义“分形”和“多重分形”时, 对变换的选择尚无普遍一致的意见。

3.5 多重分形的五个基本概念

除了集合和测量的不同之外, 多重分形还涉及五个基本含义, 我们将以尽可能简单的方式介绍如下: A) 在第四节各向同性的Cantor测量中, 引入了Hölder参数 α ; B) 在第三节的二项式测量中引入了函数 $\rho(\alpha)$ 和函数 $f(\alpha)$; C) 在第六节论及多项式测量时, 引入了Legendre变换“多重分形公式”; D) 在第七节“守恒1974多重分形测量”的范畴内, 引入了隐参数 α 的概念以及第一种随机形式; E) 在第八节关于“正则型1974多重分形测量”一段, 引入了临界指数 q_{crit} 及临界维数函数 D_q (D_q 是 q_{crit} 的反函数) 和品质因子 α 的概念, 以及第二种随机形式。

四、基本的“单分形——”Cantor测量及其非随机性和自相似性; Hölder参数 α 的引入

4.1 定义

这里也许没有必要重复三元组Cantor粉尘 $\mathcal{C}$ 以及其恶魔阶梯函数 $C(x)$ 定义, 仅用较小的篇幅说明一下。以 $()$ 定义闭区间, $[]$ 定义开区间。为了定义 $\mathcal{C}$, 取区间 $[0, 1]$, 切下中间三分之一的开区间 $]1/3, 2/3[$, 然后再分割出区间 $[0, 1/3]$ 和 $[2/3, 1]$ 的中间三分之一的开区间, 以此类推。阶梯函数 $C(x)$ 是第2.3节中函数 $\mu([0, t])$ 的特例, $\mathcal{C}$ 左右两半的测量分配相等为 $1/2$, 使 $C(1/3)=C(2/3)=1/2$, 然后 $\mathcal{C}$ 的四个四分之一分配以相等的测量 $1/4$, 使 $C(1/9)=C(2/9)=1/4$, $C(7/9)=C(8/9)=3/4$, 以此无限地内插下去, 因此, 当 $\mu([x', x''])=C(x'')-C(x')$ 时, $[0, 1]$ 中每一区间 $[x', x'']$ 的测量都可由极限函数 $C(x)$ 获得。

这种测量称之为Cantor测量或Cantor粉尘分形性各向同性测量, 原因如下: 如果分别属于 $[x'_1, x''_1]$ 和 $[x'_2, x''_2]$ 的两部分Cantor粉尘可以通过平移而叠加, 那么它们具有相同的测量 $\mu([x'_1, x''_1])=\mu([x'_2, x''_2])$ 。

4.2 恶魔阶梯函数 $C(x)$ 为一对角自仿射分形曲线

实际上, 阶梯函数可以分成以下三个部分: “中间部分”可通过矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3^{-1} \end{pmatrix}$ 和固定点 $(2^{-1}, 2^{-1})$ 的简并(不可逆)仿射从整体中求得; 两个“两侧部分”可通过同一矩阵 $\begin{pmatrix} 2^{-1} & 0 \\ 0 & 3^{-1} \end{pmatrix}$, 并分别取固定点 $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$ 的仿射从整体中求得。在本文中简并矩阵似乎“无足轻重”, 因此, 由于矩阵只有一种可能的非简并形式, 所以Cantor粉尘 $\mathcal{C}$ 上各向同性的多重分形具有独特的简单性。

一般来说, 考虑由递归运算所得的分形, 存在 N 个具有相同收缩比例 r 的收缩体, 并且在 N 个收缩体间, 每一步递归运算都将测量分成相等的份数。这样, 测量具有自仿射性, 矩阵存在两种可能的形式, 即简并型 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ 或非简并型 $\begin{pmatrix} N^{-1} & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^D & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$ 。

4.3 Hölder指数概念在区间而非点上的应用, 单分形测量中的 α 和 $f(\alpha)$

将Hölder关于经典数学的概念改写, 并运用于双重元素 (dt) , 可记作: